Publ. Math. Debrecen
43 / 1–2 (1993), 111–127

Jordan-Hölder-Gruppen

Von EDGAR MÜLLER (Würzburg) und OTTO MUTZBAUER (Würzburg)

Es werden torsionsfreie abelsche Gruppen endlichen Ranges betrachtet, deren Typenreihen allesamt Permutationen voneinander sind. Diese Gruppen werden sinngemäß Jordan-Hölder-Gruppen genannt. Es müssen nicht sämtliche Permutationen auftreten. Wenn das jedoch der Fall ist, dann ist eine solche Jordan-Hölder-Gruppe vollständig zerlegbar. Es werden noch weitere und insbesondere weniger starke Bedingungen angegeben, wann eine Jordan-Hölder-Gruppe vollständig zerlegbar ist. Jordan-Hölder-Gruppen besitzen eine linear geordnete Typenreihe und linear geordnete Typenmengen und Haupttypenmengen. Butlergruppen mit linear geordneten Typenmengen sind vollständig zerlegbar [1, 1.11] und bilden die Klasse der vollständig zerlegbaren Jordan-Hölder-Gruppen. In dieser Klasse sind nach [6, 11] die reinen und regulären Untergruppen schon Quasi-Summanden und wieder vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppen. Weiter wird gezeigt, daß in Butlergruppen der Durchschnitt aller Typen einer beliebigen Typenreihe dem inneren Typ gleicht und somit eine Invariante ist. Schließlich wird ein Ergebnis von Mutzbauer [5, 4.3] über Quasi-Zerlegungen torsionsfreier abelscher Gruppen in uniforme Gruppen verallgemeinert, insofern, daß die Voraussetzung der Existenz aller Blockpermutationen abgeschwächt wird. Schreibweise und Bezeichnungen werden von Fuchs [2] und Mutzbauer [4] übernommen.

Eine aufsteigende Folge reiner Untergruppen einer torsionsfreien abelschen Gruppe (nicht notwendigerweise von endlichem Rang) mit um 1 ansteigenden Rängen heißt eine *Kompositionsfolge* [5] von A:

$$0 = A_0 \subset_* A_1 \subset_* \ldots \subset_* A_\beta \subset_* A_{\beta+1} \subset_* \ldots \subset_* A = A_\alpha$$

mit einer Ordinalzahl α und $A_\beta = \bigcup_{i<\alpha} A_i$ für eine Limeszahl β. Die Folge $\{t_i \mid i < \alpha\}$ der zugehörigen Typen $t_i = t(A_{i+1}/A_i)$ heißt eine *Typenfolge* von A. Die Quotienten A_{i+1}/A_i heißen *Hauptfaktoren* und die zugehörigen Typen heißen *Haupttypen.* Eine torsionsfreie abelsche Gruppe heißt *t-radikal*, falls es eine Typenfolge $\{t_i \mid i < \alpha\}$ gibt mit $t_i \geq t$ für alle i. Eine t-radikale Gruppe heißt *t-uniform*, wenn in dieser Typenfolge alle

Typen gleich t sind. Durch

$$A^{i+1}(t)/A^i(t) = (A/A^i(t))(t) \quad \text{und} \quad A^1(t) = A(t)$$

für alle $i < \alpha$ und $A^\beta(t) := \bigcup_{i<\beta} A^i(t)$, falls β eine Limeszahl ist, werden für A die *iterierten Typenuntergruppen* definiert. Die Vereinigung $A^\infty(t) := \bigcup_{i<\alpha} A^i(t)$ heißt das *t-Radikal* von A. Endliche Folgen heißen Reihen. Eine torsionsfreie abelsche Gruppe A endlichen Ranges heißt eine Jordan-Hölder-Gruppe, wenn je zwei Typenreihen nur Umordnungen voneinander sind.

Proposition 1. *(1) Jordan-Hölder-Gruppen des Ranges n besitzen höchstens n Haupttypen und insbesondere höchstens n Typen. Die Haupttypenmenge und die Typenmenge sind beide endlich.*

(2) Torsionsfreie homomorphe Bilder und reine Untergruppen von Jordan-Hölder-Gruppen sind Jordan-Hölder-Gruppen.

(3) Untergruppen von endlichem Index von Jordan-Hölder-Gruppen sind Jordan-Hölder-Gruppen.

Beweis. (1) Typenreihen von Jordan-Hölder-Gruppen sind Permutationen voneinander, somit gibt es höchstens n verschiedene Haupttypen und Typen.

(2) Sei H eine reine Untergruppe der Jordan-Hölder-Gruppe A und seien zwei verschiedene Typenreihen von A/H gegeben. Ergänzt man diese beiden Typenreihen durch eine feste Typenreihe von H zu zwei Typenreihen von A, so sind die beiden Typenreihen von A/H Permutationen voneinander, d.h. A/H ist eine Jordan-Hölder-Gruppe. Genauso erkennt man die reine Untergruppe H als Jordan-Hölder-Gruppe.

(3) Eine Untergruppe B von endlichem Index einer torsionsfreien abelschen Gruppe A endlichen Ranges hat genau dieselben Typenreihen, ist also wie A eine Jordan-Hölder-Gruppe. $\square$

Faktoriell homogene Gruppen endlichen Ranges ([3]), d.h. torsionsfreie abelsche Gruppen endlichen Ranges mit nur einer Typenreihe, und vollständig zerlegbare homogene Gruppen sind offensichtlich Jordan-Hölder-Gruppen. Unter Verwendung der Notation von [2, §88] lassen sich zu jeder aufsteigend linear geordneten Typenreihe mit nur idempotenten Typen faktoriell homogene Gruppen endlichen Ranges angeben. Sei dazu $V := \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{Q}x_i$ ein rationaler Vektorraum mit der Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\{t_1, \ldots, t_n\}$ eine aufsteigend linear geordnete Typenreihe mit idempotenten Typen t_i. Für $1 \leq i \leq n$ seinen $\chi^i \in t_i$ idempotente Charakteristiken und χ^i sei von der Form $\chi^i = (\chi^i_p \mid p \text{ prim})$. Für jedes $1 \leq i \leq n$ sei eine Menge $P_i := \{p \mid \chi^i_p = \infty\}$ definiert. Dann ist $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots \subseteq P_n$. Durch

$$\begin{aligned} A := \big\langle p_1^{-\infty}x_1, \ldots, p_1^{-\infty}x_n, p_2^{-\infty}\big(x_1 + \alpha^{(2)}_{p_2,2}x_2\big), \ldots, \\ p_n^{-\infty}\big(x_1 + \alpha^{(2)}_{p_n,n}x_2 + \ldots + \alpha^{(n)}_{p_n,n}x_n\big) \;\big|\; p_i \in P_i\big\rangle \end{aligned}$$

mit p-adischen ganzen irrationalen Zahlen $\alpha_{p,i}^{(k)}$ derart, daß für jede Primzahl $p \in P_i$, die Menge $\{\alpha_{p,j}^{(k)} \mid j \geq i,\ 2 \leq k \leq j\}$ über $\mathbf{Q}$ algebraisch unabhängig ist, ist eine faktoriell homogene Gruppe des Ranges n definiert mit der einzigen Typenreihe $\{t_1, \ldots, t_n\}$. Nach [2, §88] ist A homogen und mit einer offensichtlichen Abwandlung dieses Arguments sogar faktoriell homogen. Die Konstruktion für die Gruppe A kann sogar auf unendlichen Rang verallgemeinert werden, da für eine Primzahl p abzählbar unendlich viele p-adische ganze irrationale Zahlen $\alpha_p^{(1)}, \alpha_p^{(2)}, \ldots$ existieren, die über $\mathbf{Q}$ algebraisch unabhängig sind.

Zu jeder aufsteigend linear geordneten Typenreihe $\{t_1, t_2\}$ der Länge 2 kann man ebenfalls leicht eine (faktoriell) homogene Gruppe des Ranges 2 angeben. Man kann sich nach P. Schultz [7, 3] auf den Fall $t_1 = t(\mathbf{Z})$, $t_2 = t$ beschränken. Sei dazu $\chi \in t$ eine Charakteristik mit $\chi = (\chi_p \mid p$ prim). Dann ist die Gruppe $A = \langle x_1, x_2, p^{-\chi_p}(x_1 + \alpha_p x_2) \mid p \text{ prim}\rangle$ mit $\alpha_p = [\sqrt{p}]$ für alle Primzahlen p offensichtlich eine (faktoriell) homogene Gruppe mit der Typenreihe $\{t(\mathbf{Z}), t\}$. Es scheint, daß auch für höhere Ränge, möglicherweise sogar für unendlichen Rang, zu jeder aufsteigend linear geordneten Typenreihe bzw. Typenfolge faktoriell homogene Gruppen existieren. Ein Zugang zur Konstruktion solcher Gruppen könnte z.B. die Wahl geeignet vieler algebraisch unabhängiger Funktionen sein, wie im Falle des Ranges 2 die ganzzahlige Wurzelfunktion. Jedoch erscheint diese Methode weniger glücklich, da eine explizite Angabe solcher Funktionen eine Verallgemeinerung auf höhere Ränge unmöglich macht.

