Publ. Math. Debrecen
54 / 1-2 (1999), 189–205

Schall- und Brechungsfronten an ebenen Kurven

Von HANS SACHS (Leoben) und G. KARÁNÉ (Leoben)

Abstract. In applied acoustic or optics the following problem is very important: Given a plane curve c, a sound resp. light point S and a time component L_0. If every sonic or light ray is reflected or refracted on c in such a way, that holds $\overline{SP}+\overline{PY_1}=L_0$ (P is a point of c) resp. $\overline{SP}+\overline{PY_2}=L_0$, the set of points Y_1 resp. Y_2 define a curve $\tilde{c}_1$ resp. $\tilde{c}_2$, called the reflective curve (sonic wave front) resp. the refractive curve of c with respect to the centre S an the time component L_0. At first we derive parametric representations of $\tilde{c}_1$ resp. $\tilde{c}_2$ in connection with the first and second central curve k_1 resp. k_2. We show that k_2 is the counter-point curve of the point S with regard to the evolute c^* of c. We investigate the corresponding catacaustic h and give a geometrical construction of the contact point of h with the reflected ray, if the point S and the pedal curve with regard to the reflected rays are known. Furthermore we give a kinematical generation of the refractive curves $\tilde{c}_2$, using the second central curve k_2 and the catacaustic h. Finally we investigate – as an application – the special cases, if c is a straight line (in this case the curves $\tilde{c}_2$ are conchoids of NIKOMEDES) or a circle (in this case the curves $\tilde{c}_2$ are rather complicated, the catacaustic h is the evolute of a PASCAL limacon).

Bei verschiedenen Anwendungen in der Akustik oder Optik ist das folgende Problem von großer Bedeutung: Gegeben ist eine *ebene Kurve* c, eine *Schall-* bzw. *Lichtquelle* S und eine *Zeitkomponente* L_0. Jeder von S ausgehende Schall- bzw. Lichtstrahl wird dann an der Kurve c so reflektiert, daß der Winkel ω zwischen der Geraden SP und der Kurvennormalen n gleich dem Winkel zwischen n und dem reflektierten Strahl PY_1 bzw. dem gebrochenen Strahl PY_2 ist (vgl. Abbildung 1). Wird dann die konstante

Mathematics Subject Classification: 53A04, 78A99.
Key words and phrases: reflections and refractions with respect to plane curves, first and second central curve, refractive curves, catacaustic, pedal curve with regard to the reflected rays, refractive curves with respect to a straight line or a circle.

Länge L_0 von S aus so abgetragen, daß $\overline{SP} + \overline{PY_1} = L_0$ bzw. $\overline{SP} + \overline{PY_2} = L_0$ gilt, so wird damit eindeutig ein Punkt Y_1 bzw. Y_2 definiert. Ist im Punkt $P \in c$ die Krümmung κ der Kurve c negativ (vgl. Abbildung 1), dann liegt Y_1 auf dem negativen Ufer der Tangente t in P, während Y_2 auf dem positven Ufer liegt (vgl. [4, 27f]), falls S auf dem negativen Ufer von t liegt. Liegt S auf dem positiven Ufer von t, dann ist die Situation gerade umgekehrt. Eine analoge Aussage gilt für $\kappa > 0$.

Abbildung 1.

Die Punkte Y_1 bzw. Y_2 bilden bei Veränderung des Punktes P (und so des Schallstrahls SP) eine Kurve $\tilde{c}_1$ bzw. $\tilde{c}_2$, die man als *Schallfront* (vgl. [8], [9]) bzw. *Brechungsfront* zur Länge L_0 bezüglich S und der Kurve c bezeichnet. Wird c um eine Achse a gedreht, auf der S liegt, so entsteht eine Drehfläche Ψ und durch Drehung von $\tilde{c}_1$ entsteht die zugehörige Schallfläche $\tilde{\Psi}_1$, die in der Bauakustik eine wichtige Rolle spielt (vgl. [1], [2], [5]–[7], [11]).

Wir verwenden gemäß Abbildung 1 ein kartesisches Koordinatensystem $\{U; x, y\}$, in dem der Punkt S die Koordinaten $S(a, b)$ besitzt und die Ausgangskurve c durch die Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \{x(t), y(t)\} \tag{1}$$

beschrieben wird. Wir benützen weiter den Tangenteneinheitsvektor $\vec{t}$ und den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$, der Kurve c, d.h.

