Publ. Math. Debrecen
68/1-2 (2006), 25–36

Mesure de Mahler d'une famille de polynômes de deux variables

By SANA BOUGHZALA (Tunis)

Abstract. Le but de cet article est l'étude de la mesure de Mahler logarithmique de la famille de polynômes

$$P_s = (x^2 + x - 1)y^2 - sxy - x^2 + x + 1.$$

En particulier, l'expression de $m(P_{2\sqrt{5}})$ en fonction de $Li_2(\chi, \phi)$, pour ϕ inverse du nombre d'or et χ le caractère de Dirichlet impair de conducteur 4, nous permettra d'obtenir deux expressions intégrales de $Li_2(\chi, \phi)$.

1. Introduction

Introduite par Mahler (1962) [B3], [M] pour mesurer la taille des différents facteurs d'un polynôme, la mesure de Mahler d'un polynôme P de deux variables, à coefficients complexes, est définie par $M(P) = \exp(m(P))$, où $m(P)$ est appelée la mesure de Mahler logarithmique de P et a pour valeur

$$m(P) = \int_0^1 \int_0^1 \log |P(e^{2i\pi t_1}, e^{2i\pi t_2})| dt_1 dt_2.$$

Mathematics Subject Classification: 11R06, 11R42, 11M06.
Key words and phrases: mesure de Mahler logarithmique, dilogarithme, equation de Picard–Fuchs, fonction hypergéométrique.

Remarque 1. Si P désigne un polynôme d'une seule variable, donné par $P(X) = a_n \prod_{j=1}^{n}(X - \alpha_j)$, on a

$$M(P) = |a_n| \prod_{j=1}^{n} \max(|\alpha_j|, 1)$$

grâce à la formule de Jensen.

Les plus petites mesures connues de polynômes de deux variables à coefficients entiers sont

$$m(X^2Y + X(Y^2 + Y + 1) + Y) = .25133304\ldots \stackrel{?}{=} L'(E_{15}, 0)$$
$$m(X^2(Y^2 + 1) + X(Y^2 + Y + 1) + Y + 1) = .22748122\ldots \stackrel{?}{=} L'(E_{14}, 0).$$

Elles sont obtenues pour des polynômes réciproques [B1], [B3], polynômes $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$ vérifiant $P(X, Y) = \pm X^a Y^b P(1/X, 1/Y)$ pour a et $b \in \mathbb{Z}$. Ici E_{15} (resp. E_{14}) désigne la courbe elliptique de conducteur 15 (resp. 14) dont le modèle affine est $X^2Y + X(Y^2 + Y + 1) + Y = 0$ (resp. $X^2(Y^2 + 1) + X(Y^2 + Y + 1) + Y + 1 = 0$), $L(E_N, s)$ désignant la fonction L de la courbe elliptique E_N ($N = 15$ ou $N = 14$) et $L'(E_N, 0) = \frac{N}{4\pi^2} L(E_N, 2)$.

La plus petite mesure connue de polynôme de deux variables non réciproque a été calculée par Smyth [B2], [S2] et vaut

$$m(1 + X + Y) = .323061\cdots = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} L(\chi_{-3}, 2),$$

où χ_{-3} désigne le caractère de Dirichlet réel impair de conducteur 3 et défini par $\chi_{-3}(n) = \left(\frac{-3}{n}\right)$.

Ces différents types de formules explicites pour des polynômes de deux variables définissant des courbes de genre inférieur ou égal à un, sont maintenant bien connus, parfois conjecturalement, lorsque le polygone de Newton associé a des faces de mesure logarithmique nulle et lorsque le polynôme $P(X, Y)$ vérifie une condition géométrique [B3].

Le polygone de Newton d'un polynôme de Laurent donné par $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble des points (i, j) du plan pour lesquels $a_{i,j} \neq 0$. Une face du polygone de Newton est son intersection avec un de ses hyperplans d'appui et la mesure de la face est celle du polynôme associé.

Par contre dans le cas où la mesure logarithmique des faces n'est pas nulle, on ne connait pas pour le moment de telles formules explicites même conjecturalement. Dans cet article nous allons considérer une famille de courbes de genre un paramétrées par un réel s telle que le polygone de Newton associé ait des faces de mesure non nulle, associée à la famille de polynômes $P_s(x,y) = (x^2+x-1)y^2 - sxy - x^2 + x + 1$ [B3].