Butlergruppen bzw. vollständig zerlegbare Gruppen sind i.a. keine Jordan-Hölder-Gruppen, z.B. $A = \mathbf{Q}^{(p)}a \oplus \mathbf{Q}^{(q)}b$ für verschiedene Primzahlen p und q. t-uniforme Gruppen sind i.a. keine Jordan-Hölder-Gruppen. Denn nach [4, 2.7.(5)] besitzt für $\mathcal{S} = \langle p^{-1} \in \mathbf{Q} \mid p \text{ prim}\rangle$ die stark unzerlegbare $t(\mathcal{S})$-uniforme Gruppe $B_1 = \langle x_1, x_2, p^{-2}(x_1 + px_2) \mid p \text{ prim}\rangle$ die Typen $t(x_1) = t(\mathcal{S})$ und $t(x) = t(\mathbf{Z})$ für $x \in B_1 \setminus \langle x_1\rangle_*$. Somit besitzt die Gruppe B_1 neben der Typenreihe $\{t(\mathcal{S}), t(\mathcal{S})\}$ auch die Typenreihe $\{t(\mathbf{Z}), 2t(\mathcal{S})\}$ und ist also keine Jordan-Hölder-Gruppe.

Proposition 2. *Eine Untergruppe einer Jordan-Hölder-Gruppe mit einer gleichen Typenreihe wie die ganze Gruppe hat endlichen Index und ist also selbst eine Jordan-Hölder-Gruppe.*

Beweis. Sei A eine Jordan-Hölder-Gruppe des Ranges n mit Untergruppe B. Sei $0 = B_0 \subset_* B_1 \subset_* \ldots \subset_* B_{n-1} \subset_* B_n = B$ eine Kompositionsreihe von B mit Typenreihe $\{s_1, \ldots, s_n\}$, die auch Typenreihe von A ist. Dann ist mit $A_i = \langle B_i\rangle_*^A$ die Reihe $0 = A_0 \subset_* A_1 \subset_* \ldots \subset_* A_{n-1} \subset_* A_n = A$ eine Kompositionsreihe von A mit zugehöriger Typenreihe $\{t_1, \ldots, t_n\}$. Wegen $B_i/B_{i-1} = (A_i \cap B)/(A_{i-1} \cap B) \mathrel{\widetilde{\subset}} A_i/A_{i-1}$ gilt $t_i = t(A_i/A_{i-1}) \geq t(B_i/B_{i-1}) = s_i$. Nach Voraussetzung ist die Typenreihe $\{s_1, \ldots, s_n\}$ eine Umordnung der Typenreihe $\{t_1, \ldots, t_n\}$. Damit folgt sofort $t_i = s_i$ für alle i. Somit ist $B_i/B_{i-1} \mathrel{\tilde{\subset}} A_i/A_{i-1}$ mit endlichem Index für alle i, also A/B endlich und nach Proposition 1 ist B eine Jordan-Hölder-Gruppe. □

Satz 3. *Jordan-Hölder-Gruppen besitzen eine linear geordnete Haupttypenmenge und eine linear geordnete Typenmenge. Insbesondere hat eine Jordan-Hölder-Gruppe eine linear geordnete Typenreihe.*

Beweis. Eine Jordan-Hölder-Gruppe A des Ranges n hat nach Proposition 1 eine endliche Haupttypenmenge. Nach [4, 1.3] gibt es somit eine Kompositionsreihe $0 \subset_* A_1 \subset_* \ldots \subset_* A$ mit zugehöriger Typenreihe derart, daß $t_i = t(A_i/A_{i-1}) = IT(A/A_{i-1})$ ist. Wegen $t_i = IT(A/A_{i-1}) \leq IT(A/A_i) = t_{i+1}$ ist diese Typenreihe linear geordnet. □

In Jordan-Hölder-Gruppen A mit Typenreihe $\{t_1, \ldots, t_n\}$ ist $A(s) = \sum_{u>t} A(u) = A^*(t) = A^*(t)_*$ für alle Typen t, sofern $s = \min\{u \in \{t_1, \ldots, t_n\} \mid u > t\}$. Eine torsionsfreie abelsche Gruppe A mit linear geordneter Typenreihe $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ und linear geordneter Haupttypen- und Typenmenge der Mächtigkeit gleich dem Rang von A ist i.a. keine Jordan-Hölder-Gruppe. Denn die Gruppe $A = B_1 \oplus (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})x_3$ des Ranges 3 (vgl. obige Beispiele) besitzt die linear geordnete Haupttypen- und Typenmenge $\{t(\mathbf{Z}), t(\mathcal{S}), 2t(\mathcal{S})\}$.

Satz 4. *Eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges mit einer linear geordneten Haupttypenmenge mit ausschließlich idempotenten Haupttypen ist eine Jordan-Hölder-Gruppe.*

Beweis. Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges n mit der Haupttypenmenge $HT(A) = \{t_1, t_2, \ldots\}$, wobei $t_1 < t_2 < \ldots$ und seien die Haupttypen t_i für alle i idempotent. Seien $\{s_1, \ldots, s_n\}$ und $\{s'_1, \ldots, s'_n\}$ zwei verschiedene Typenreihen von A. Dann ist der Summentyp $ST(A) = s_1 + \ldots + s_n = \sum_{i\geq 1} l_i t_i = s'_1 + \ldots + s'_n = \sum_{i \geq 1} k_i t_i$ mit geeigneten nicht negativen ganzen Zahlen l_i und k_i. Sowieso sind fast alle l_i und k_i gleich 0. Sei nun i maximal bezüglich o.E. $k_i > l_i$ angenommen. Dann wäre $\sum_{j \geq i+1} k_j t_j = \sum_{j\geq i+1} l_j t_j$ und $\sum_{j=1}^{i} k_j t_j > \sum_{j=1}^{i} l_j t_j$ und somit $ST(A) = \sum_{j=1}^{i} k_j t_j + \sum_{j \geq i+1} k_j t_j > \sum_{j=1}^{i} l_j t_j + \sum_{j\geq i+1} l_j t_j = ST(A)$, wie die Rechnung mit idempotenten, linear geordneten Typen zeigt. Folglich muß $l_i = k_i$ für alle i sein und A ist eine Jordan-Hölder-Gruppe. □

Satz 5. *Das t-Radikal $A^\infty(t)$ einer Jordan-Hölder-Gruppe A gleicht der Typenuntergruppe $A(t)$ für alle Typen t aus der Typenmenge von A. Insbesondere ist eine Jordan-Hölder-Gruppe genau dann t-radikal, wenn t kleiner oder gleich dem inneren Typ ist.*

Beweis. Das t-Radikal $A^\infty(t)$ der Jordan-Hölder-Gruppe A ist eine reine Untergruppe, also auch Jordan-Hölder-Gruppe und hat eine Typenreihe mit ausschließlich Typen $\geq t$, d.h. alle Elemente von $A^\infty(t)$ haben Typ $\geq t$ und $A^\infty(t) \subset A(t)$ mit Gleichheit. $\square$

Für t-homogene Gruppen gilt offensichtlich $A^\infty(t) = A(t)$. Ebenso gleicht auch für Butlergruppen nach [5, 3.5] das t-Radikal $A^\infty(t)$ der Typenuntergruppe $A(t)$ für alle Typen aus der Typenmenge. Somit charakterisiert diese Bedingung keine dieser Klassen. Eine torsionsfreie abelsche Gruppe A mit $A^\infty(t) = A(t)$ für alle Typen aus der Typenmenge ist i.a. keine Jordan-Hölder-Gruppe, auch nicht unter der Zusatzbedingung, daß die Haupttypenmenge linear geordnet und die Mächtigkeit durch den Rang beschränkt ist. Denn die Gruppe $A = \langle x_1, x_2, x_3, p^{-2}(x_1 + px_2 + [\sqrt{p}]x_3) \mid p$ prim $\rangle$ ist $t(\mathbf{Z})$-homogen und erfüllt somit $A^\infty(t(\mathbf{Z})) = A(t(\mathbf{Z})) = A$. Sie besitzt die linear geordnete Haupttypenmenge $\{t(\mathbf{Z}), t(\mathcal{S}), 2t(\mathcal{S})\}$ der Mächtigkeit gleich dem Rang 3. Sie ist aber keine Jordan-Hölder-Gruppe. Denn das homomorphe Bild $A/\langle x_3\rangle \cong B_1 = \langle x_1, x_2, p^{-2}(x_1 + px_2) \mid p$ prim$\rangle$ ist keine Jordan-Hölder-Gruppe.