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \{\dot{x}, \dot{y}\}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \{-\dot{y}, \dot{x}\}, \tag{2}$$

sowie den Einheitsvektor $\vec{v}$ der Richtung $\overrightarrow{SP}$, d.h. den Vektor

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \ \{x - a, y - b\}. \tag{3}$$

Für den Einheitsvektor $\vec{s}_1$ der Richtung $\overrightarrow{PY_1}$ gilt nach Abbildung 1 ersichtlich $\vec{s}_1 + (-\vec{v}) = 2\cos\omega(-\vec{n})$, während sich für den Einheitsvektor $\vec{s}_2$ der Richtung $\overrightarrow{PY_2}$ die Beziehung $\vec{s}_2 + \vec{v} = 2\cos\omega \ \vec{n}$ einstellt. Setzen wir für den ersten Fall $\varepsilon = 1$ und für den zweiten Fall $\varepsilon = -1$, dann erhält man

$$\vec{s} = \varepsilon(-2\cos\omega \ \vec{n} + \vec{v}), \tag{4}$$

wobei $\vec{s} = \vec{s}_1$ für $\varepsilon = 1$ und $\vec{s} = \vec{s}_2$ für $\varepsilon = -1$ gesetzt wurde. Besitzt Y_i $(i = 1, 2)$ die Koordinaten $Y_i(\xi_i, \eta_i)$ und wird $\overrightarrow{UY} = \vec{y}$ gesetzt, so gilt $\overrightarrow{PY}_i = \rho\vec{s}$, wobei man $\rho > 0$ aus der Beziehung $|\overrightarrow{SP}| + |\overrightarrow{PY}_i| = |\overrightarrow{SP}| + \rho = L_0$ zu $\rho = L_0 - |\overrightarrow{SP}|$ berechnet. Mit $|\overrightarrow{PY}_i| = (L_0 - |\overrightarrow{SP}|)\vec{s}$ ergibt sich damit

$$\vec{y}_i = \overrightarrow{UY}_i = \vec{x} + \left(L_0 - \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right) \vec{s}. \tag{5}$$

Beachtet man noch, daß $\cos\omega$ gemäß (2) und (3) durch

$$\cos\omega = \vec{v} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} [(a - x)\dot{y} + (y - b)\dot{x}] \tag{6}$$

bestimmt ist, dann kann $\vec{s}$ gemäß (4) mittels (3) berechnet werden. Man erhält

$$\vec{s} = \varepsilon \left(\frac{2[(x-a)\dot{y} - (y-b)\dot{x}]}{W_1^2 W_2} \{-\dot{y}, \dot{x}\} + \frac{1}{W_2} \{x - a, y - b\} \right), \tag{7}$$

wobei die beiden Abkürzungen

$$W_1 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad W_2 = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \tag{8}$$

verwendet wurden. Hieraus gewinnt man nach einiger Rechnung als *Parameterdarstellung der Schallfront* ($\varepsilon = 1$) bzw. *Brechungsfront* ($\varepsilon = -1$)

$$
\begin{aligned}
\xi &= x(1-\varepsilon) + \varepsilon a + \frac{2\dot{y}[(x-a)\dot{y} - (y-b)\dot{x}]}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\left(1 - \frac{L_0}{W}\right) + \frac{\varepsilon L_0 (x-a)}{W_2} \\
\eta &= y(1-\varepsilon) + \varepsilon b - \frac{2\varepsilon\dot{x}[(x-a)\dot{y} - (y-b)\dot{x}]}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\left(1 - \frac{L_0}{W_2}\right) + \frac{\varepsilon L_0 (y-b)}{W_2}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Durch Absonderung von L_0 läßt sich (8) in der Gestalt

$$
\begin{aligned}
\xi = {} & \frac{\varepsilon a(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + (1+\varepsilon)x\dot{y}^2 - 2\varepsilon y\dot{x}\dot{y} + 2\varepsilon b\dot{x}\dot{y} + (1-\varepsilon)x\dot{x}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\
& + \varepsilon \frac{L_0}{W_2} \frac{(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(x-a) + 2\dot{x}\dot{y}(y-b)}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\
\eta = {} & \frac{\varepsilon b(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) + (1+\varepsilon)y\dot{x}^2 - 2\varepsilon x\dot{x}\dot{y} + 2\varepsilon a\dot{x}\dot{y} + (1-\varepsilon)y\dot{y}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\
& + \varepsilon \frac{L_0}{W_2} \frac{(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(b-y) + 2\dot{x}\dot{y}(x-a)}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}
\end{aligned} \tag{10}
$$

schreiben. Für $\varepsilon = 1$ gewinnt man aus (10) die Formel

$$
\begin{aligned}
\xi_1 = {} & \frac{a(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + 2\dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x}) + 2b\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\
& + \frac{L_0}{W} \frac{(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(b-y) + 2\dot{x}\dot{y}(x-a)}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\
\eta_1 = {} & \frac{-b(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) - 2\dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x}) + 2a\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\
& + \frac{L_0}{W} \frac{(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(b-y) + 2\dot{x}\dot{y}(x-a)}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},
\end{aligned} \tag{11}
$$

die wir schon in [8] hergeleitet hatten. Für $\varepsilon = -1$ erhält man die *Brech-*

nungsfront $\tilde{c}$ zu

$$(12)\quad \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{-a(\dot{x}^2-\dot{y}^2)+2\dot{x}(x\dot{x}+y\dot{y})-2b\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \\ &\quad -\frac{L_0}{W_2}\frac{(\dot{x}^2-\dot{y}^2)(x-a)+2\dot{x}\dot{y}(y-b)}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \\ \eta_2 &= \frac{b(\dot{x}^2-\dot{y}^2)+2\dot{y}(x\dot{x}+y\dot{y})-2a\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \\ &\quad -\frac{L_0}{W_2}\frac{(\dot{x}^2-\dot{y}^2)(b-y)+2\dot{x}\dot{y}(x-a)}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}. \end{aligned}$$