On commencera par le calcul de la mesure de Mahler des polynômes correspondant aux courbes singulières de cette famille. Ensuite, on montrera que la dérivée de la mesure par rapport à s est proportionnelle à une période de la courbe elliptique associée et on donnera l'équation de Picard–Fuchs vérifiée par les périodes. Enfin, on exprimera sous forme d'intégrales les valeurs du dilogarithme tordu par le caractère χ en la valeur de l'entier algébrique $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\int_0^1 F(k^2)\frac{kdk}{\sqrt{4k^2+1}} = \frac{\pi}{2}Li_2(\chi,\phi)$$

$$\int_0^1 (F(k^2)-1)\frac{dk}{k\sqrt{4+k^2}} = -\frac{2}{\pi}Li_2(\chi,\phi) + \frac{1}{2}\log(\phi+2)$$

où F désigne la fonction hypergéométrique définie par $F(z) = F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,z)$.

2. Etude d'une famille de polynômes réciproques dépendant d'un paramètre

On considère la famille de polynômes réciproques suivante

$$P_s(x,y) = (x^2+x-1)y^2 - sxy - x^2 + x + 1,$$

avec s un paramètre réel, dont le polygone de Newton est le carré de sommets $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ et $(2,2)$. Les faces de P_s sont les polynômes $(x^2+x-1)y^2$ et $-x^2+x+1$ de mesure de Mahler logarithmique égale à $\log(\sqrt{5}+1)/2$, ainsi que les polynômes $(y^2-1)x^2$ et $1-y^2$ de mesure de Mahler logarithmique nulle.

2.1. Mesure des polynômes correspondant aux courbes singulières de la famille. La courbe d'équation $P_s(x,y) = 0$ est birationnellement équivalente à la courbe elliptique $E_s : S^2 = T(T-(s^2-4))(T-(s^2-20))$.

Son discriminant est égal à $16^2(s^2-4)^2(s^2-20)^2$ et les courbes singulières de la famille E_s sont obtenues pour les valeurs $s = \pm 2\sqrt{5}$ et $s = \pm 2$.

En fait, il suffit de considérer le cas $s \geq 0$ car $P_{-s}(x,y) = P_s(x,-y)$ et si P est un polynôme de deux variables, on a $m(P(x,y)) = m(P(x,-y))$.

On vérifie facilement que les polynômes $P_s(x,y)$ ne s'annulent pas sur le tore $\mathbb{T}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2\,;\, |x| = |y| = 1\}$ pour $s^2 > 20$. On se propose de calculer la mesure du polynôme $P_s(x,y) = (x^2+x-1)y^2 - sxy - x^2 + x + 1$, pour $0 < s \leq 2$ et $s = 2\sqrt{5}$.

Notation 2. Dans la suite, on notera

$$m(s) = m(P_s), \quad \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

χ le caractère de Dirichlet défini par

$$\chi(n) = 1 \text{ si } n \equiv 1[4], \quad \chi(n) = 0 \text{ si } n \equiv 0[2] \quad \text{et}$$
$$\chi(n) = -1 \text{ si } n \equiv 3[4]$$

et $Li_2(\chi, z)$ le dilogarithme donné par

$$Li_2(\chi, z) = \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n^2} z^n.$$

Théorème 3. *Si* $0 < s \leq 2$, *alors*

$$m(s) = -\log \phi.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} m(s) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |P_s(x,y)| d\varphi d\psi \quad \text{avec } x = e^{i\varphi} \text{ et } y = e^{i\psi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m(P_{s,\varphi}) d\varphi. \end{aligned}$$

avec $P_{s,\varphi}(y) = (2i\sin\varphi + 1)y^2 - sy - 2i\sin\varphi + 1$.

Si $Y_{s,1}(\varphi)$ et $Y_{s,2}(\varphi)$ sont les zéros de $P_{s,\varphi}$,

$$m(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|2i\sin\varphi + 1| \prod_{j=1}^{2} \max(|Y_{s,j}|, 1)d\varphi. \tag{1}$$

Or

$$Y_{s,1}(\varphi) = \frac{y_{s,1}(\varphi)}{2i\sin\varphi + 1} \quad \text{et}$$

$$Y_{s,2}(\varphi) = \frac{y_{s,2}(\varphi)}{2i\sin\varphi + 1}$$

avec

$$y_{s,1}(\varphi) = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4 - 16\sin^2\varphi}}{2} \qquad \text{et}$$

$$y_{s,2}(\varphi) = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4 - 16\sin^2\varphi}}{2}.$$

Donc pour $0 < s \leq 2$, on a $m(s) = m(x^2 + x - 1) = -\log\phi$. □

Théorème 4. *Si $s = 2\sqrt{5}$, alors*

$$m(s) = -\log\phi + \frac{4}{\pi}Li_2(\chi, \phi).$$

Démonstration. On suppose que $s = 2\sqrt{5}$.