Satz 6. *Seien A eine Jordan-Hölder-Gruppe und t ein Typ aus der Typenmenge von A. Ist die Anzahl der Typen in einer Typenreihe von A, die größer oder gleich t sind, gleich dem Rang der Typenuntergruppe $A(t)$, so ist $A(t)$ ein Quasi-Summand. Genauer gilt für jede maximale Untergruppe H von A mit $H \cap A(t) = 0$, daß $A/(H \oplus A(t))$ endlich ist.*

Beweis. Seien A eine Jordan-Hölder-Gruppe, t ein Typ aus der Typenmenge und sei der Rang von $A(t)$ gleich der Anzahl der Typen größer oder gleich t in einer Typenreihe von A. Sei ferner H eine maximale Untergruppe von A mit $H \cap A(t) = 0$. Insbesondere ist H rein und damit A/H eine Jordan-Hölder-Gruppe nach Proposition 1. Nach Voraussetzung sind alle Haupttypen von H kleiner als t. Wegen $A(t) \cong (A(t) \oplus H)/H \subset A/H$ haben dann $A(t)$ und A/H eine gleiche Typenreihe, d.h. $A/(H \oplus A(t))$ ist endlich nach Proposition 2. $\square$

In Jordan-Hölder-Gruppen A, welche die Voraussetzung des obigen Satzes erfüllen, ist i.a. die Typenuntergruppe $A(t)$ kein direkter Summand. Denn die Typenuntergruppe $A(t(\mathbf{Q}^{(p,q)})) = \mathbf{Q}^{(p,q)}c$ der Gruppe $A = \langle r^{-1}a, b, s^{-1}(a+c), p^{-\infty}(a+\alpha b), (pq)^{-\infty}c\rangle$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen r, s, p und q und p-adischer ganzer irrationaler Zahl α, ist ein Quasi-Summand, aber kein direkter Summand, da ein reines Komplement zu $\mathbf{Q}^{(p,q)}c$ nicht sowohl das Element a, als auch das Element $a + c$ enthalten darf. Vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppen haben offensichtlich die Eigenschaft, daß die Anzahl der Typen in einer Typenreihe von A, die größer oder gleich t sind, gleich dem Rang der Typenuntergruppe $A(t)$ ist, für alle Typen aus ihrer Typenmenge. Stark unzerlegbare Jordan-Hölder-Gruppen dagegen haben diese Eigenschaft nur für einen Typ, der kleiner oder gleich dem inneren Typ ist, da sie keine (nichttrivialen) Quasi-Summanden besitzen.

Die folgenden Sätze zeigen, daß die Jordan-Hölder-Eigenschaft zusammen mit anderen Eigenschaften zur vollständigen Zerlegbarkeit trivialisiert.

Satz 7. *Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe A endlichen Ranges sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) A ist eine vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppe.

(2) A ist eine Butlergruppe und eine Jordan-Hölder-Gruppe.

(3) A ist eine Butlergruppe mit linear geordneter Typenmenge.

(4) A ist vollständig zerlegbar mit linear geordneter Typenmenge.

(5) Alle reinen Untergruppen von A sind Quasi-Summanden.

In diesem Fall gibt es eine vollständige Zerlegung $A = \oplus_{i=1}^n A_i$, in rationale Gruppen A_i mit $t(A_1) \le t(A_2) \le \ldots \le t(A_n)$. Ferner sind alle regulären Untergruppen Quasi-Summanden. Weiter sind torsionsfreie homomorphe Bilder und reguläre (insbesondere reine) Untergruppen vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppen.

Beweis. (1) impliziert (2) offensichtlich. Die Implikation (2) nach (3) folgt sofort aus Satz 3. Die Bedingung (3) impliziert (4), da nach [1, 1.11] Butlergruppen mit linear geordneter Typenmenge vollständig zerlegbar sind. Die Aussagen (4) und (5) sind nach [6, 11] äquivalent. Seien nun (4) bzw. (5) angenommen. Dann hat A die angegebene vollständige Zerlegung $A = \oplus_{i=1}^n A_i$, mit $t(A_1) \le t(A_2) \le \ldots \le t(A_n)$. Sei $0 = B_0 \subset_* B_1 \subset_* \ldots \subset_* B_n = A$ eine beliebige Kompositionsreihe von A. Es ist zu zeigen, daß die Typenreihe $\{t(B_i/B_{i-1}) \mid 1 \le i \le n\}$ eine Permutation der Typenreihe $\{t(A_i/A_{i-1}) \mid 1 \le i \le n\}$ ist. Die Voraussetzung (5) vererbt sich auf Quasi-Summanden, also gibt es reine rationale Untergruppen C_i von A, sodaß $C_1 \oplus \ldots \oplus C_i$ endlichen Index in B_i hat. D.h. $\oplus_{i=1}^n A_i$ und $\oplus_{i=1}^n C_i$ sind isomorph und $t(B_i/B_{i-1}) = t(C_i)$. Somit ist die Typenreihe $\{t(B_i/B_{i-1}) \mid 1 \le i \le n\}$ eine Permutation von $\{t(A_i/A_{i-1}) \mid 1 \le i \le n\}$ und A ist vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppe mit linear geordneter Typenmenge, hat also die angegebene vollständige Zerlegung. Reine Untergruppen und torsionsfreie homomorphe Bilder sind nach [1, 1.1] und Proposition 1 Butlergruppen und Jordan-Hölder-Gruppen, folglich auch vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppen. Reguläre Untergruppen sind nach [6, 11] Quasi-Summanden, besitzen nach [1, 1.10] endlichen Index in ihren reinen Hüllen und sind wie diese nach Proposition 1 vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppen. $\square$

Reine Untergruppen vollständig zerlegbarer Jordan-Hölder-Gruppen sind nicht notwendig direkte Summanden. Denn in der Gruppe $A = \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Q}^{(p)}b$ ist die Untergruppe $B = < qa + b >_*^A$ i.a. kein direkter Summand. t-uniforme Jordan-Hölder-Gruppen sind insbesondere homogen vom Typ t und mit dem Lemma von Baer [2, 86.5] lassen sich sukzessive rationale Gruppen vom Typ t direkt abspalten, d.h. A ist schließlich vollständig zerlegbar homogen vom Typ t.

Die direkte Summe $\oplus_{i<\alpha} A_i$ von Untergruppen A_i einer torsionsfreien abelschen Gruppe A heißt eine Quasi-Zerlegung von A, falls der Quotient $A/(\oplus_{i<\alpha} A_i)$ endlichen Exponenten besitzt. Falls A die Quasi-Zerlegung $\oplus_{i<\alpha} A_i$ mit t_i-uniformen Gruppen A_i des Ranges n_i, möglicherweise n_i unendlich, besitzt, dann sind alle Permutationen der Typenfolge $\{t_1^{n_1}, t_2^{n_2}, \dots\}$ ebenfalls Typenfolgen von A.

Satz 8. *Eine Jordan-Hölder-Gruppe mit der Typenreihe* $\{t_1^{n_1}, \dots, t_k^{n_k}\}$, *die auch die umgekehrte Typenreihe als Typenreihe besitzt, ist vollständig zerlegbar. Insbesondere ist eine Jordan-Hölder-Gruppe mit einer absteigend linear geordneten Typenreihe vollständig zerlegbar.*

Beweis. Sei B eine reine t_1-uniforme Untergruppe des Ranges n_1 derart, daß A/B die Typenreihe $\{t_2^{n_2}, \dots, t_k^{n_k}\}$ besitzt. B ist als Jordan-Hölder-Gruppe, wie im Anschluß an Satz 7 bemerkt, vollständig zerlegbar t_1-homogen. Sei weiter C eine reine Untergruppe von A mit der Typenreihe $\{t_k^{n_k}, \dots, t_2^{n_2}\}$ und A/C wieder t_1-uniform des Ranges n_1. Da der Typ t_1 in keiner Typenreihe von C auftreten darf, da auch C eine Jordan-Hölder-Gruppe ist, folgt $B \cap C = 0$ und die Untergruppe $B \oplus C$ besitzt die gleiche Typenreihe $\{t_k^{n_k}, \dots, t_1^{n_1}\}$ wie A. Somit besitzt sie nach Proposition 2 endlichen Index in A, und B ist ein Quasi-Summand in A. Weiter ist $C \overset{\sim}{\subset} A/B$ von endlichem Index und C besitzt wie A/B die Typenreihe $\{t_2^{n_2}, \dots, t_k^{n_k}\}$. Sukzessive lassen sich nun vollständig zerlegbare t_i-homogene Quasi-Summanden abspalten und A ist quasigleich zu einer vollständig zerlegbaren Gruppe mit einer linear geordneten Typenmenge. Nach Satz 7 schließlich ist A eine vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppe. □

