Publ. Math. Debrecen
44 / 3-4 (1994), 381–390

Eine analytische Bedingung dafür, daß eine Zentralaxonometrie Zentralprojektion ist

Von JÓZSEF SZABÓ (Debrecen)

Gewidmet Prof. Dr. Lajos Tamássy zum 70. Geburtstag

Es gibt die parallele und die zentrale Axonometrie. Die Parallelaxonometrie ist eigentlich eine degenerierte affine Abbildung des euklidischen Raumes auf die euklidische Ebene. Nach dem Satz von Pohlke (1853) ist dieses Bild, d.h. die Axonometrie des räumlichen Objekts, immer ähnlich zu irgendeiner parallelen Projektion des Objekts. Die Zentralaxonometrie ist eine degenerierte Abbildung des projektiven Raumes auf die projektive Ebene. Das Bild des Objekts ist im allgemeinen Fall keine Zentralprojektion des Objekts, sondern nur projektiv zu einer solchen.

Zuerst gab Kruppa [KRU10] ein synthetisches Kriterium dafür an, wann eine Zentralaxonometrie Zentralprojektion ist. Diese Arbeit wird eine analytische Antwort, ein Kriterium dafür geben, wann die Zentralaxonometrie des Gegenstands gleichzeitig auch eine Zentralprojektion ist.[1] Deswegen lassen sich diese Kenntnisse auch in der Computergraphik anwenden.

E. Kruppa [KRU10] gab eine projektive Verallgemeinerung der Axonometrie und nannte sie Zentralaxonometrie. Seit dieser Zeit sagt man Parallelaxonometrie anstatt Axonometrie. E. Stiefel [STI34] hat bewiesen, daß der Hauptsatz der Axonometrie, d.h. der Pohlkesche Satz, sich nicht auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern läßt.

Seit dieser Zeit lautet der Hauptsatz: Jedes axonometrische Bild eines Gegenstands ist affin zu einer Parallelprojektion des Gegenstands.

Mit Hilfe von OTKA-1651 in Debrecen, TEMPUS JEP 0102 in Paderborn, EGK-Stipendium N°CIPA3510CT923767 in München.

[1] In meiner Dissertation [SZA78] existiert dieser Satz schon, aber, als ein Sonderfall der Theorie über eine projektive Verallgemeinerung der Eckhart-Methode, d.h. des Einschneideverfahrens. Dort gibt es einen Satz darüber, wann das zentrale Einschneideverfahren zur Zentralprojektion führt. Der Beweis des Satzes benötigte mehr als 17 Seiten, aber daraus folgte der in dieser Arbeit vorgestellte Satz bereits.
Dieser Beweis beruht jetzt auf elementarer Mathematik.

Und für die Zentralaxonometrie: Jede Zentralaxonometrie eines Gegenstands kann durch projektive Abbildung aus einem Zentralbild des Gegenstands erzeugt werden. Allgemein ist die Zentralaxonometrie also keine Zentralprojektion des räumlichen Gegenstands. Das bedeutet z.B., daß eine Fotografie des Objekts eine Zentralprojektion ist, aber das Foto des Fotos im allgemeinen nicht.

Schon Kruppa [KRU23], [KRU10] gab ein synthetisches Kriterium dafür an, wann die Zentralaxonometrie eine Zentralprojektion ist. Sowohl zum Verstehen des Satzes, wie auch seines Beweises benötigt man sehr viele höhere Kenntnisse [KRU23][2]. Deswegen ist es wertvoll, daß Drs [DRS57] einen relativ elementaren aber langen Beweis des vorigen Satzes gegeben hat.

In der zweiten Auflage des Buches von Stiefel [STI71] befindet sich schon eine analytische Form des obigen Problems, aber nur für einen ganz speziellen Fall.