Mittels Computer lassen sich aus (11) bzw. (12) die Schall- bzw. Brechungsfronten auch bei allgemeiner Lage des Punktes S rasch bestimmen. Liegt das Schall- bzw. Lichtzentrum S im Koordinatenursprung, dann vereinfacht sich (10) wegen $a=b=0$ zu

$$(13)\quad \begin{aligned} \xi_i &= \frac{(1+\varepsilon)x\dot{y}^2-2\varepsilon y\dot{x}\dot{y}+(1-\varepsilon)x\dot{x}^2}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}+\varepsilon\frac{L_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x(\dot{x}^2-\dot{y}^2)+2y\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \\ \eta_i &= \frac{(1+\varepsilon)y\dot{x}^2-2\varepsilon x\dot{x}\dot{y}+(1-\varepsilon)y\dot{y}^2}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}+\varepsilon\frac{L_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y(\dot{y}^2-\dot{x}^2)+2x\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon=1$ stellt sich die Formel (12) aus [8] ein, während sich für $\varepsilon=-1$ ergibt

$$(14)\quad \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{2\dot{x}(x\dot{x}+y\dot{y})}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}-\frac{L_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x(\dot{x}^2-\dot{y}^2)+2y\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \\ \eta_2 &= \frac{2\dot{y}(x\dot{x}+y\dot{y})}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}-\frac{L_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y(\dot{y}^2-\dot{x}^2)+2x\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}. \end{aligned}$$

Besonders einfach wird die Parameterdarstellung von $\tilde{c}_2$, wenn man c auf die Bogenlänge s als Parameter bezieht, d.h.

$$(15)\quad \dot{x}+\dot{y}^2=1$$

voraussetzt; man gewinnt dann aus (15) – wenn Striche Ableitungen nach der Bogenlänge bezeichnen –

$$
\begin{aligned}
\xi_2 &= 2x'(xx'+yy') - \frac{L_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\,[x(x'^2-y'^2)+2yx'y'] \\
\eta_2 &= 2y'(xx'+yy') - \frac{L_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\,[y(y'^2-x'^2)+2xx'y'].
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Den von L_0 freien Bestandteil in (13) bezeichnen wir als *Zentralkurve* k_i $(i=1,2)$. Für $\varepsilon=1$ stellt sich die Zentralkurve k_1 mit der Darstellung

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{2\dot{y}(x\dot{y}-y\dot{x})}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \\
\eta_1 &= -\frac{2\dot{x}(x\dot{y}-y\dot{x})}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

ein. Als Hauptergebnis wurde dann in [8] gezeigt:

Satz 1. *Die Zentralkurve k_1 ist die Gegenpunktkurve zur Ausgangskurve c bezüglich der Schallquelle S; sie schneidet alle reflektierten Strahlen orthogonal. Die Schallfronten $\tilde{c}$ und die Parallelkurven zu k_1 im Abstand L_0.*

Die *Gegenpunktkurve* k_1 (vgl. [4, 40]) entsteht hierbei durch Spiegelung von S an allen Tangenten t von c. Die Fußpunkte N_1 der Normalen von S auf die Tangente t bilden die *Fußpunktkurve* (vgl. Abbildung 2).

Die Zentralkurve k_2 besitzt die Parameterdarstellung

$$
\xi_2 = \frac{2\dot{x}(x\dot{x}+y\dot{y})}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, \qquad \eta_2 = \frac{2\dot{y}(x\dot{x}+y\dot{y})}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}
\tag{18}
$$

die sich bei natürlicher Parametrisierung von c zu

$$
\begin{aligned}
\xi_2 &= 2x'(xx'+yy') \\
\eta_2 &= 2y'(xx'+yy')
\end{aligned}
\tag{19}
$$

vereinfacht. Legen wir von S die Normale auf die Kurvennormale n des Punktes P mit der Gleichung $\xi x' + \eta y' = xx' + yy'$, so schneidet diese die Gerade n in einem Pukt N_2 mit den Koordinaten

$$
N_2\,[x'(xx'+yy'), y'(xx'+yy')],
\tag{20}
$$

Abbildung 2.