Korollar 9. *Jordan-Hölder-Gruppen des Ranges n, die eine Typenmenge mit Mächtigkeit gleich dem Rang n besitzen, sind vollständig zerlegbar.*

Beweis. Sei A eine Jordan-Hölder-Gruppe des Ranges n mit einer Typenmenge T der Mächtigkeit n. Dann ist nach Proposition 1 die Haupttypenmenge gleich der Typenmenge. Da $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ nach Satz 3 linear geordnet ist, sei z.B. $t_1 > t_2 > \dots > t_n$; dann sind $x_1, \dots, x_n \in A$ mit $t(x_i) = t_i$ linear unabhängig und die Untergruppe $W := \oplus_i \langle x_i \rangle_*^A$ hat eine gleiche Typenreihe wie A. Somit hat W nach Proposition 2 endlichen Index in A, d.h. A ist fast vollständig zerlegbar und somit eine Butlergruppe mit linear geordneter Typenmenge, also nach [1, 1.11] vollständig zerlegbar. □

Eine Jordan-Hölder-Gruppe mit Typenmenge gleich der Haupttypenmenge, deren Mächtigkeit kleiner als dem Rang ist, muß nicht vollständig zerlegbar sein. Denn unter Verwendung der Notation von [2, §88] ist die Gruppe $G \oplus \mathbf{Q}^{(p)} x_3$ mit $G = \langle x_1, x_2, p^{-\infty}(x_1 + \alpha x_2) \rangle$, p Primzahl und α p-adisch ganz irrational eine Jordan-Hölder-Gruppe. Sie ist aber nicht vollständig zerlegbar, da G stark unzerlegbar ist.

Im folgenden werden Jordan-Hölder-Gruppen des Ranges 2 betrachtet.

Korollar 10.
(1) Nicht-homogene Jordan-Hölder-Gruppen des Ranges 2 sind vollständig zerlegbar.
(2) Homogene Jordan-Hölder-Gruppen des Ranges 2 sind entweder vollständig zerlegbar homogen oder faktoriell homogen und stark unzerlegbar.
(3) Stark unzerlegbare Jordan-Hölder-Gruppen des Ranges 2 sind faktoriell homogen.

Beweis. (1) folgt sofort aus Korollar 9.
(2) Sei A eine homogene Jordan-Hölder-Gruppe des Ranges 2. Besitzt A die Typenreihe $\{t_1, t_2\}$ mit $t_1 = t_2 = t$, so ist A t-uniform und nach früherer Bemerkung vollständig zerlegbar. Hat andernfalls A einen Haupttyp $t_2 \neq t$, so ist $\{t_1 = t, t_2\}$ die einzige Typenreihe, A ist somit faktoriell homogen und nach [3, 2.11] stark unzerlegbar.
(3) Sei A eine stark unzerlegbare Jordan-Hölder-Gruppe des Ranges 2. Dann ist A homogen, sonst wäre A nach Teil (1) dieses Korollars vollständig zerlegbar. Ferner muß die Haupttypenmenge aus genau zwei Haupttypen bestehen, denn sonst wäre A homogen vom Typ t und t-uniform und nach Teil (1) dieses Korollars vollständig zerlegbar. Somit ist $\{t_1 = t, t_2 \neq t\}$ die einzig mögliche Typenreihe von A und A ist faktoriell homogen. $\square$

Stark unzerlegbare Jordan-Hölder-Gruppen vom Rang größer als 2 sind i.a. nicht homogen (und somit auch nicht faktoriell homogen). Unter Verwendung der Notation von [2, §88] ist die Gruppe

$$A = \langle x_1, x_2, x_3, p^{-\infty}x_1, p^{-\infty}(x_2 + \alpha x_3), q^{-\infty}(x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)\rangle$$

stark unzerlegbar, wenn p, q verschiedene Primzahlen sind, und α eine p-adische ganze, irrationale Zahl und β, γ q-adische ganze, irrationale Zahlen und linear unabhängig über $\mathbf{Q}$ sind. Die Gruppe A besitzt die linear geordnete Typenmenge $\{t(\mathbf{Z}), t(\mathbf{Q}^{(p)})\}$ und die linear geordnete Haupttypenmenge $\{t(\mathbf{Z}), t(\mathbf{Q}^{(p)}), t(\mathbf{Q}^{(p,q)})\}$ und ist nach Satz 4 eine Jordan-Hölder-Gruppe. Sie ist aber nicht homogen und daher auch nicht faktoriell homogen.

Seien B und C Jordan-Hölder-Gruppen und sei $0 \to B \to A \to C \to 0$ eine exakte Sequenz. Dann ist A (auch unter der Zusatzbedingung, daß die Haupttypenmenge $HT(A) = HT(B) \cup HT(C)$ linear geordnet ist) nicht notwendig eine Jordan-Hölder-Gruppe. Denn seien $A = B_1 \oplus \mathcal{S}x_3$ mit $B_1 = \langle x_1, x_2, p^{-2}(x_1 + px_2) \mid p \text{ prim}\rangle$, $B = \langle x_2, x_3\rangle_*^A \cong \mathbf{Z} \oplus \mathcal{S}$ und $C = A/B$ rational vom Typ $2t(\mathcal{S})$. B und C sind offensichtlich Jordan-Hölder-Gruppen. Aber A besitzt die linear geordnete Haupttypenmenge $\{t(\mathbf{Z}), t(\mathcal{S}), 2t(\mathcal{S})\} = HT(B) \cup HT(C)$ und ist keine Jordan-Hölder-Gruppe.

Für Erweiterungen des Ranges 2 genügt jedoch die Zusatzbedingung aus obiger Bemerkung, wie folgende Aussage zeigt.

Proposition 11. *Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges 2 mit einer reinen rationalen Untergruppe B. Sei $HT(A) = \{t(B), t(A/B)\}$ linear geordnet die Haupttypenmenge von A. Dann ist A eine Jordan-Hölder-Gruppe.*

Beweis. Falls $t = t(B) = t(A/B)$ gilt, dann ist A t-uniform und t-homogen, also nach dem Lemma von Baer [2, 86.5] vollständig zerlegbar und eine Jordan-Hölder-Gruppe. Für $t(A/B) < t(B)$ gibt es wegen $t^A(a) \leq t^{A/B}(a+B) < t(B)$ für $a \in A \setminus B$ genau zwei Typen in der Typenmenge. A besitzt offensichtlich den Summentyp $ST(A) = t(B) + t(A/B)$ und aufgrund der Invarianz des Summentyps ([4, 3.1]) genau die Typenreihen $\{t(A/B), t(B)\}$ und $\{t(B), t(A/B)\}$. Somit ist A auch in diesem Fall eine Jordan-Hölder-Gruppe und nach Korollar 10 vollständig zerlegbar. Falls schließlich $t(B) < t(A/B)$ gilt, dann ist A wieder wegen der Invarianz des Summentyps entweder vollständig zerlegbar, sofern A nicht homogen ist oder faktoriell homogen, wenn A homogen vom Typ $t(B)$ ist. In jedem Fall aber ist A eine Jordan-Hölder-Gruppe. $\square$

Die folgenden einfachen Ergebnisse werden häufiger benutzt.

Lemma 12. *[Korollar zu [5, 2.2]]. Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe mit Untergruppen B und C derart, daß $\{t_i \mid i < \alpha\}$ bzw. $\{s_i \mid i < \beta\}$ für Limeszahlen α und β Typenreihen von B bzw. C sind mit $s_j \not\geq t \leq t_i$ für einen Typ t und $i < \alpha$, $j < \beta$. Dann ist $B \cap C = 0$.*

Beweis. Seien B und C Untergruppen wie angegeben. Man zeigt $C \cap B^i(t) = 0$ durch Induktion über i. Nach [5, 2.2] ist $C \cap B(t) = 0$. Sei nun $C \cap B^i(t) = 0$ angenommen und seien $\bar{B} = B/B^i(t)$, $\bar{C} = (C \oplus B^i(t))/B^i(t) \cong C$ und $\bar{B}(t) = (B/B^i(t))(t) = B^{i+1}(t)/B^i(t)$. Wieder wegen [5, 2.2] erhält man $\bar{C} \cap \bar{B}(t) = 0$. Folglich ist mit Dedekind

$$B^i(t) = (C \oplus B^i(t)) \cap B^{i+1}(t) = (C \cap B^{i+1}(t)) \oplus B^i(t)$$

und somit $C \cap B^{i+1}(t) = 0$. Falls α eine Limeszahl ist und $C \cap B^i(t) = 0$ für alle $i < \alpha$, dann ist offensichtlich $C \cap B^\alpha(t) = C \cap \bigcup_{i<\alpha} B^i(t) = 0$. Dies zeigt $C \cap B^\infty(t) = 0$. Wegen [5, 1.1] ist aber $B = B^\infty(t)$ und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges n, die uniform für ihren inneren Typ t ist, ist vollständig zerlegbar homogen vom Typ t, da sie den Summentyp nt besitzt und deshalb nach [4, 3.5] vollständig zerlegbar homogen vom Typ t ist. Gleiches gilt auch für den äußeren Typ.