Der Satz von Stiefel ist der folgende:

Wenn wir das Achsenkreuz der Zentralaxonometrie in dem speziellen Fall nehmen, daß die Verbindungsgerade der endlichen Fluchtpunkte (U_x, U_y) zur Achse z senkrecht ist, wobei der Fluchtpunkt $U_{z\infty}$ ein unendlich ferner Punkt ist, ist dieses Achsenkreuz dann und nur dann eine Zentralprojektion einer räumlichen orthonormierten Basis, wenn dafür

$$\left(\frac{E_xU_x}{OE_x}\right)^2 + \left(\frac{E_yU_y}{OE_y}\right)^2 = \left(\frac{U_xU_y}{OE_z}\right)^2$$

gültig ist (siehe *Abb. 1.*).

Jetzt werden wir einen Satz in analytischer Form für den allgemeinen Fall mit Beweis angeben. So ist dieser Satz auch in der Computergraphik verwendbar, wie wir am Schluß bemerken.

Satz. *Es sei $O(E_x, E_y, E_z, U_x, U_y, U_z)$ das Achsenkreuz der Zentralaxonometrie. (Abb. 2). Wir bezeichnen die Winkel des als endlich vorausgesetzten Fluchtpunktdreiecks mit $\alpha = \angle U_yU_xU_z$, $\beta = \angle U_xU_yU_z$, $\gamma = \angle U_yU_zU_x$, weiterhin die Strecken auf den Achsen mit $e = OE_x, f = E_xU_x$, $g = OE_y, h = E_yU_y$, $i = OE_z, j = E_zU_z$.*

[2]Betrachten wir die Abb. 2. Das Fluchtpunktdreieck und das Einheitsdreieck sind in Desargues'scher Lage, also haben sie eine Achse a. Es sei A der Pol zur Achse a bezüglich des Fluchtpunktdreiecks. Das Fluchtpunktdreieck als ein Polardreieck und das Paar $a \to A$ definieren eine Korrelation, die natürlich eine Leitkurve k^2 hat. Diese ist bei der Zentralaxonometrie immer ein nullteiliger Kegelschnitt.
Der Satz von Kruppa lautet: Eine Zentralaxonometrie ist eine Zentralprojektion genau dann, wenn der obige Leitkegelschnitt im euklidischen Sinn ein nullteiliger Kreis ist.

Das Achsenkreuz $O(E_x, E_y, E_z, U_x, U_y, U_z)$ *ist dann und nur dann eine Zentralprojektion eines räumlichen orthonormierten Dreibeins, wenn*

1. α, β, γ *spitze Winkel sind,*

2. $\left(\frac{f}{e}\right)^2 \sin^2\alpha\cos 2\beta + \left(\frac{h}{g}\right)^2 \sin^2\beta\cos 2\alpha = -\left(\frac{j}{i}\right)^2 \sin^2\gamma$,

3. $\left(\frac{eh}{fg}\right)^2 = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha}$.

Abb. 1 *Abb. 2*

Beweis. *Die Bedingungen sind notwendig:*

In *Abb. 3* wird die räumliche Situation des Prozesses der zentralen Projektion skizziert. Es sei $O(x, y, z)$ eine orthonormierte Basis mit den Einheitspunkten E_x, E_y, E_z. C sei das Zentrum der Zentralprojektion. Das perspektivische Achsenkreuz hat als Ursprung O', als Einheitspunkte E'_x, ..., als Fluchtpunkte U_x ... . Die fluchtpunktherstellenden Strahlen bilden eine rechtwinklige Pyramide C, U_x, U_y, U_z. Deswegen ist das Dreieck U_x, U_y, U_z spitzwinklig, d.h. der erste Punkt des Satzes ist notwendig.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$c = U_xU_y; \quad b = U_xU_z; \quad a = U_yU_z \quad a_o = CU_x; \quad b_o = CU_y; \quad c_o = CU_z.$$

An der Spitze C sind rechte Winkel, also gilt für die Kanten der Pyramide:

$$a^2 = b_o^2 + c_o^2, \quad b^2 = a_o^2 + c_o^2, \quad c^2 = a_o^2 + b_o^2,$$

weiterhin $b^2 + c^2 = 2a_o^2 + b_o^2 + c_o^2 = 2a_o^2 + a^2$, woraus mit dem Kosinussatz für das Dreieck $U_xU_yU_z$ folgt: $2a_o^2 = b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha$.