d.h. man erhält einen Punkt G_2 der Zentralkurve k_2, indem man den Punkt S an der Geraden n spiegelt (vgl. Abbildung 2). Somit ist die Kurve k_2 die *Gegenpunktkurve der Evolute* c^* von c bezüglich S. Der Gegenpunkt G_1 von k_1 und der Punkt G_2 liegen zentrisch symmetrisch zum Punkt P. Betrachten wir den aus (16) gebildeten Vektor $\vec{v} = \{v_1, v_2\}$ mit

$$\begin{aligned} v_1 &:= x(x'^2 - y'^2) + 2yx'y' \\ v_2 &:= y(y'^2 - x'^2) + 2xx'y', \end{aligned} \tag{21}$$

so kann man diesen wegen (15) vereinfachen zu

$$v_1 = x - 2y'\Delta_1 \qquad v_2 = y + 2x'\Delta_1 \tag{22}$$

mit $\Delta_1 := xy' - yx'$. Hieraus folgt $v_1^2 + v_2^2 = x^2 + y^2 = W_2^2$. Damit ist gezeigt, daß der in (16) auftretende Vektor $\vec{v}^* = \{v_1^*, v_2^*\}$ mit

$$\begin{aligned} v_1^* &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}[x(x'^2 - y'^2) + 2yx'y'] \\ v_2^* &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}[y(y'^2 - x'^2) + 2xx'y'] \end{aligned} \tag{23}$$

ein Einheitsvektor auf den gespiegelten Strahlen ist. Demnach gewinnt man die zu L_0 gehörige Brechungsfront, indem man von k_2 aus auf allen gespiegelten Strahlen den Abstand L_0 abträgt. Die Kurve $\tilde{c}_2$ ist somit eine *äquidistante Kurve* im Abstand L_0 zu k_2. Wir fassen zusammen im

Satz 2. *Die Zentralkurve k_2 für eine Brechung an einer Kurve c bezüglich eines Zentrums S ist die Gegenpunktkurve von S bezüglich der Evolute c^* von c. Die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ von S bezüglich c sind die äquidistanten Kurven im Abstand L_0 zu k_2 auf den gespiegelten Strahlen.*

Für viele Überlegungen ist auch die *Fußpunktkurve* f von S bezüglich der reflektierten Strahlen $g = SY$ bzw. die *Katakaustik* h dieser Strahlen von Interesse (vgl. [14, 180]). Man erhält einen Punkt L von f, wenn man von S die Normale n_1 auf g legt und diese mit g schneidet (vgl. Abbildung 3). Mittels (22) findet man die Gleichung von g zu

$$\xi v_2 - \eta v_1 = x v_2 - y v_1 \tag{24}$$

und damit ergibt sich $L\left[\dfrac{(xv_2 - yv_1)v_2}{v_1^2 + v_2^2}, -\dfrac{(xv_2 - yv_1)v_1}{v_1^2 + v_2^2}\right]$. Wegen $v_1^2 + v_2^2 = x^2 + y^2$ stellt sich mit der Abkürzung $\Delta_2 = xx' + yy'$ schließlich für f ein

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2\Delta_1\Delta_2(y + 2x'\Delta_1)}{x^2 + y^2} \\ \eta &= -\frac{2\Delta_1\Delta_2(x - 2y'\Delta_1)}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Die Hüllkurve h der Geradenschar $\{g\}$ ist die *Katakaustik* bezüglich S. Zur Bestimmung des Hüllpunktes H auf g setzen wir mit den Bezeichnungen der Abbildung 3 die Gerade g in der Gestalt

$$g \equiv x\cos\alpha + y\sin\alpha = l \tag{26}$$

an, wobei $l = \overline{SL}$ und der Winkel α Funktionen des Parameters s auf c sind. H wird dann als Schnittpunkt von g mit der zu g orthogonalen Geraden g'

$$\frac{\partial g}{\partial s} \equiv -x\sin\alpha + y\cos\alpha = \frac{l'}{\alpha'} \tag{27}$$

erhalten. Eine einfache Rechnung ergibt für den Hüllpunkt

$$H\left[\frac{l\alpha'\cos\alpha - l'\sin\alpha}{\alpha'}, \frac{l\alpha'\sin\alpha + l'\cos\alpha}{\alpha'}\right]. \tag{28}$$

Abbildung 3.

Der Fußpunkt L besitzt bei dieser Koordinatisierung die Koordinaten $L(l\cos\alpha, l\sin\alpha)$. Hieraus ergibt sich für den Tangentenvektor $\vec{t_f}$ der Fußpunktkurve f

$$\{l'\cos\alpha - l\alpha'\sin\alpha, l'\sin\alpha + l\alpha'\cos\alpha\} \tag{29}$$

und man erhält für den Schnittpunkt T der Normalen von S auf $\vec{t_f}$ mit g nach einfacher Rechnung

$$T\left[\frac{(l'\sin\alpha + l\alpha'\cos\alpha)}{\alpha'}, \frac{-l'\cos\alpha + l\alpha'\sin\alpha}{\alpha'}\right]. \tag{30}$$