Lemma 13. *Eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges, die uniform für ihren äußeren Typ ist, ist vollständig zerlegbar homogen.*

Beweis. Für rationale Gruppen ist nichts zu zeigen. Sei nun t der äußere Typ von A und A eine t-uniforme Gruppe des Ranges größer als 1. Sei C eine reine rationale Untergruppe von A vom Typ t und A/C ebenfalls t-uniform. Sei weiter D rein in A vom Corang 1 und $D \cap C = 0$. Dann ist $t \geq t(A/D) \geq t(C) = t$, da $C \cong (D \oplus C)/D \subset A/D$ gilt. Also ist $D \oplus C \doteq A$ und D ist quasiisomorph zu A/C, also ebenfalls t-uniform. Sukzessive lassen sich nun reine rationale Untergruppen vom Typ t abspalten und A besitzt eine vollständig zerlegbare t-homogene Untergruppe von endlichem Index, und nach [2, 98.1] ist A ebenfalls vollständig zerlegbar t-homogen. □

Lemma 14. *Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges mit einer Typenreihe $\{t_1^{n_1}, \ldots, t_k^{n_k}\}$ derart, daß t_k maximal in der Menge $\{t_1, \ldots, t_k\}$ ist, mit paarweise verschiedenen Typen $t_1, \ldots, t_k$. Besitzt A eine t_k-uniforme Untergruppe B des Ranges n_k, so gleicht die reine Hülle B_*^A von B dem t_k-Radikal $A^\infty(t_k)$ und der Quotient $A^\infty(t_k)/B$ ist endlich. Ferner ist B ein Quasi-Summand in A. Ist zudem t_k der äußere Typ von A, so ist B vollständig zerlegbar t_k-homogen und jede rationale Untergruppe von A vom Typ t_k ist ein Quasi-Summand.*

Beweis. Sei B eine t_k-uniforme Untergruppe des Ranges n_k und sei C eine reine Untergruppe von A mit der Typenreihe $\{t_1^{n_1}, \ldots, t_{k-1}^{n_{k-1}}\}$ und A/C sei ebenfalls t_k-uniform des Ranges n_k. Nach Lemma 12 ist $B \cap C = 0$ und $B \cong (B \oplus C)/C \subset A/C$ von endlichem Index nach [5, 4.2], da B und A/C beide t_k-uniforme Gruppen gleichen Ranges sind. Also ist $B \oplus C \doteq A$ und B ist ein Quasi-Summand. Wegen [5, 1.4] ist die reine Hülle B_* von B enthalten im t_k-Radikal $A^\infty(t_k)$ von A. Falls $B_* \neq A^\infty(t_k)$ ist, so ist $A^\infty(t_k)/B_*$ nach [5, 1.3] eine t_k-radikale Gruppe und A/B_* enthält ein Element vom Typ $\geq t_k$. Wie gezeigt, ist jedoch B ein Quasi-Summand in A, und C ist quasiisomorph zu A/B_*, also besitzt A/B_* die Typenreihe $\{t_1^{n_1}, \ldots, t_{k-1}^{n_{k-1}}\}$. Wegen [5, 2.2] müßte nun $t_i \geq t_k$ gelten für ein i. Dies ist jedoch ein Widerspruch dazu, daß t_k maximal in $\{t_1, \ldots, t_k\}$ ist und alle t_i paarweise verschieden sind. Somit ist $B_* = A^\infty(t_k)$ und $A^\infty(t_k)/B$ ist endlich, da B_*/B endlich ist für den Quasi-Summanden B. Ist zusätzlich t_k der äußere Typ von A, so ist B nach Lemma 13 vollständig zerlegbar t_k-homogen und nach [2, 98.1] ist auch $A^\infty(t_k)$ vollständig zerlegbar t_k-homogen. Ferner ist jede rationale Untergruppe D von A vom Typ t_k in $A^\infty(t_k)$ enthalten und D_* ist ein direkter Summand in $A^\infty(t_k)$ nach [2, 86.8]. Schießlich ist D ein Quasi-Summand in $A^\infty(t_k)$, da D_*/D endlich ist und D ist auch ein Quasi-Summand in A, da $A^\infty(t_k)$ ein Quasi-Summand in A ist. □

Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe A endlichen Ranges n mit einer Haupttypenmenge $HT(A) = \{t_1, \ldots, t_r\}$ und einen Haupttyp $t_i \in HT(A)$ sei $n^u(t_i)$ die kleinste Stelle, an der t_i als Haupttyp in allen Typenreihen auftritt, und dem entsprechend $n^o(t_i)$ die oberste Stelle. Offensichtlich gilt

$n^u(t) = 1$ für einen Typ t aus der Typenmenge von A, und $n^o(s) = n$ für einen Cotyp s aus der Cotypenmenge von A.

Eine torsionsfreie abelsche Gruppe A des Ranges n mit $n^o(IT(A)) = n$, d.h. $IT(A) \in CT(A)$, bezitzt einen rationalen direkten Summanden vom Typ $IT(A)$, denn A besitzt in diesem Fall eine reine Corang-1-Untergruppe C mit $t(A/C) = IT(A)$. Mit dem Lemma von Baer [2, 86.5] ist dann C ein direkter Summand in A und $A = B \oplus C$ mit $t(A/C) = IT(A)$.

Eine torsionsfreie abelsche Gruppe A des Ranges n mit $n^u(OT(A)) = 1$, d.h. $OT(A) \in T(A)$, besitzt einen rationalen Quasi-Summanden vom Typ $OT(A)$, denn A besitzt in diesem Fall eine reine rationale Untergruppe B vom Typ $OT(A)$ und diese ist nach Lemma 14 ein Quasi-Summand.

Eine torsionsfreie abelsche Gruppe A des Ranges n, in der der äußere Typ $OT(A)$ als Typ realisiert ist, muß i.a. keinen rationalen direkten Summanden von diesem Typ besitzen, auch nicht, wenn A eine Jordan-Hölder-Gruppe ist, denn die Gruppe $A = \langle r^{-1}a, b, s^{-1}(a+c), p^{-\infty}(a+\alpha_p b), (pq)^{-\infty}c\rangle$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen r, s, p, q und p-adischer ganzer irrationaler Zahl α_p besitzt $\mathbf{Q}^{(p,q)}c$ als einzige reine rationale Untergruppe vom Typ $t(\mathbf{Q}^{(p,q)})$, diese ist jedoch kein direkter Summand, wie im Beispiel im Anschluß an Satz 6 bemerkt.

Satz 15. *Sei A eine Jordan-Hölder-Gruppe des Ranges n mit n paarweise verschiedenen Haupttypen $\{t_1, \dots, t_n\}$. Sei ferner t_i ein Haupttyp mit $n^u(t_i) = 1$ und $n^o(t_i) = n$. Dann besitzt A einen rationalen Quasi-Summanden B vom Typ t_i. Insbesondere tritt t_i an jeder beliebigen Stelle in einer Typenreihe von A auf.*

Beweis. Sei C eine Corang-1-Untergruppe von A mit dem zugehörigen Cotyp $t_i = t(A/C)$. Da $C \subset_* A$ wie A eine Jordan-Hölder-Gruppe ist, besitzt C die echt linear geordnete Typenreihe $\{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n\}$. Sei ferner $B \subset_* A$, $B \mathrel{\tilde{\subset}} \mathbf{Q}$ vom Typ t_i. Da der Typ t_i in keiner Typenreihe von C auftreten kann, folgt $B \cap C = 0$. Die Untergruppe $B \oplus C$ besitzt Torsionsquotienten in A und die gleiche Typenreihe $\{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n, t_i\}$ wie A. Somit ist $A/(B \oplus C)$ nach Proposition 2 endlich, und B ist schließlich ein Quasi-Summand in A. $\square$

Besitzen für eine Jordan-Hölder-Gruppe A des Ranges n mit n paarweise verschiedenen Haupttypen $\{t_1, \dots, t_n\}$ alle Haupttypen t_i die Eigenschaft $n^u(t_i) = 1$, so ist A eine vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppe, denn in diesem Fall ist jeder Haupttyp t_i schon ein Typ in der Typenmenge von A und diese besitzt aufgrund der echten linearen Ordnung die Mächtigkeit n. Somit ist A nach Korollar 9 vollständig zerlegbar. Die Voraussetzung "echt linear geordnet" ist jedoch notwendig, wie das Beispiel

$$A = \langle x_1, x_2, p^{-\infty}(x_1 + \alpha_p x_2)\rangle \oplus \mathbf{Z}x_3 \oplus \mathbf{Q}^{(p)}x_4$$

mit Primzahl p und p-adischer ganzer irrationaler Zahl α_p zeigt.