Abb. 3

Durch zyklische Vertauschung ergibt sich:

$$a_o^2 = bc\cos\alpha, \quad b_o^2 = ac\cos\beta, \quad c_o^2 = ab\cos\gamma. \tag{1}$$

Die *Abb. 4* ist eine konstruierte Zentralprojektion der räumlichen orthonormierten Basis. Die Pyramide $CU_xU_yU_z$ ist gegen parallele Verschiebung des räumlichen Koordinatensystems invariant. Weiterhin betrachten wir nun die Zentralprojektion des Koordinatensystems.

Es seien dazu U_x, U_y, U_z ein spitzwinkliges Dreieck und der Schnittpunkt C_1' der Höhen das orthogonale Bild $C_1^{'}$ des Zentrums C in der Bildebene. Wenn wir die Seiten der Pyramide in die Bildebene umklappen — $[C, U_x, U_y]$ um U_xU_y und $[C, U_z, U_y]$ um U_yU_z —, dann bekommen wir die wahren Längen der oberen Kanten der Pyramide. Sie sind a_o, b_o, c_o.

Der Bildursprung O' ist ein beliebiger Punkt der Zeichenebene. Nun wählen wir eine Strecke als Einheit für die Konstruktion mit der Länge 1. Nach dem Prinzip des Maßkreises bestimmen wir die Bildeinheitspunkte E_x', E_y', E_z'. Die Konstruktion des Punktes E_x' ist die folgende: Durch die Punkte U_x und O' müssen wir zwei beliebige und zueinander parallele Geraden ziehen. Diese sind die Gerade U_xU_y und eine andere durch den Punkt O'. U_x ist der Mittelpunkt des Maßkreises, a_o ist sein Radius. Der Kreis schneidet die Gerade U_xU_y im Punkt R (und in einem zweiten Punkt). Jetzt messen wir aus O' die Einheitsstrecke an der anderen parallelen Geraden. So bekommen wir den Punkt L (und einen zweiten Punkt). Der Schnittpunkt der Geraden U_xO' und RL wird die Zentralprojektion des Einheitspunkts der Achse x sein, und wird E_x' benannt. Ähnlich haben wir die anderen Bildeinheitspunkte E_y' und E_z' bekommen.

Also ist die *Abb. 4* eine Zentralprojektion des räumlichen orthonormierten Koordinatensystems.

Abb. 4

Weiterhin werden wir jetzt zeigen, daß die Punkte 2 und 3 des Satzes erfüllt sind. Wir führen ein:

$$(2) \quad e = O'E'_x,\ f = E'_x U_x,\ g = O'E'_y,\ h = E'_y U_y,\ i = O'E'_z,\ j = E'_z U_z.$$

In der Konstruktion haben wir mehrere ähnliche Dreiecke bekommen. Aus dem Dreieckspaar $RU_xE'_x$ und $LO'E'_x$ folgt die erste, und aus den anderen die zweite und die dritte Gleichung:

$$\frac{f}{e} = \frac{a_o}{1} = a_o, \quad \frac{h}{g} = b_o, \quad \frac{j}{i} = c_o.$$

Nehmen wir jetzt die Ausdrücke:

$$\left(\frac{f}{e}\right)^2 \sin^2\alpha\cos 2\beta = bc\cos\alpha\sin\alpha\sin\alpha\cos 2\beta =$$
$$\underbrace{bc\sin\alpha}_{2T}\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\beta = \sin 2\alpha\cos 2\beta,$$

und

$$\left(\frac{h}{g}\right)^2 \sin^2\beta\cos 2\alpha = ac\cos\beta\sin\beta\sin\beta\cos 2\alpha =$$
$$\underbrace{ac\sin\beta}_{2T}\sin\beta\cos\beta\cos 2\alpha == T\cos 2\alpha\sin 2\beta,$$

wobei T den Flächeninhalt des Dreiecks $U_xU_yU_z$ bezeichnet. Nach der Addition:

$$\left(\frac{f}{e}\right)^2 \sin^2\alpha\cos 2\beta + \left(\frac{h}{g}\right)^2 \sin^2\beta\cos 2\alpha = T\sin(2\alpha+2\beta) =$$
$$T\sin(-2\gamma) = -T\sin 2\gamma = -\frac{ab\sin\gamma}{2} 2\sin\gamma\cos\gamma =$$
$$-\underbrace{ab\cos\gamma}_{c_o^2}\sin\gamma\sin\gamma = -\left(\frac{j}{i}\right)^2 \sin^2\gamma,$$

d.h. auch die zweite Bedingung ist notwendig.

