Gleichseitige Hyperbel und Parallelogramme.

Von GYULA SZ.-NAGY in Szeged.

1. Ich werde hier den Satz beweisen:

I. *Ist $A_1B_1A_2B_2$ ein Parallelogramm Π, so ist der Ort der Punkte P in der Ebene, deren Abstände von den gegenüberliegenden Eckpunkten des Parallelogramms ein gleiches Produkt*

$$\overline{PA}_1 \,.\, \overline{PA}_2 = \overline{PB}_1 \,.\, \overline{PB}_2 \tag{1}$$

ergeben, eine gleichseitige Hyperbel H, die gleichseitige Hyperbel von Π. Der Mittelpunkt von H liegt im Schnittpunkt der Diagonalen von Π. Ist Π ein Rechteck (oder ein Quadrat), so zerfällt seine Hyperbel in die Mittelparallelen. Ist Π ein Rhombus, so liegen seine Diagonalen in den Asymptoten der Hyperbel H. Die gleichseitige Hyperbel H trennt das Punktpaar A_1A_2 vom Punktpaar B_1B_2.

Dieser Satz gilt auch dann, wenn das Parallelogramm Π degeneriert ist. Dann liegen die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 in einer Geraden und haben denselben Halbierungspunkt. Die eine Strecke kann in einen Punkt, in den Halbierungspunkt der anderen Strecke zusammenfallen.

Zum Beweis des Satzes I kann man annehmen, daß die Diagonale A_1A_2 von Π in der x-Achse liegt und vom Anfangspunkt des rechtwinkligen Koordinatensystems halbiert wird, so daß

$$A_1 = (a, 0),\ A_2 = (-a, 0),\ B_1 = (b, c),\ B_2 = (-b, -c) \text{ und } P = (x, y)$$

sind. Dann sind

$$\overline{PA}_1^2 \,.\, \overline{PA}_2^2 \equiv [(x-a)^2 + y^2]\ [(x^2+a)^2 + y^2] \equiv (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) + a^4$$

$$\overline{PB}_1^2 \,.\, \overline{PB}_2^2 \equiv [(x-b)^2 + (y-c)^2]\ [(x+b)^2 + (y+c)^2] \equiv$$
$$\equiv (x^2+y^2)^2 - 2(b^2-c^2)(x^2-y^2) - 8bcxy + (b^2+c^2)^2.$$

Daraus ergibt sich also die Gleichung

$$\overline{PA}_1^2\overline{PA}_2^2 - \overline{PB}_1^2\overline{PB}_2^2 \equiv 2(b^2-c^2-a^2)(x^2-y^2) + 8bcxy + a^4 - (b^2+c^2)^2 = 0. \tag{2}$$

Diese Gleichung stellt die gleichseitige Hyperbel des Parallelogramms Π dar. Verbindet eine beliebige Linie L einen der Punkte A_1 und A_2 mit einem der Punkte B_1 und B_2, so hat sie mit der Hyperbel (2) mindestens einen Punkt gemeinsam. Die linke Seite von (2) ist nämlich eine stetige Funktion des Punktes $P = (x, y)$ auf L, deren Wert am Anfang bzw. am Ende von L negativ bzw. positiv ist. Die Linie L tritt also die Hyperbel (2) mindestens einmal über. Die Punkte A_h $(h = 1, 2)$ werden also von den Punkten B_k $(k = 1, 2)$ durch die Hyperbel (2) getrennt.