Im folgenden wird untersucht, inwieweit schon die Voraussetzung der Existenz einer (u.U. echt) absteigend linear geordneten Typenreihe genügt, um eine vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppe nachzuweisen, ohne die Jordan-Hölder-Eigenschaft vorauszusetzen. Für Butlergruppen und Gruppen mit einer absteigend linear geordneten idempotenten Typenreihe, d.h. einer absteigend linear geordneten Typenreihe mit nur idempotenten Typen, genügt schon die Existenz einer solchen Typenreihe. Zuvor wird für Butlergruppen ein Ergebnis nachgewiesen, wodurch sich der Beweis dieser Eigenschaft für Butlergruppen vereinfacht. Sowieso ist der Durchschnitt aller Typen einer Typenreihe einer torsionsfreien abelschen Gruppe endlichen Ranges größer oder gleich dem inneren Typ. Gleichheit muß nicht gelten, es existieren t-uniforme Gegenbeispiele wie z.B. die Gruppe B_1 vor Proposition 2. Für Butlergruppen allerdings gilt Gleichheit.

Lemma 16. *Für eine Butlergruppe A gleicht der Durchschnitt aller Typen einer Typenreihe dem inneren Typ. Die Vereinigung aller Typen einer Typenreihe einer Butlergruppe ergibt den äußeren Typ.*

Beweis. Man führt den Beweis durch Induktion über den Rang n. Für eine rationale Gruppe ist nichts zu zeigen. Sei nun die Behauptung schon für alle Butlergruppen des Ranges kleiner als n gezeigt und sei $0 = A_0 \subset_* A_1 \subset_* \ldots \subset_* A_{n-1} \subset_* A_n = A$ eine Kompositionsreihe von A mit der zugehörigen Typenreihe $\{t_1, \ldots, t_n\}$. Die reine Untergruppe A_{n-1} von A ist wieder eine Butlergruppe und nach Induktionsvoraussetzung gilt $\bigcap_{i=1}^{n-1} t_i = IT(A_{n-1})$. Weiter läßt sich A in der Form $A = A_{n-1} + \sum_{i=1}^{k} B_i$ schreiben mit reinen rationalen Untergruppen B_i von A und $B_i \cap A_{n-1} = 0$ für alle i. Es gilt nun $IT(A) = IT(A_{n-1}) \cap t(B_i)$ für alle i, da für eine maximal linear unabhängige Menge $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ aus A_{n-1} und $x_n \in B_i$ die Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine maximal linear unabhängige Menge aus A ist und somit nach [4, 1.1] $IT(A_{n-1}) \cap t(B_i) = (\bigcap_{i=1}^{n-1} t(x_i)) \cap t(x_n) = \bigcap_{i=1}^{n} t(x_i) = IT(A)$ folgt. Weiter ist $A/A_{n-1} = \sum_{i=1}^{k} (A_{n-1} \oplus B_i)/A_{n-1}$ und nach [4, Remark vor 2.1] somit $t_n = t(A_n/A_{n-1}) = \bigcup_{i=1}^{k} t(B_i)$. Schließlich folgt $t_n \cap (\bigcap_{i=1}^{n-1} t_i) = t_n \cap IT(A_{n-1}) = (\bigcup_{i=1}^{k} t(B_i)) \cap IT(A_{n-1}) = \bigcup_{i=1}^{k} (t(B_i) \cap IT(A_{n-1})) = IT(A)$. Der äußere Typ $OT(A)$ gleicht nach [4, 6.1] der Vereinigung $\bigcup\{t \mid t \in T\}$ aller Typen aus der Typenmenge von A. Mit [5, 2.2] und [4, 5.2] folgt schließlich $OT(A) = \bigcup\{t \mid t \in T\} \leq \bigcup_{i=1}^{n} t_i \leq \bigcup\{t \mid t\}$ ist Haupttyp $\} = OT(A)$. Folglich gleicht die Vereinigung aller Typen einer Typenreihe $\{t_1, \ldots, t_n\}$ dem äußeren Typ. $\square$

Das folgende Ergebnis ist bekannt [5, 3.4], allerdings läßt sich der Beweis mit Lemma 16 vereinfachen.

Korollar 17. *Eine t-uniforme Butlergruppe ist vollständig zerlegbar t-homogen und insbesondere eine t-homogene vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppe.*

Beweis. Sei B eine reine t-uniforme Corang-1-Untergruppe von A mit dem Cotyp t. Dann ist t nach Lemma 16 der innere Typ von A. Also ist B direkter Summand von A nach dem Lemma von Baer [2, 86.5] und A ergibt sich induktiv als vollständig zerlegbare t-homogene Gruppe. □

Die Eigenschaften $\bigcup\{t \mid t \in T\} = \bigcup_{i=1}^n t_i = OT(A)$ und $\bigcap_{i=1}^n t_i = IT(A)$ für eine endliche Typenmenge T und beliebige Typenreihen $\{t_1, \dots, t_n\}$ sind keine Charakterisierung für Butlergruppen, denn die Gruppe $\langle x_1, x_2, p^{-1}(x_1 + [\sqrt{p}]x_2)\rangle \oplus \mathcal{S}x_3$ besitzt die Typenmenge $\{t(\mathbf{Z}), t(\mathcal{S})\}$, die Cotypenmenge $\{t(\mathcal{S})\}$, den inneren Typ $t(\mathbf{Z})$, den äußeren Typ $t(\mathcal{S})$ und die beiden Typenreihen $\{t(\mathbf{Z}), t(\mathcal{S}), t(\mathcal{S})\}$ und $\{t(\mathcal{S}), t(\mathbf{Z}), t(\mathcal{S})\}$. Sie ist jedoch keine Butlergruppe.

Der folgende Satz charakterisiert Butlergruppen.

Satz 18. *Eine torsionsfreie abelsche Gruppe A endlichen Ranges mit einer endlichen Typenmenge ist genau dann eine Butlergruppe, wenn neben A auch jede reine Untergruppe B der Bedingung $\bigcup\{t \mid t \in T(B)\} = OT(B)$ genügt.*

Beweis. Eine Butlergruppe A genügt nach [4, 6.1] der gegebenen Bedingung. Ferner ist jede reine Untergruppe von A wieder eine Butlergruppe und die eine Richtung ist gezeigt. Um die andere Richtung zu zeigen, führt man den Beweis durch Induktion über den Rang n der torsionsfreien abelschen Gruppe A. Für rationale Gruppen ist nichts zu zeigen. Sei nun n der Rang von A und die Behauptung für alle Gruppen kleineren Ranges gezeigt. A enthält nach [1, 0.1 + 1.9] eine Butleruntergruppe C mit der gleichen endlichen Typenmenge T wie A und die Gruppen $A(s)/C(s)$ sind Torsionsgruppen für alle Typen s. Insbesondere ist somit A/C eine Torsionsgruppe und $C(t) = C \cap A(t)$ für alle Typen $t \in T$. Sofort folgt nun, daß C eine reguläre Untergruppe von A ist. Nach [4, 6.1] und der Voraussetzung des Satzes gilt $\bigcup\{t \mid t \in T\} = OT(C) = OT(A)$ und die Haupt- und insbesondere die Cotypenmenge von C ist endlich. Also ist nach [4, 2.6] der äußere Typ in C als Cotyp realisiert. Sei nun D eine reine Corang-1-Untergruppe von C mit dem Cotyp $t(C/D) = OT(C)$. Wegen $C/D \cong (C \cap A)/(C \cap D_*) \mathrel{\tilde{\subset}} A/D_*$ gilt $OT(A) \geq t(A/D_*) \geq t(C/D) = OT(C) = OT(A)$. Folglich ist $C/D \cong (D_*{+}C)/D_* \subset A/D_*$ von endlichem Index. Also $A \doteq C + D_*$. Die Gruppe D_* ist eine reine Untergruppe von A mit denselben Voraussetzungen wie A. Nach Induktionsvoraussetzung ist also D_* eine Butlergruppe, welche die reguläre Untergruppe D gleichen Ranges enthält. Nach [1, 1.10] ist D_*/D endlich. Die Gruppe A/C ist Erweiterung der endlichen Gruppe $A/(C + D_*)$ mit $(C + D_*)/C$. Letztere ist aber wegen $(C + D_*)/C \cong D_*/(C \cap D_*) = D_*/D$ endlich, und A/C ist als Erweiterung zweier endlicher Gruppen endlich. Schließlich ist A wie C eine Butlergruppe. □