Ersichtlich liegen H und T symmetrisch zum Punkt L. Damit ergibt sich der

Satz 3. *Der Hüllpunkt H der Katakaustik h auf g wird erhalten, indem man vom Zentrum S die Normale auf die Tangente t_f der Fußpunktkurve f in L zeichnet, diese mit g im Punkt T zum Schnitt bringt, und den Punkt T an L spiegelt. Die Fußpunktkurve f wird durch* (25) *festgelegt.*

Erheblich umfangreicher ist die analytische Bestimmung der Katakaustik h. Wir beachten dazu, daß h die Evolute der Gegenpunktkurve k_1 ist und daher nach [10, 65] mittels

$$(31)\qquad \begin{aligned} X &= \xi_1 - \dot{\eta}_1 \,\frac{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2}{\dot{\xi}_1\ddot{\eta}_1 - \dot{\eta}_1\ddot{\xi}_1} \\ Y &= \eta_1 + \dot{\xi}_1 \,\frac{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2}{\dot{\xi}_1\ddot{\eta}_1 - \dot{\eta}_1\ddot{\xi}_1} \end{aligned}$$

berechnet wird, wobei nach (17) $\xi_1 = 2y'\Delta_1$, $\eta_1 = -2x'\Delta_1$ gilt. Mit den schon benützten Abkürzungen $\Delta_1 = xy' - yx'$, $\Delta_2 = xx' + yy'$ sowie den bekannten Formeln $x'' = -\kappa y'$, $y'' = \kappa x'$, $x''' = -\kappa^2 x' - \kappa' y'$, $y''' = -\kappa^2 y' + \kappa' x'$ – wobei κ die Krümmung der Kurve c bezeichnet – leitet man zunächst die folgenden Formeln ab:

$$(32)\qquad \begin{gathered} \Delta_1' = \kappa\Delta_2, \quad \Delta_2' = 1 - \kappa\Delta_1, \\ \Delta_1'' = \kappa'\Delta_2 + \kappa - \kappa^2\Delta_1, \quad \Delta_2'' = -\kappa'\Delta_1 - \kappa^2\Delta_2, \\ \Delta_1^2 + \Delta_2^2 = x^2 + y^2, \quad (\Delta_1\Delta_2)' = \kappa(\Delta_2^2 - \Delta_1^2) + \Delta_1. \end{gathered}$$

Hiermit ergibt sich $\frac{1}{4}(\xi_1^{'2} + \eta_1^{'2}) = \Delta_1^2(x^{''2} + y^{''2}) + \Delta_1^{'2} = \kappa^2(x^2 + y^2)$. Wir vermerken

$$(33)\qquad \xi_1^{'2} + \eta_1^{'2} = 4\kappa^2(x^2 + y^2).$$

Weiter findet man $\frac{1}{4}(\xi_1'\eta''_1 - \eta_1'\xi''_1) = \kappa^3\Delta_1^2 - \kappa\Delta_1\Delta_1'' + \kappa'\Delta_1\Delta_1' + 2\kappa\Delta_1^{'2} = \kappa^2[2(x^2 + y^2) - \Delta_1]$, also

$$(34)\qquad \xi_1^{'}\eta_1^{''} - \eta_1^{'}\xi_1^{''} = 4\kappa^2[2\kappa(x^2 + y^2) - \Delta_1]$$

und weiter

$$(35)\qquad \frac{\xi_1^{'2} + \eta_1^{'2}}{\xi_1^{'}\eta_1^{''} - \eta_1^{'}\xi_1^{''}} = \frac{x^2 + y^2}{2\kappa(x^2 + y^2) - \Delta_1}.$$

Durch Einsetzen von (35) in (31) erhält man schließlich nach einer Vereinfachung

$$(36)\qquad \begin{aligned} X &= \frac{2\kappa x(x^2 + y^2) - 2y'\Delta_1^2}{2\kappa(x^2 + y^2) - \Delta_1} \\ Y &= \frac{2\kappa y(x^2 + y^2) + 2x'\Delta_1^2}{2\kappa(x^2 + y^2) - \Delta_1} \end{aligned}$$

mit $\kappa = x'y'' - y'x''$. Ist die Kurve c auf einen allgemeinen Parameter t bezogen, so lautet (36) wegen $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ausführlich

$$(37)\qquad \begin{aligned} X &= \frac{2x(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})(x^2+y^2) - 2\dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x})^2}{2(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})(x^2+y^2) - (x\dot{y} - y\dot{x})(\dot{x}^2+\dot{y}^2)} \\ Y &= \frac{2y(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})(x^2+y^2) + 2\dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x})^2}{2(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})(x^2+y^2) - (x\dot{y} - y\dot{x})(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}. \end{aligned}$$