Die Hyperbel (2) zerfällt dann und nur dann in zwei (senkrechte) Geraden, wenn $a^2 = b^2 + c^2$ ist, also $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \overline{OB_1} = \overline{OB_2}$ sind. Dann ist Π ein Rechteck. Ist Π ein Rhombus, so sind $b = 0$ und $c \neq 0$. Die Gleichung (2) hat dann die Form

$$-2(a^2 + c^2)(x^2 - y^2) + a^4 - c^4 = 0, \text{ oder } 2(x^2 - y^2) - (a^2 - c^2) = 0.$$

Die Koordinatenachsen sind also Achsen dieser Hyperbel. Die Hauptachse fällt in die Gerade der längeren Diagonalen des Rhombus. Ist Π degeneriert, so ist $c = 0$. Die Hyperbel (2) hat dann die Gleichung

$$2(b^2 - a^2)(x^2 - y^2) + a^4 - b^4 = 0 \text{ oder } 2(x^2 - y^2) - (a^2 + b^2) = 0.$$

Im Falle $b = c = 0$ erhält man den Satz

Bezeichnet 0 *den Halbierungspunkt der Strecke* F_1F_2, *so ist der Ort der Punkte* P *in der Ebene, für welche* $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = \overline{PO}^2$ *ist, eine gleichseitige Hyperbel mit den Brennpunkten* F_1 *und* F_2.

Die Hyperbel H^*

$$H(x, y) \equiv x^2 - y^2 - 1 = 0 \tag{3}$$

gehört z. B. den Parallelogrammen mit den Eckpunkten $(\pm\sqrt{3}, 0)$ und $(0, \pm 1)$; $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$ und $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$; bzw. $(\pm\sqrt{2}, 0)$ und $(0, 0)$.

Zu jedem Parallelogramm gibt es eine einzige gleichseitige Hyperbel. Eine gleichseitige Hyperbel gehört aber unendlichvielen Parallelogrammen an.

Die in die Koordinatenachsen zerfallende Hyperbel gehört offenbar den Rechtecken an, deren Mittelparallelen die Koordinatenachsen sind. Die zur Hyperbel H^* gehörigen Parallelogramme lassen sich auf folgende Weise konstruieren:

Bezeichnet 2ϱ die Hauptachsenlänge der gleichseitigen Hyperbel des Parallelogramms Π mit den Eckpunkten $(a, 0)$, (b, c), $(-a, 0)$ und $(-b, -c)$ $(b + c \neq 0)$, führt eine Drehung um den Punkt 0 die Hauptachse der Hyperbel (2) in die x-Achse und Π in das Parallelogramm Π' über und sind die Parallelogramme Π' und $\Pi'(\varrho)$ in bezug auf den Ähnlichkeitspunkt 0 ähnlich mit dem Verhältnis $\varrho : 1$ ihrer entsprechenden Diagonalen, so gehört H^* zu $\Pi'(\varrho)$. Das Parallelogramm Π bzw. seine gleichseitige Hyperbel wird nämlich durch die Drehung und dann durch die Ähnlichkeitstansformation in $\Pi'(\varrho)$ bzw. H^* überführt.

2. Über die eingeschriebenen Parallelogramme einer gleichseitigen Hyperbel gilt der Satz

II. *Liegen die Eckpunkte eines Parallelogramms* Π *auf einer gleichseitigen Hyperbel* H, *so sind die Winkel, unter denen die gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms von einem beliebigen Punkte der Hyperbel aus erscheinen, entweder gleich oder supplementär.*

Zum Beweis dieses Satzes kann man annehmen, daß H die Hyperbel (3) ist. Sind $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, so ist

$$(z^2 - 3)(\bar{z}^2 - 3) - (z^2 + 1)(\bar{z}^2 + 1) \equiv -8\, H(x, y). \tag{4}$$

Diese Identität drückt aus, daß die Hyperbel H^* zu dem Rhombus mit den Eckpunkten $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $(0, \pm 1)$ gehört, weil

$$(z^2-3)(\bar{z}^2-3) \equiv |z^2-3|^2 \text{ und } (z^2+1)(\bar{z}^2+1) \equiv |z^2+1|^2$$

sind. Die Hyperbel H^* läßt sich durch die Gleichung

$$|z^2-3|^2-|z^2+1|^2=0 \tag{5}$$

darstellen. Genügen die konjugiert komplexen Zahlen z und $\bar{z}$ dieser Gleichung, so liegen die Punkte z und $\bar{z}$ der komplexen Ebene auf der Hyperbel H^*. Liegt der Punkt $P=(x, y)$ auf H^*, so sind $z=x+iy$ und $\bar{z}=x-iy$ Wurzeln von (5).