Satz 19. *Eine Butlergruppe mit einer (nicht notwendig echt) absteigend linear geordneten Typenreihe ist eine vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppe.*

Beweis. Sei B eine reine Corang-1-Untergruppe der Butlergruppe A mit der absteigend linear geordneten Typenreihe $\{t_1, \ldots, t_{n-1}\}$ und dem Cotyp $t_n \leq t_{n-1}$. Nach Lemma 16 ist $t_n = IT(A)$, und B ist ein direkter Summand in A nach dem Lemma von Baer [2, 86.5]. Induktiv ergibt sich nun A als vollständig zerlegbare Gruppe mit linear geordneter Typenmenge, und diese ist nach Satz 7 eine Jordan-Hölder-Gruppe. □

Der folgende Satz zeigt, daß sich Satz 19 unter der Voraussetzung einer absteigend linear geordneten Typenreihe mit nur idempotenten Typen sogar auf (allgemeine) torsionsfreie abelsche Gruppen verallgemeinern läßt.

Satz 20. *Eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges mit einer (nicht notwendig echt) absteigend linear geordneten idempotenten Typenreihe ist eine vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppe.*

Beweis. Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges mit der absteigend linear geordneten idempotenten Typenreihe $\{t_1, \ldots, t_n\}$. Der Cotyp $t_n = t(A_n/A_{n-1})$ gleicht dem inneren Typ $IT(A)$. Sowieso ist nämlich $\bigcap_{i=1}^{n} t_i = t_n \geq IT(A)$. Für eine Primzahl p mit $(t_n)_p = \infty$ folgt aber nun $ST_p(A) = n\omega$, daher muß auch $(IT(A))_p = \infty$ gelten. Also gilt $IT(A) \geq IT(A) : IT(A) \geq t_n$, da t_n idempotent ist. Damit gilt $IT(A) = t_n$. Induktiv folgt nun wieder mit dem Lemma von Baer [2, 86.5] – wie im Beweis des vorigen Satzes –, daß A eine vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppe ist. □

Die Voraussetzung einer idempotenten Typenreihe im obigen Satz ist notwendig, denn die Gruppe $A = \langle x_1 \rangle \oplus \langle x_2, x_3, p^{-3}(x_3 + p^2 x_2) \mid p \text{ prim } \rangle \oplus \langle p^{-3}x_4 \mid p \text{ prim} \rangle$ bezitzt die zur Kompositionsreihe $0 \subset_* \langle x_4 \rangle \subset_* \langle x_4, x_3 \rangle \subset_* \langle x_4, x_3, x_2 \rangle \subset_* A$ zugehörige echt absteigend linear geordnete Typenreihe $\{3t(\mathcal{S}), 2t(\mathcal{S}), t(\mathcal{S}), t(\mathbf{Z})\}$. Sie ist offensichtlich nicht vollständig zerlegbar und auch keine Jordan-Hölder-Gruppe, da sie auch die zur Kompositionsreihe $0 \subset_* \langle x_1 \rangle \subset_* \langle x_1, x_2 \rangle \subset_* \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \subset_* A$ zugehörige Typenreihe $\{t(\mathbf{Z}), t(\mathbf{Z}), 3t(\mathcal{S}), 3t(\mathcal{S})\}$ besitzt. Die Gruppe A besitzt auch nicht die aufsteigend linear geordnete Typenreihe $\{t(\mathbf{Z}), t(\mathcal{S}), 2t(\mathcal{S}), 3t(\mathcal{S})\}$. Doch auch torsionsfreie abelsche Gruppen mit in beiden Richtungen linear geordneten Typenreihen müssen i.a. nicht vollständig zerlegbar, und auch keine Jordan-Hölder-Gruppen sein, wie das Beispiel der $t(\mathcal{S})$-uniformen, stark unzerlegbaren Gruppe $A = \langle x_1, x_2, p^{-2}(x_1 + px_2) \mid p \text{ prim} \rangle$ zeigt. Eine torsionsfreie abelsche Gruppe mit in beiden Richtungen linear geordneten Typenfolgen, in denen höchstens ein Typ unendlich oft auftritt, besitzt jedoch eine Quasi-Zerlegung in uniforme Gruppen. Hierfür kann sogar die Voraussetzung der linearen Ordnung abgeschwächt werden. Sei dazu $\{t_1, \ldots, t_k\}$ eine endliche Menge von paarweise verschiedenen Typen und $\{t_1^{n_1}, \ldots, t_k^{n_k}\}$ eine Typenfolge mit der

Eigenschaft, daß für alle i der Typ t_i ein maximales Element in der Menge $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_k\}$ ist. Besitzt nun eine torsionsfreie abelsche Gruppe A neben dieser Typenfolge auch noch die umgekehrte Typenfolge, so besitzt sie eine Quasi-Zerlegung in uniforme Gruppen, falls höchstens einer der Typen t_i unendlich oft auftritt. Der Index dieser Quasi-Zerlegung in der Gruppe A ist in der diesem Fall sogar endlich, wie die folgenden Sätze zeigen. Falls jedoch mehr als ein Typ unendlich oft auftritt, oder sogar unendlich viele paarweise verschiedene Typen in der obengenannten Typenfolge auftreten, so hat die Gruppe A diese Eigenschaft i.a. nicht mehr, wie die Beispiele in [5, Kapitel 4] zeigen.

Satz 21. *Sei $\{t_1^{n_1}, \dots, t_k^{n_k}\}$ eine Typenreihe einer torsionsfreien abelschen Gruppe A endlichen Ranges mit paarweise verschiedenen Typen t_i. Sei ferner D eine Untergruppe von A gleichen Ranges mit der umgekehrten Typenreihe. Ist nun entweder für alle $1 \leq i \leq k$ der Typ t_i maximal in der Menge $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_k\}$ oder für alle $1 \leq i \leq k$ maximal in der Menge $\{t_1, \dots, t_{i-1}, t_i\}$, so besitzt A eine Untergruppe $\oplus_{i=1}^k A_i$ von endlichem Index mit reinen t_i-uniformen Untergruppen A_i und der Quotient A/D ist endlich. Insbesondere besitzt A in diesem Fall alle Permutationen dieser Typenreihen als Typenreihen.*

Beweis. Sei im ersten Fall für alle i der Typ t_i maximal in der Menge $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_k\}$. Man führt den Beweis durch Induktion über die Anzahl k der verschiedenen Typen. Für $k = 1$ folgt die Behauptung sofort mit [5, 4.2]. Sei nun k die Anzahl der verschiedenen Typen und die Behauptung schon für alle Gruppen mit weniger als k verschiedenen Typen gezeigt. Sei B eine reine t_1-uniforme Untergruppe von A des Ranges n_1 und A/B besitze die Typenreihe $\{t_2^{n_2}, \dots, t_k^{n_k}\}$. Sei C eine reine Untergruppe von D mit der umgekehrten Typenreihe wie A/B und D/C sei t_1-uniform des Ranges n_1. Da t_1 maximal in der Menge $\{t_1, \dots, t_k\}$ ist, folgt $B \cap C = 0$ mit Lemma 12. Somit ist mit Induktionsvoraussetzung $C \cong (B \oplus C)/B \subset A/B$ von endlichem Index, also $A/(B \oplus C)$ endlich. Mit dem Dedekindschen Modulargesetz folgt nun $D/((B \cap D) \oplus C) = (A \cap D)/((B \oplus C) \cap D) \mathrel{\tilde{\subset}} A/(B \oplus C)$, also ist $B \cap D$ quasiisomorph zu D/C, also wie D/C eine t_1-uniforme Gruppe des Ranges n_1. Nach [5, 4.2] besitzt nun $B \cap D$ endlichen Index in B als t_1-uniforme Untergruppe gleichen Ranges wie B und der Quotient $A/((B \cap D) \oplus C)$ ist endlich als Erweiterung der endlichen Gruppen $A/(B \oplus C)$ und $(B \oplus C)/((B \cap D) \oplus C)$. Mit $(B \cap D) \oplus C \subset D$ folgt schließlich auch A/D endlich. Somit ist der erste Fall gezeigt.