Aus (1)–(2) und aus dem Sinussatz für das Fluchtpunktdreieck $U_xU_yU_z$ folgt:

$$\left(\frac{e}{f}\frac{h}{g}\right)^2 = \left(\frac{a_o}{b_o}\right)^2 = \frac{ac\cos\beta}{bc\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha},$$

d.h. auch die dritte Bedingung ist notwendig.

Die Bedingungen sind auch hinreichend:

Die Bedingungen des Satzes sind gegen Ähnlichkeiten invariant. Wenn also ein Achsenkreuz der Zentralaxonometrie eine Zentralprojektion eines räumlichen orthonormierten Achsenkeuzes ist, dann ist auch ein dazu ähnliches Bild eine Zentralprojektion.

Zuerst konstruieren wir ein Dreieck mit den Innenwinkeln α, β, γ. Alle sind ähnlich zueinander.

Über dem Dreieck ist eine einzige rechtwinklige Pyramide konstruierbar.[3] Mit der Umklappung bekommen wir die Strecke a_o, b_o, c_o.

Aus einem nicht spitzwinkligen Dreieck können wir keine rechtwinklige Pyramide konstruieren, aber allein die Spitzwinkligkeit des Fluchtpunktdreiecks ist nicht genug. Die räumlichen Geraden CU_x, CU_y, CU_z definieren die Fluchtrichtungen der räumlichen orthogonalen Koordinatenachsen.

Haben wir also irgendwo ein Achsenkreuz mit diesem Fluchtpunktdreieck $U_xU_yU_z$, so gehört dazu ein orthogonales Koordinatensystem im Raum.

Betrachten wir nochmals die *Abb. 2*. Die Zeichnung kann niemals als eine Zentralprojektion eines räumlichen orthogonalen Koordinatensystems betrachtet werden. Das Fluchtpunktdreieck ist stumpfwinklig.

Die Gleichheit der räumlichen Koordinateneinheiten ist nicht gesichert. Wir fassen *Abb. 5* als Zentralprojektion eines orthogonalen Koordinatensystems auf und bestimmen die wahren Längen der räumlichen Einheitsstrecken, wieder mit Hilfe des Maßkreises. Es liege O in der Bildebene. Nehmen wir durch O eine Gerade, die zu $U_x(C)$ parallel ist. Unsere Gerade und die Gerade $E_x(C)$ schneiden einander im Punkt R. Die Strecke OR ist die wahre Länge der Einheit der räumlichen Achse x. Ähnlich bekommen wir die Punkte S und K.

Unsere Frage ist also, ob aus den Bedingungen 2 und 3 des Satzes die Gleichheit $OR = OS = OK$ folgt oder nicht. Wir nehmen die bisherigen Bezeichnungen und führen noch $r = OR, s = OS, k = OK$ ein.

Aus den ähnlichen Dreiecken OSE_y und $U_y(C)E_y$, weiterhin ORE_x und $U_x(C)E_x$, weiterhin OLE_y und $U_y((C))E_y$, weiterhin OKE_z und $U_z((C))E_z$bekommen wir:

$$\frac{e}{f} = \frac{s}{a_o}, \quad \frac{h}{g} = \frac{b_o}{r}, \quad \frac{j}{i} = \frac{c_o}{k} \tag{3}$$

Aus der dritten Bedingung:

$$\left(\frac{e}{f}\frac{g}{h}\right)^2 = \left(\frac{s}{r}\frac{b_o}{a_o}\right)^2 = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha} \Longrightarrow \left(\frac{s}{r}\right)^2 = \frac{\sin\alpha\cos\beta bc\cos\alpha}{\sin\beta\cos\alpha ac\cos\beta} = 1$$

folgt also $r = s$.