On pose $A(x) = x^2 + x - 1$, $P_1(x, y) = y(x^2 + x - 1) + x^2 - x\sqrt{5} + 1$ et $P_2(x, y) = y(x^2 + x - 1) - x^2 - x\sqrt{5} - 1$.

On a $AP_s = P_1P_2$, et $m(2\sqrt{5}\,) = m(AP_s) - m(A) = m(P_1) + m(P_2) - m(A)$.

Or

$$m(P_1) = m(A) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \log\max\left|\frac{x^2 - x\sqrt{5} + 1}{x^2 + x - 1}\right| dt, \text{ avec } x = e^{it}$$

$$= m(A) + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \log\left|\frac{2e^{it} - \sqrt{5} - 1}{2e^{it} + \sqrt{5} + 1}\right| dt.$$

De même

$$m(P_2) = m(A) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \log\left|\frac{2e^{it}+\sqrt{5}-1}{2e^{it}-\sqrt{5}+1}\right| dt;$$

d'où

$$m\big(2\sqrt{5}\,\big) - m(A) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \log|1+\phi e^{-it}|dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \log|1-\phi e^{-it}|dt.$$

Or $m(A) = -\log\phi$, d'où

$$\begin{aligned} m(2\sqrt{5}) + \log\phi &= \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}[\phi^n - (-\phi)^n]\,\mathrm{Re}\int_0^{\pi/2} e^{-int}dt \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)}{n^2}\phi^n. \end{aligned}$$

□

2.2. Etude de la dérivée de la mesure. Soient $m(s) = m(P_s)$ et $D_s(x) = 4x^4 + (s^2-12)x^2 + 4$ le discriminant de $P_s(x,y)$ considéré comme polynôme en y.

Proposition 5. *Soit $m'(s) = \frac{dm}{ds}$ On définit K par*

$$K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-X^2)(1-k^2X^2)}}\,dX.$$

Si $0 < s < 2$, alors $m'(s) = 0$.
Si $2 < s < 2\sqrt{5}$, $m'(s) = \frac{1}{2\pi}K(\frac{s^2-4}{16})$.
Si $s > 2\sqrt{5}$, $\pi i m'$ est une période de la courbe elliptique E_s.

Preuve. Si $0 < s \leq 2$, alors $m(s) = -\log\phi$ (d'après le Théorème 3) donc $m'(s) = 0$.

Si $2 < s < 2\sqrt{5}$ et en utilisant l'expression (1) de $m(s)$, calculée dans la preuve du Théorème 3, on trouve

$$m(s) = \frac{1}{\pi}\left[2\int_0^{\alpha} \log|y_{s,1}(\varphi)|d\varphi + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \log|2i\sin\varphi + 1|d\varphi\right]$$

avec

$$y_{s,1}(\varphi) = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4 - 16\sin^2\varphi}}{2},$$

$$y_{s,2}(\varphi) = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4 - 16\sin^2\varphi}}{2}.$$

et $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{s^2-4}}{4}$.

Donc la mesure de P_s est dérivable et on a :

$$\pi m'(s) = 2\int_0^\alpha \frac{y'_{s,1}}{y_{s,1}}\, d\varphi = 2\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{s^2 - 4 - 16\sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

Posant alors $X = \frac{4\sin\varphi}{\sqrt{s^2-4}}$ et $k^2 = \frac{s^2-4}{16}$, on obtient,

$$2\pi m'(s) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-X^2)(1-k^2X^2)}}\, dX = K.$$

Si $s > 2\sqrt{5}$, la fonction P_s ne s'annule pas sur le tore et $\log P_s$ est une fonction analytique de s et on a $m'(s) = \operatorname{Re} \frac{d\widetilde{m}}{ds}$, avec $\widetilde{m}$ la fonction définie par

$$\widetilde{m}(s) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(P_s(e^{it_1}, e^{it_2}))dt_1 dt_2.$$

D'où

$$\begin{aligned} m'(s) &= -\frac{1}{4\pi^2}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{T}_2} \frac{P'_s(x,y)}{P_s(x,y)}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}_2} \frac{1}{s - \left(xy + \frac{1}{xy} - (\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) + (y + \frac{1}{y})\right)}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y} \end{aligned}$$

le résultat découle du théorème des résidus de Poincaré. On peut le faire aussi par un calcul direct. □

Or les périodes des différentielles de première espèce sur la surface de Riemann compacte associée à E_s vérifient une équation différentielle linéaire du second degré donnée par la connexion de Gauss–Manin et appelée équation de Picard–Fuchs

$$\Omega'' + P\Omega' + Q\Omega = 0$$

où P et Q sont des fractions rationnelles en s.