Sei nun im umgekehrten Fall für alle i der Typ t_i maximal in der Menge $\{t_1, \dots, t_i\}$. Man führt den Beweis wieder durch Induktion über die Anzahl k der verschiedenen Typen. Für $k = 1$ folgt die Behauptung sofort mit [5, 4.2]. Sei nun k die Anzahl der verschiedenen Typen und die Behauptung schon für alle Gruppen mit weniger als k verschiedenen Typen gezeigt. Sei B eine reine t_k-uniforme Untergruppe von D des Ranges n_k und D/B besitze die Typenreihe $\{t_{k-1}^{n_{k-1}}, \dots, t_1^{n_1}\}$. Sei weiter C eine reine Untergruppe von A mit der umgekehrten Typenreihe wie D/B und A/C sei t_k-uniform des Ranges n_k. Da t_k maximal in der Menge $\{t_1, \dots, t_k\}$ ist, folgt $B \cap C = 0$ mit Lemma 12. Somit ist $B \cong (B \oplus C)/C \subset (B_* \oplus C)/C \subset A/C$ jeweils von endlichem Index, da B und A/C beide t_k-uniforme Gruppen gleichen Ranges sind. Insbesondere ist somit $B_* \oplus C \doteq A$ und B_*/B ist endlich, also ist auch B_* eine t_k-uniforme Gruppe des Ranges n_k und C ist quasiisomorph zu A/B_*, also besitzt A/B_* wie C die Typenreihe $\{t_1^{n_1}, \dots, t_{k-1}^{n_{k-1}}\}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist nun $D/B \cong (D + B_*)/B_* \subset A/B_*$ von endlichem Index, also $A \doteq B_* + D$, und A/B_* und C sind wieder nach Induktionsvoraussetzung beide quasizerlegbar in t_i-uniforme Gruppen. Somit ist auch $A \doteq B_* \oplus C$ quasizerlegbar in t_i-uniforme Gruppen. Die Gruppe A/D ist Erweiterung der endlichen Gruppe $A/(B_* + D)$ mit $(B_* + D)/D$. Letztere ist aber wegen $(B_* + D)/D \cong B_*(D \cap B_*) = B_*/B$ endlich und A/D ist als Erweiterung zweier endlicher Gruppen endlich. □

Satz 22. *Seien $\{t_1^{n_1}, \dots, t_k^{n_k}\}$ und $\{t_k^{n_k}, \dots, t_1^{n_1}\}$ Typenfolgen einer torsionsfreien abelschen Gruppe A, wobei für $1 \le i \le k$ der Typ t_i maximal in der Menge $\{t_i, \dots, t_k\}$ ist, die Typen t_i paarweise verschieden sind und höchstens eine der Zahlen n_i unendlich ist. Dann besitzt A eine Untergruppe $\oplus_{i=1}^k A_i$ von endlichem Index, wobei die A_i reine t_i-uniforme Untergruppen des Ranges n_i sind. Insbesondere besitzt A in diesem Fall alle Permutationen dieser Typenfolgen als Typenfolgen.*

Beweis. Sei B eine reine t_k-uniforme Untergruppe des Ranges n_k derart, daß A/B die Typenfolge $\{t_{k-1}^{n_{k-1}}, \dots, t_1^{n_1}\}$ besitzt. Sei C eine reine Untergruppe von A mit der Typenfolge $\{t_1^{n_1}, \dots, t_{k-1}^{n_{k-1}}\}$ und A/C sei t_k-uniform des Ranges n_k. Nach Lemma 12 ist $B \cap C = 0$. Besitzt B endlichen Rang, so ist $B \cong (B \oplus C)/C \subset A/C$ von endlichem Index nach [5, 4.2], da B und A/C beide t_k-uniforme Gruppen des gleichen endlichen Ranges sind. Somit ist in diesem Fall $B \oplus C \doteq A$. Besitzt B unendlichen Rang, so ist A/B von endlichem Rang mit der Typenreihe $\{t_{k-1}^{n_{k-1}}, \dots, t_1^{n_1}\}$. Ferner ist $C \cong (B \oplus C)/B \subset A/B$ mit Torsionsquotienten und C hat die Typenreihe $\{t_1^{n_1}, \dots, t_{k-1}^{n_{k-1}}\}$. Nach Satz 21 ist nun $C \mathrel{\tilde{\subset}} A/B$ von endlichem Index und auch in diesem Fall gilt $B \oplus C \doteq A$. Sukzessive lassen sich nun t_i-uniforme Untergruppen A_i des Ranges n_i abspalten, und A besitzt schließlich die Untergruppe $A_k \oplus \ldots \oplus A_1$ von endlichem Index. □

Korollar 23. *Eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges mit den echt linear geordneten Typenreihen $\{t_1, \dots, t_n\}$ und $\{t_n, \dots, t_1\}$ ist eine vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppe.*

Beweis. Eine Gruppe A mit diesen Eigenschaften ist nach Satz 21 fast vollständig zerlegbar und besitzt die absteigend linear geordnete Typenreihe $\{t_n, \dots, t_1\}$. Somit ist sie nach Satz 19 eine vollständig zerlegbare Jordan-Hölder-Gruppe. □

Korollar 24. *Eine Butlergruppe mit den Typenreihen* $\{t_1^{n_1}, \ldots, t_k^{n_k}\}$ *und* $\{t_k^{n_k}, \ldots, t_1^{n_1}\}$*, wobei für* $1 \leq i \leq k$ *der Typ* t_i *maximal der Menge* $\{t_i, \ldots, t_k\}$ *ist und die Typen* t_i *paarweise verschieden sind, ist fast vollständig zerlegbar.*

Beweis. Eine Butlergruppe mit den angegebenen Typenreihen besitzt nach Satz 21 eine Quasi-Zerlegung in t_i-uniforme Butlergruppen und diese sind nach Korollar 17 vollständig zerlegbar t_i-homogen. □

Korollar 25. *Seien* $\{t_1^{n_1}, \ldots, t_k^{n_k}\}$ *und* $\{t_k^{n_k}, \ldots, t_1^{n_1}\}$ *idempotente Typenfolgen einer torsionsfreien abelschen Gruppe* A *mit paarweise verschiedenen Typen* t_i*. Sei für* $1 \leq i \leq k$ *der Typ* t_i *maximal in der Menge* $\{t_i, \ldots, t_k\}$ *und höchstens einer der Typen* t_i *trete unendlich oft auf. Dann ist* A *fast vollständig zerlegbar.*

Beweis. Eine Gruppe mit den angegebenen Typenfolgen besitzt nach Satz 22 eine Quasi-Zerlegung in t_i-uniforme Gruppen und diese sind nach [5, 2.3] vollständig zerlegbar t_i-homogen. □

Butlergruppen jedoch mit einer (sogar idempotenten) Typenreihe $\{t_1^{n_1}, \ldots, t_k^{n_k}\}$ und der Eigenschaft, daß für alle $1 \leq i \leq k$ der Typ t_i ein maximales Element in $\{t_i, \ldots, t_k\}$ ist, sind i.a. nicht fast vollständig zerlegbar, wie das Beispiel $A = \mathbf{Q}^{(p)}a + \mathbf{Q}^{(r)}(a+b) + \mathbf{Q}^{(q)}b$ zeigt.

Literaturverzeichnis

[1] D. M. Arnold, Pure subgroups of finite rank completely decomposable groups, *Lecture Notes in Mathematics* **874** (1981), 1–31.

[2] L. Fuchs, Infinite abelian groups $I + II$, *Academic Press* (1970, 1973).

[3] O. Mutzbauer, Type graph, *Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics* **1006** (1983), 228–252.

[4] O. Mutzbauer, Type Invariants of torsion-free abelian groups, Abelian Group Theory, Proceedings, Perth, *Contemporary Mathematics* **87** (1989), 133–154.

[5] O. Mutzbauer, Type-radicals and quasi-decompositions of torsion-free abelian groups, *J. Austral. Math. Soc.* (Series A) **52** (1992), 279–288.

[6] E. Müller and O. Mutzbauer, Regularität in torsionsfreien abelschen Gruppen, *Czech. Math. J.* **42** (1992), 279–288.

[7] P. Schultz, The typeset and cotypeset of a rank 2 abelian group, *Pac. J. Math.* **78** (1978), 503–517.

EDGAR MÜLLER
OTTO MUTZBAUER
MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT WÜRZBURG
AM HUBLAND
8700 WÜRZBURG
DEUTSCHLAND

(Received November 20, 1991)