Für prakische Auswertungen muß auch die Fupunktkurve f auf eine allgemeine Parametrisierung von c umgerechnet werden. Man erhält

$$(38)\qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{2(x\dot{y} - y\dot{x})(x\dot{x} + y\dot{y})[y(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + 2\dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x})]}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^2(x^2+y^2)} \\ \eta &= -\frac{2(x\dot{y} - y\dot{x})(x\dot{x} + y\dot{y})[x(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - 2\dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x})]}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^2(x^2+y^2)}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit die folgende kinematische Erzeugung der Brechungsfronten im

Satz 4. *Die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ einer Kurve c bezüglich eines Zentrums S können als Bahnkurven der Punkte P einer Geraden g erzeugt werden, von der ein Punkt G_2 auf der Zentralkurve k_2* (18) *läuft, während g beständig die Katakaustik h* (37) *berührt; dabei gilt $L_0 = \overline{G_2P}$.*

Wir betrachten als *erste Anwendung* den Fall einer Geraden c, die wir durch $\{x = c_0, y = t\}$ beschreiben, wobei wir das Zentrum S in den Koordinatenursprung legen. Die Schallfronten $\tilde{c}_1$ haben wir schon in [8] bestimmt. Als Gegenpunktkurve k_2 stellt sich die Gerade $\xi_2 = 0$, d.h. die y-Achse des zugrundegelegten Koordinatensystems ein, während k_1 zum Punkt $K_1(2c_0, 0)$ degeneriert, der gleichzeitig die Katakaustik ist. Mittels (14) erhält man nach kurzer Rechnung für die Brechungsfronten die Parameterdarstellung

$$(39)\qquad \begin{cases} \xi_2 = \frac{L_0 c_0}{\sqrt{c_0^2+t^2}} \\ \eta_2 = 2t - \frac{L_0 t}{\sqrt{c_0^2+t^2}}, \end{cases}$$

Abbildung 4.

woraus unschwer die algebraische Kurvengleichung

$$\xi_2^2[(\xi_2^2+\eta_2^2)-4c_0\xi_2+4c_0^2]=L_0^2(\xi-2c_0)^2 \tag{40}$$

fließt. Dies sind die *Konchoiden der Geraden* k_2 bezüglich des Punktes K_2 (vgl. [3, 231], [13, 114]).

Die Abbildung 4 zeigt die geometrische Situation, wo die Kurven $\tilde{c}_2$ als Bahnkurven einer *einfach geschränkten Winkelschleife* erzeugt werden (vgl. [13, 112]).

Die Fupunktkurve f ist der Kreis über dem Durchmesser $\overline{SK_1}$. Wir vermerken den

Satz 5. *Die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ einer Geraden c bezüglich eines Zentrums S lassen sich als Bahnkurven einer einfach geschränkten Winkelschleife erzeugen, deren Leitgerade k_2 eine Parallele zu c durch S ist und deren Lagerpunkt K_1 durch Spiegelung von S an c entsteht. Diese Brechungsfronten sind Konchoiden des Nikomedes.*

Als *zweite Anwendung* betrachten wir den Fall eines Kreises c, den wir in der Gestalt

$$x = a + r\cos t \qquad (41)$$
$$y = r\sin t$$

parametrisieren, während wir das Zentrum S in den Koordinatenursprung legen. Die Schallfronten bezüglich S wurden schon in [8] betrachtet. Bestimmen wir hier zunächst die Gegenpunktkurve k_2 und die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$! Mit $\dot{x} = -r\sin t, \dot{y} = r\cos t$ findet man zunächst für die Gegenpunktkurve k_2 nach (18) die Parameterdarstellung

$$\xi_2 = 2a\sin^2 t \qquad (42)$$
$$\eta_2 = -2a\sin t\cos t$$

und damit die algebraische Gleichung

$$(\xi_2 - a)^2 + \eta_2^2 = a^2. \qquad (43)$$

Dies ist ein zum Ausgangskreis c *konzentrischer Kreis vom Radius* a, d.h. ein Kreis k_2, der das Zentrum S enthält (vgl. Abbildung 5). Für die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ erhält man nach (14) wegen $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2$, $x^2 + y^2 = a^2 + 2ar\cos t + r^2$, $\dot{x}^2 - \dot{y}^2 = -r^2\cos 2t$ nach einiger Rechnung die Parameterdarstellung

$$(44) \qquad \begin{cases} \xi_2 = 2a\sin^2 t + \dfrac{L_0(a\cos 2t + r\cos t)}{\sqrt{r^2 + a(a + 2r\cos t)}} \\[2ex] \eta_2 = -a\sin 2t + \dfrac{L_0(a\sin 2t + r\sin t)}{\sqrt{r^2 + a(a + 2r\cos t)}}. \end{cases}$$

Nach Anwendung der Schiebung $\{\tilde{\xi} = \xi_2 - a, \tilde{\eta} = \eta_2\}$ läßt sich (44) in der einheitlicheren Gestalt

$$(45) \qquad \begin{cases} \tilde{\xi} = -a\cos 2t + \dfrac{L_0(a\cos 2t + r\cos t)}{\sqrt{r^2 + a(a + 2r\cos t)}} \\[2ex] \tilde{\eta} = -a\sin 2t + \dfrac{L_0(a\sin 2t + r\sin t)}{\sqrt{r^2 + a(a + 2r\cos t)}}. \end{cases}$$