On détermine l'équation vérifiée par $m'(s)$ à l'aide d'un programme [Bou] qui permet d'obtenir directement le système de Picard–Fuchs associé à une quartique réciproque sans passer par son modèle de Weierstrass.

On obtient donc l'équation différentielle

$$s(s^2-4)(s^2-20)\omega''(s)+(3s^4-24s^2-80)\omega'(s)+s^3\omega(s)=0$$

En posant $v=(s^2-4)/16$ et $h(v)=\omega(s)$, on retrouve l'équation hypergéométrique du quart de période

$$v(1-v)h''(v)+(1-2v)h'(v)-\frac{1}{4}h(v)=0, \tag{2}$$

dont les solutions fondamentales au voisinage de l'infini sont $t^{1/2}F(t)$, $t^{1/2}L(t)$, avec F la série hypergéométrique

$$F(z)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 z+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 z^2+\dots$$

et $L(z)=F(z)\log z+I(z)$, où I est une série, à coefficients réels, convergente pour $|z|<1$.

Donc la solution régulière de l'équation différentielle associée à la famille E_s pour $s^2\geq 20$ est égale à

$$\frac{4}{\sqrt{s^2-4}}F\left(\frac{16}{s^2-4}\right)=\frac{4}{s}\left(1+\frac{6}{s^2}+\dots\right).$$

Si $s^2\geq 20$, on a

$$\begin{aligned}
m'(s)&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{s(1-2\frac{\cos t_1-2\sin t_1\sin t_2}{s})}dt_1dt_2\\
&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{s}\sum_{n\geq 0}\left(2\frac{\cos t_1-2\sin t_1\sin t_2}{s}\right)^n dt_1dt_2\\
&=\frac{1}{s}\left(1+\frac{6}{s^2}+\dots\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$m(s)=\log s+\varepsilon(s),\quad \text{avec}\quad \varepsilon(s)=-\frac{3}{s^2}+O\left(\frac{1}{s^4}\right).$$

En identifiant la solution régulière de l'équation de Picard–Fuchs avec m', on trouve le lemme suivant

Lemme 6. *Si $s > s_0 = 2\sqrt{5}$, alors*

$$m'(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2-4}} F\left(\frac{16}{s^2-4}\right). \tag{3}$$

Ce lemme permet par intégration et passage à la limite d'établir le Théorème 7.

Théorème 7. *Une représentation intégrale de la valeur en l'entier algébrique ϕ du dilogarithme tordu par le caractère χ est donnée par la formule*

$$2\int_0^1 (F(k^2)-1)\frac{dk}{k\sqrt{4+k^2}} = -\frac{4}{\pi} Li_2(\chi, \phi) + \log(\phi+2).$$

Démonstration. Soit $s > s_0 = 2\sqrt{5}$. En intégrant entre s_0 et s, il vient

$$m(s) - m(s_0) = \int_{s_0}^{s} \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} F\left(\frac{16}{x^2-4}\right) dx,$$

d'où

$$m(s) + \log\phi - \frac{4}{\pi} Li_2(\chi, \phi) = 2\int_{4/\sqrt{s^2-4}}^{1} F(k^2)\frac{dk}{k\sqrt{4+k^2}},$$

On va maintenant faire tendre s vers l'infini dans la formule précedente. Ecrivons le membre de droite sous la forme

$$2\int_{4/\sqrt{s^2-4}}^{1} (F(k^2)-1)\frac{dk}{k\sqrt{4+k^2}} + \int_{4/\sqrt{s^2-4}}^{1} \frac{2dk}{k\sqrt{4+k^2}}.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{4/\sqrt{s^2-4}}^{1} \frac{2dk}{k\sqrt{4+k^2}} &= \int_{2s/\sqrt{s^2-4}}^{\sqrt{5}} \frac{2du}{u^2-4} \\ &= \log\frac{s+\sqrt{s^2-4}}{2(\sqrt{5}+2)}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} m(s) &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}_2} \log |s - xy - 1/xy + x/y + y/x - (y + 1/y)| \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \\ &= \log s + \varepsilon(s). \end{aligned}$$

En faisant tendre s vers l'infini, et puisque $\lim_{s\to\infty} \varepsilon(s) = 0$, on obtient

$$2 \int_0^1 (F(k^2) - 1) \frac{dk}{k\sqrt{4 + k^2}} = \log(\phi + 2) - \frac{4}{\pi} Li_2(\chi, \phi). \qquad \square$$