Die Nullstellen z und $-z$ jedes Polynoms von der Form

$$(z^2-3)+e^{i\varphi}(z^2+1)$$

genügen der Gleichung (5). Diese Punkte liegen auf der Hyperbel H^* und ihre Verbindungsstrecke ist ein Durchmesser von H^*.

Ist $A_1B_1A_2B_2$ ein der gleichseitigen Hyperbel H^* eingeschriebenes Parallelogramm, so sind die zu A_1, A_2 bzw. B_1, B_2 gehörigen komplexen Zahlen a, $-a$ bzw. b, $-b$ Nullstellen eines Polynoms von der Form

$$\begin{aligned} f(z)&=(z^2-3)+e^{i\alpha}(z^2+1)=(1+e^{i\alpha})(z^2-a^2) \text{ bzw.} \\ g(z)&=(z^2-3)+e^{i\beta}(z^2+1)=(1+e^{i\beta})(z^2-b^2). \end{aligned} \tag{6}$$

Sind U, V, λ und μ beliebige Zahlen und bezeichnet $\bar{U}$ bzw. $\bar{V}$ die konjugierte der Zahl U bzw. V, so besteht die Identität

$$(U+\lambda V)(\bar{U}+\mu\bar{V})-(V+\mu U)(\bar{V}+\lambda\bar{U}) \equiv (1-\lambda\mu)(U\bar{U}-V\bar{V}) \tag{7}$$

Sind

$$U=z^2-3,\ V=z^2+1,\ \lambda=e^{i\alpha},\ \mu=e^{-i\beta},\ \lambda\mu \neq 1,$$

so sind

$$U+\lambda V=f(z),\ V+\mu U=e^{-i\beta}g(z),\ \bar{U}+\mu\bar{V}=\bar{g}(\bar{z}),\ \bar{V}+\lambda\bar{U}=e^{i\alpha}\bar{f}(\bar{z}),$$
$$f(z)=(1+e^{i\alpha})(z^2-a^2),\ \bar{f}(\bar{z})=(1+e^{-i\alpha})(\bar{z}^2-\bar{a}^2),\ g(z)=(1+e^{i\beta})(z^2-b^2),$$
$$\bar{g}(\bar{z})=(1+e^{-i\beta})(\bar{z}^2-\bar{b}^2) \text{ und } U\bar{U}-V\bar{V}=-8H(x, y).$$

Aus (7) ergibt sich also die Identität

$$f(z)\,\bar{g}(\bar{z})-e^{i(\alpha-\beta)}g(z)\,\bar{f}(\bar{z}) \equiv -8(1-e^{i(\alpha-\beta)})\,H(x, y).$$

Ist (x, y) ein beliebiger Punkt der Hyperbel H^* $(H(x, y)=0)$ und ist $z=x+iy$, so besteht also die Gleichung

$$(1+e^{i\alpha})(1+e^{-i\beta})(z^2-a^2)(\bar{z}^2-\bar{b}^2)-e^{i\alpha}(1+e^{-i\alpha})e^{-i\beta}(1+e^{i\beta})(z^2-b^2)(\bar{z}^2-\bar{a}^2)=0,$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{z^2-b^2}{z^2-a^2}\,\frac{\bar{z}^2-\bar{a}^2}{\bar{z}^2-\bar{b}^2} &\equiv \left(\frac{z-b}{z-a}\,\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{z}-\bar{b}}\right)\left(\frac{z+b}{z+a}\,\frac{\bar{z}+\bar{a}}{\bar{z}+\bar{b}}\right) \equiv \\ &\equiv \left(\frac{z-b}{z+a}\,\frac{\bar{z}+\bar{a}}{\bar{z}-\bar{b}}\right)\left(\frac{z+b}{z-a}\,\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{z}+\bar{b}}\right)=1. \end{aligned} \tag{8}$$

Der Winkel, unter dem eine Seite des Parallelogramms $A_1B_1A_2B_2$ von einem Punkt P der Hyperbel H^* aus erscheint, ist kleiner als π, weil P auf keiner Seite des Parallelogramms liegt.