Abbildung 5.

schreiben. Zur Bestimmung der Ordnung dieser Kurven bilden wir aus (45) $\zeta = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta}$ unter Beachtung von $2ar\cos t = ar(e^{it} + e^{-it})$ und erhalten

$$\zeta = -ae^{2it} + L_0 \frac{ae^{2it} + re^{it}}{\sqrt{a^2 + r^2 + ar(e^{it} + e^{-it})}}. \tag{46}$$

Setzt man in (46) $e^{it} =: u$, dann lautet diese Gleichung in *Minimalkoordinaten*

$$\begin{aligned} \zeta &= -au^2 + L_0 \frac{au^2 + ru}{\sqrt{a^2 + r^2 + ar(u + u^{-1})}} \\ \bar{\zeta} &= -au^{-2} + L_0 \frac{au^{-2} + ru^{-1}}{\sqrt{a^2 + r^2 + ar(u^{-1} + u)}} \end{aligned} \tag{47}$$

und durch Einsetzen in eine Geradengleichung $\bar{A}\zeta + A\bar{\zeta} + \gamma = 0$ ($\gamma \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{C}$) erhält man nach einiger Rechnung ein Polynom von Grad 9 in u mit dem höchsten Glied $\bar{A}^2 a^2(a^2 + r^2 + ar - L_0)$, d.h. für $a \neq 0$ und $a^2 + r^2 + ar \neq L_0$ sind die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ *algebraische Kurven 9. Ordnung.*

Eine Vereinfachung ergibt sich im Sonderfall $a = r$, d.h. wenn S auf dem Kreis c liegt. Wegen $2a^2 + a^2(e^{it} + e^{-it}) = a^2(e^{\frac{1}{2}it} + e^{-\frac{1}{2}it})^2$ folgt dann aus (46) $\zeta = -ae^{2it} + L_0 e^{\frac{3}{2}it}$ bzw. mit $\frac{1}{2}t = u$

$$\zeta = -ae^{4iu} + L_0 e^{3iu}. \tag{48}$$

Dies sind Radlinien 2. Stufe der Charakteristik $\omega_1 : \omega_2 = 4 : 3$, d.h. algebraische Kurven 8. Ordnung (vgl. [13, 151]). Eine Parameterdarstellung von (48) lautet

$$\begin{aligned} \xi_2 &= -a\cos 4u + L_0 \cos 3u \\ \eta_2 &= -a\sin 4u + L_0 \sin 3u. \end{aligned} \tag{49}$$

Wir bestimmen abschließend mittels (37) eine Parameterdarstellung der Katakaustik h. Nach längerer Rechnung stellt sich ein

$$\begin{aligned} X &= \frac{2[a(a^2 + r^2) + a^2 r(3\cos t - \cos^3 t)]}{2a^2 + r^2 + 3ar\cos t} \\ Y &= \frac{2a^2 r \sin^3 t}{2a^2 + r^2 + 3ar\cos t}. \end{aligned} \tag{50}$$

Nach Anwendung der Schiebung $\{\bar{X} = X - 2a, \bar{Y} = Y\}$ läßt sich (50) in der einfacheren Gestalt

$$\begin{aligned} \bar{X} &= -\frac{2a^2(a + r\cos^3 t)}{2a^2 + r^2 + 3ar\cos t} \\ \bar{Y} &= \frac{2a^2 r \sin^3 t}{2a^2 + r^2 + 3ar\cos t} \end{aligned} \tag{51}$$

schreiben. Wie in [12, 101] mit synthetischen Methoden gezeigt wurde, sind die Kurven (51) *Evoluten von PASCAL-Schnecken.* Geht man in der Tat von einer PASCAL-Schnecke σ mit der Parametrisierung

$$\begin{aligned} x &= 2(a + b\cos\varphi)\cos\varphi \\ y &= 2(a + b\cos\varphi)\sin\varphi \end{aligned} \tag{52}$$

aus, so erhält man gemäß (31) nach einiger Rechnung die Evolute von σ in der Gestalt

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{2[b(a^2+b^2)+ab^2(3\cos\varphi-\cos^3\varphi)]}{2b^2+a^2+3ab\cos\varphi} \\
Y &= \frac{2b^2 a\sin^3\varphi}{2b^2+a^2+3ab\cos\varphi}
\end{aligned}
\tag{53}
$$

und diese Parameterdarstellung stimmt mit (50) überein, wenn man $t=\varphi$, $b=a$ und $a=r$ setzt. Die Evolute (50) gehört somit zu einer PASCAL-Schnecke, deren *konchoidaler Leitkreis* mit dem Kreis k_2 übereinstimmt, während die Konchoidenstrecke genau $2r$ beträgt. Wir fassen einiges zusammen im