La Proposition 5 va nous permettre de montrer le théorème suivant :

Théorème 8. *Sous les hypothèses du Théorème 7, on a*

$$Li_2(\chi, \phi) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 F(k^2) \frac{kdk}{\sqrt{4k^2 + 1}}.$$

Preuve. Soit s est un réel tel que $2 < s < 2\sqrt{5}$. D'après la Proposition 5, et puisque $F = \frac{2}{\pi}K$, on a

$$m'(s) = \frac{1}{4} F\left(\frac{s^2 - 4}{16}\right).$$

Posant $z = \frac{s^2-4}{16}$, après intégration entre 2 et $2\sqrt{5}$ il vient

$$m(2\sqrt{5}) = m(2) + \frac{1}{4} \int_0^1 F(z) \frac{4dz}{\sqrt{4z + 1}}.$$

D'où

$$Li_2(\chi, \phi) = \frac{\pi}{4} \int_0^1 F(z) \frac{dz}{\sqrt{4z + 1}}. \tag{4}$$

$\square$

Remarque 9. On obtient des formules plus générales en étudiant la famille de polynômes

$$P_{s,l_0}(x, y) = (x^2 + l_0 x - 1)y^2 - sxy - x^2 + l_0 x + 1,$$

avec s un paramètre réel et l_0 un entier fixé.

En effet, pour $l_0 \in \mathbb{Z}$, $s_0 = \sqrt{4l_0^2 + 16}$ et $\phi_0 = \left(\sqrt{l_0^2+4} - l_0\right)/2$, on peut exprimer la mesure du polynôme $P_{s_0,l_0}(x,y)$ en fonction de $Li_2(\chi, \phi_0)$

$$m(P_{s_0,l_0}) = -\log \phi_0 + \frac{4}{\pi} Li_2(\chi, \phi_0),$$

ce qui nous permet de donner deux expressions intégrales de $Li_2(\chi, \phi_0)$:

$$\int_0^1 F(k^2) \frac{kdk}{\sqrt{4k^2 + l_0^2}} = \frac{\pi}{2} Li_2(\chi, \phi_0),$$

$$\int_0^1 (F(k^2) - 1) \frac{dk}{k\sqrt{4 + l_0^2 k^2}} = -\frac{2}{\pi} Li_2(\chi, \phi_0) + \frac{1}{2} \log \phi_0 \Big(\sqrt{l_0^2 + 4} + 2 \Big).$$

Ces formules généralisent deux formules connues dans le cas où $l_0 = 0$ [Bor], [By].

$$\int_0^1 K dk = 2G$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(K - \frac{\pi}{2} \right) \frac{dk}{k} = \log 2 - \frac{2}{\pi} G,$$

avec $K = \frac{\pi}{2} F(k^2)$ et $G = Li_2(\chi, 1) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots$ constante de Catalan.

Références

[B1] D. W. Boyd, Variation on a theme of Kronecker, *Canad. Math. Bull.* **21** (1978), 129–133.

[B2] D. W. Boyd, Speculations concerning the range of Mahler's measure, *Canad. Math. Bull.* **24** (1981), 453–469.

[B3] D. W. Boyd, Mahler's Measure and Special Values of L-functions, *Experimental Mathematics* **7** (1998), 37–82.

[Bor] J. Borwein and P. Borwein, *Pi and the AGM, J. Wiley and Sons* (1986).

[Bou] S. Boughzala, Mesure de Mahler de polynômes de deux variables, Vol. VI, *Thèse de Doctorat de l'Université Paris*, Décembre 2000.

[By] P. F. Byrd and M. D. Friedman, Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, *Springer-Verlag*, 1954.

[M] K. Mahler, On some inequalities for polynomials in several variables, *J. London Math. Soc.* **37** (1962), 341–344.

[S1] C. J. Smyth, A Kronecker-type theorem for complex polynomials in several variables, *Canad. Math. Bull.* **24 :4** (1981), 447–452.

[S2] C. J. Smyth, On measures of polynomials in several variables, *Bull. Austral. Math. Soc* **23 :1** (1981), 49–63.

SANA BOUGHZALA
INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ET DE TECHNOLOGIE (INSAT)
CENTRE URBAIN NORD
BP N° 676 – 1080 TUNIS CEDEX
TUNISIE

E-mail: Sana.Hafsa@ipeim.rnu.tn

(Received May 15, 2003; revised May 8, 2004)