Bezeichnet ω_1, ω_2, ω_1' bzw. ω_2' den (mit Vorzeichen versehenen) Winkel ($|\omega_1|, |\omega_2|, |\omega_1'|, |\omega_2'| < \pi$), unter dem der Vektor $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{A_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{A_2B_1}$ von einem Punkt z der Hyperbel H^* aus erscheint, so sind

$$\omega_1 = \operatorname{arc}\frac{b-z}{a-z} \equiv \operatorname{arc}\frac{z-b}{z-a} \equiv \operatorname{arc}\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{z}-\bar{b}}, \quad \omega_2 = \operatorname{arc}\frac{z+b}{z+a} = \operatorname{arc}\frac{\bar{z}+\bar{a}}{\bar{z}+\bar{b}},$$

$$\omega_1' = \operatorname{arc}\frac{z+b}{z-a} = \operatorname{arc}\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{z}+\bar{b}} \quad \text{und} \quad \omega_2' = \operatorname{arc}\frac{z-b}{z+a} \equiv \operatorname{arc}\frac{\bar{z}+\bar{a}}{\bar{z}-\bar{b}}.$$

Aus der Gleichung (8) ergeben sich also die Winkelkongruenzen

$$2\omega_1 + 2\omega_2 \equiv 0 \text{ und } 2\omega_1' + 2\omega_2' \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2\pi),$$

oder

$$\omega_1 + \omega_2 \equiv 0 \text{ und } \omega_1' + \omega_2' \equiv 0 \qquad (\text{mod } \pi).$$

Hieraus erhält man wegen der Ungleichungen $|\omega_1| < \pi$ und $|\omega_2| < \pi$, daß $|\omega_1 + \omega_2| = 0$ oder $|\omega_1 + \omega_2| = \pi$ ist. Im ersten bzw. zweiten Falle ist also $|\omega_1| = |\omega_2|$ bzw. $|\omega_1| + |\omega_2| = \pi$. Entsprechende Relationen bestehen auch für die Winkel ω_1' und ω_2'. Damit ist der Satz II bewiesen.

Beim Beweis läßt sich der Rhombus mit den Eckpunkten $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $(0, \pm 1)$ durch ein zu H^* gehöriges anderes Parallelogramm ersetzen.

Dem Satz II entspricht der folgende Satz eines Kreises: Von einem Punkt eines Kreises aus erscheinen die gegenüberliegenden Seiten eines eingeschriebenen Rechteckes unter gleichen oder supplementären Winkeln, und zwar: für das eine Paar der gegenüberliegenden Seiten sind diese Winkel gleich, für das andere Paar aber supplementär.

Der Satz II läßt sich auf folgende Weise ergänzen:

Liegen die Eckpunkte A_1 und B_1 eines der gleichseitigen Hyperbel H eingeschriebenen Parallelogramms $A_1B_1A_2B_2$ auf demselben Teil von H und bezeichnet γ_1 bzw. γ_2 den zur Seite A_1B_1 bzw. A_2B_2 gehörigen (endlichen) Hyperbelbogen, so erscheinen die gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms von einem Punkte der Bogen γ_1 und γ_2 aus unter supplementären Winkeln, von einem außerhalb beider Bogen liegenden Punkte der Hyperbel aus aber unter gleichen Winkeln.

Dies ist klar, wenn der Hyperbelpunkt z genug weit liegt, weil dann $|\omega_1| + |\omega_2| < \pi$ und $|\omega_1'| + |\omega_2'| < \pi$ und deshalb $\omega_1 + \omega_2 = 0$ und $\omega_1' + \omega_2' = 0$ sind. Bewegt sich nun ein Punkt z auf der Hyperbel stetig ohne irgendeinen Eckpunkt des Parallelogramms zu übertreten, so verändern sich die Winkel ω_1, ω_2, ω_1', ω_2' inzwischen stetig. Übertritt aber z z. B. den Punkt A_1, so springen die Winkel ω_1 und ω_2' um π, die Winkel ω_2 und ω_1' verändern sich aber stetig. Daraus folgt die Richtigkeit der Ergänzung.