Staz 6. *Die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ eines Kreises c vom Radius r bezüglich eines Zentrums $S \notin c$ sind algebraische Kurven 9. Ordnung mit der Darstellung* (44). *Die Gegenpunktkurve k_2 ist ein zu c konzentrischer Kreis, der das Zentrum S enthält. Die Katakaustik h ist die Evolute* (50) *einer PASCAL-Schnecke σ, die man durch Konchoidenbewegung längs k_2 erzeugen kann, wobei der Schleifpunkt in S liegt, k_2 der konchoidale Leitkreis ist und die Konchoidenstrecke $2r$ beträgt. Die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ lassen sich als Bahnkurven der Punkte P einer Geraden g erzeugen, von der ein Punkt G_2 auf dem Kreis k_2 läuft, während g beständig die Evolute h der PASCAL-Schnecke σ berührt.*

Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich im Sonderfall $a=r$. In diesem Fall vereinfacht sich (50) zu

$$
\begin{aligned}
X &= a + \frac{2a}{3}\cos u - \frac{a}{3}\cos 2u \\
Y &= \frac{2a}{3}\sin u - \frac{a}{3}\sin\ 2u
\end{aligned}
\tag{54}
$$

und diese Kurve ist eine KARDIOIDE (vgl. [14, 262]), ebenso auch die Ausgangskurve σ. Nach Anwendung der Schiebung $\{X=x+a, Y=y\}$ lautet (54) in impliziter Form

$$
27(x^2+y^2)^2 - 18a^2(x^2+y^2) + 8a^3x - a^4 = 0. \tag{55}
$$

Wir fassen zusammen im

Satz 7. *Die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ eines Kreises c, der das Zentrum S enthält, sind Radlinien 2. Stufe mit der Darstellung* (48) *bzw.* (49), *d.h. algebraische Kurven 8. Ordnung. Die Gegenpunktkurve k_2 stimmt mit c überein. Die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ lassen sich als Bahnkurven der Punkte P einer Geraden g erzeugen, von der ein Punkt G_2 auf c läuft, während g beständig eine KARDIOIDE $\boldsymbol{h}$ berührt; diese ist die Evolute einer Kardioide σ, die sich als Kreiskonchoide von c bezüglich S zum Abstand $2a$ erzeugen läßt.*

Die Abbildung 5 zeigt die im Satz 7 beschriebene Erzeugung der Kurven $\tilde{c}_2$.

Literaturverzeichnis

[1] L. Beranek, Musik, *McGraw Hill*, *New York – London*, 1962.
[2] L. Cremer und H. A. Müller, Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik, Band I und II, *S. Hirzel Verlag Stuttgart*, 1978.
[3] K. Fladt, Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, *Akad. Verlagsgesellschaft*, *Frankfurt*, 1962.
[4] M. Husty, A. Karger, H. Sachs und W. Steinhilper, Kinematik und Robotik, *Springer-Verlag*, *Heidelberg*, 1997.
[5] G. Karáné, Bauakustische Prüfung in neuen Wohngebäuden, herausgegeben von ÉTK, *Budapest*, 1967.
[6] G. Karáné, Raumakustische Prüfung im Bauwesen angewandter geometrischer Oberflächen unter Anwendung der Anaglyphenmethode, Dissertation an der TU-Budapest, 1986.
[7] G. Karáné, Raumakustische Prüfungen in der Baukunst angewandter geometrischer Oberflächen, *Periodica Politechnika Architecture* **35** (1991), 1–2.
[8] H. Sachs und F. Mészáros, Schallfronten an ebenen Kurven I, *Math. Pannonica* **8**/2 (1997), 187–200.
[9] H. Sachs und G. Karáné, Schallfronten an ebenen Kurven II, *Math. Pannonica* **9**/1 (1998), 17–31.
[10] K. Strubecker, Differentialgeometrie I, Sammlung Göschen, *Band* **1113/1113a**, *Berlin*, 1964.
[11] T. Tarnóczy, Teremakusztika I és II, *Akadémiai Kiadó*, *Budapest*, 1986.
[12] H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, *Göschens Verlagshandlung*, *Leipzig*, 1908.
[13] W. Wunderlich, Ebene Kinematik, *BI-Hochschultaschenbücher,* **447/447a**, *Mannheim/Wien/Zürich*, 1970.
[14] C. Zwikker, Advanced plane geometry, *North-Holland Publ. Comp.*, *Amsterdam*, 1950.

HANS SACHS
MONTANUNIVERSITÄT LEOBEN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND ANGEWANDTE GEOMETRIE
A–8700 LEOBEN, AUSTRIA

G. KARÁNÉ
MONTANUNIVERSITÄT LEOBEN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND ANGEWANDTE GEOMETRIE
A–8700 LEOBEN, AUSTRIA

(Received February 24, 1998)