[3]Es ist noch möglich, eine andere Pyramide herzustellen, aber diese Pyramide ist ein Spiegelbild der vorigen auf die Bildebene, also sind sie kongruent.

Abb. 5

Aus der zweiten Bedingung:

$$\left(\frac{f}{e}\right)^2 \sin^2\alpha\cos 2\beta + \left(\frac{h}{g}\right)^2 \sin^2\beta\cos 2\alpha = -\left(\frac{j}{i}\right)^2 \sin^2\gamma$$

folgt:

$$\left(\frac{a_o}{s}\right)^2 \sin^2\alpha\cos 2\beta + \left(\frac{b_o}{r=s}\right)^2 \sin^2\beta\cos 2\alpha = -\left(\frac{c_o}{k}\right)^2 \sin^2\gamma$$

und daraus

$$\left(\frac{k}{s}\right)^2 \underbrace{\left(a_o^2 \sin^2\alpha \cos 2\beta + b_o^2 \sin^2\beta \cos 2\alpha\right)}_{A} =$$
$$= -c_o^2 \sin^2\gamma = -ab\cos\gamma \sin^2\gamma = -2T\cos\gamma\sin\gamma$$

wobei

$$A = bc\cos\alpha\sin^2\alpha\cos 2\beta + ac\cos\beta\sin^2\beta\cos 2\alpha =$$
$$= 2T(\cos\alpha\sin\alpha\cos 2\beta + \cos\beta\sin\beta\cos 2\alpha) = T\sin(2\alpha + 2\beta) = -T\sin 2\gamma,$$

also $k = s$. Und damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkungen: 1. Betrachten wir die zweite Bedingung des Satzes. Für den Grenzfall, daß U_z der unendlich ferne Punkt ist, und OU_z zur Geraden U_xU_y senkrecht ist, bekommen wir die linke Seite des Satzes von Stiefel. Die rechte Seite erhält aber eine unbestimmte Form. Daher läßt sich der Satz von Stiefel nicht sofort als Grenzfall des Satzes erhalten.

2. Wenn wir ein Foto eines Objekts mit geeigneten markanten Punkten haben, aus denen die nötigen Größen für den Satz ermittelt werden können, dann läßt sich mit Hilfe des Satzes nachweisen ob das Foto eine Zentralprojektion ist oder nicht.

Die benötigten Größen am Objekt (im Raum) sind drei aus einem Punkt laufende, paarweise senkrechte, nicht notwendig gleichlange Strecken mit bekannten wahren Längen, und je eine dazu parallele Strecke, um die Fluchpunkte zu bestimmen. Zur Durchführung der nötigen Konstruktionen mit der geforderten Genauigkeit ist der Einsatz von Computern mit einem Digitalisierungsgerät effektiv.

Literaturverzeichnis

[DRS57] L. Drs, V základni vete centralni axonometrie., *Časopis pro pestováni matematiky, roc.* **82** (1957), 165–173.

[KRU10] Kruppa E., Zur achsonometrischen Methode der darstellenden Geometrie, *Stzgsb. Ak. Wien (math.-nat.) Abt. IIa* **119** (1910), 487-506.

[KRU23] Müller E. and Kruppa E., Vorlesungen über darstellende Geometrie, I. Bd.: E. Kruppa: Die linearen Abbildungen, *Wien*, 1923, pp. 292.

[STI71] E. Stiefel, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 3., *Aufl. Basel*, *Stuttgart*, 1971, pp. 177.

[STI34] E. Stiefel, Zum Satz von Pohlke, *Commentari Math. Helv.* **10**, 208–225.

[SZA78] J. Szabó, Az Eckhart-féle összemetszési eljárás egy általánosítása és annak néhány komputergrafikai alkalmazása, Disszertáció, Debrecen, 1978, pp. 149.

JÓZSEF SZABÓ
LAJOS KOSSUTH UNIVERSITATE
INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK
H–4010 DEBRECEN, PF.12.
HUNGARY

(Eingegangen am Junius 22, 1993)