3. Fallen die Halbierungspunkte der Strecken $\overline{P_1P_3}$ und $\overline{P_2P_4}$ nicht zusammen, so ist der Ort der Punkte P, für die

$$\overline{PP_1}\,\overline{PP_3} = \overline{PP_2}\,\overline{PP_4}, \quad \text{oder} \quad \overline{PP}_1^2\,\overline{PP}_3^2 - \overline{PP}_2^2\,\overline{PP}_4^2 = 0 \tag{9}$$

ist, eine zirkulare Kurve C dritter Ordnung, weil die zweite Gleichung von (9) in rechtwinkligen Koordinaten die Form

$$(ax+by)(x^2+y^2)+cx^2+dxy+ey^2+fx+gy+h=0 \tag{10}$$

besitzt. Hier weicht mindestens eine der Zahlen a und b von Null ab, weil

$$.a = 2[(x_2+x_4)-(x_1+x_3)] \text{ und } b = 2[(y_2+y_4)-(y_1+y_3)]$$

sind. Die Asymptote der Kurve C ist parallel zur Geraden $ax+by=0$ also senkrecht zur Verbindungsgeraden der Halbierungspunkte der Strecken P_1P_3 und P_2P_4, wenn $P_k=(x_k, y_k)$ $(k=1,2,3,4)$ sind.

Sind die Strecken P_1P_2 und P_3P_4 symmetrisch bezüglich einer Geraden g, so hat die Kurve C offenbar keinen reellen Punkt außerhalb der Geraden g. Dann zerfällt die Kurve C in die Gerade g und in einen Kreis mit imaginären Halbmesser. Dieser Fall kommt vor, wenn das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein gleichschenkliges Trapez ist, dessen paralelle Seiten P_1P_3 und P_2P_4 sind.

4. Die Gleichung

$$\overline{PP}_1^2\,\overline{PP}_2^2 - \varrho^4 = 0 \quad (\varrho > 0) \tag{11}$$

stellt in rechtwinkligen Koordinaten eine Cassinische Kurve vierter Ordnung vom Radius ϱ her.

Die Potenz Π^* eines beliebigen Punktes P der Ebene in bezug auf die Kurve (11) bedeutet den Wert der linken Seite von (11) im Punkt P Bezeichnen r_1, r_2, r_3, r_4 die Längen der Strecken, die auf einer Geraden g durch P von P bis an die Kurve reichen, so ist $\Pi^* = r_1r_2r_3r_4$ und Π^* ist von g unabhängig.[1])

Die Punkte der Ebene, die in bezug auf die Cassinische Kurven von demselben Radius ϱ

$$\Pi_1^* \equiv \overline{PP}_1^2\,\overline{PP}_2^2 - \varrho^4 = 0 \text{ und } \Pi_2^* \equiv \overline{PP}_3^2\,\overline{PP}_4^2 - \varrho^4 = 0$$

gleiche Potenzen besitzen, liegen auf der *Potenzlinie* der zwei Kurven. Sie hat die Gleichung

$$\Pi_1^* - \Pi_2^* \equiv \overline{PP}_1^2\,\overline{PP}_2^2 - \overline{PP}_3^2\,\overline{PP}_4^2 = 0.$$

Aus dem Vorangehenden folgt also der Satz

III. *Die Potenzlinie von zwei Cassinischen Kurven, wenn sie denselben Radius und dasselbe Symmetriezentrum* 0 *haben, ist eine gleichseitige Hyperbel mit dem Mittelpunkt* 0. *Haben die Cassinischen Kurven denselben Radius aber verschiedene Symmetriezentra, so ist ihre Potenzlinie eine zirkulare Kurve dritter Ordnung, deren Asymptote zur Verbindungsgeraden der Symmetriezentra senkrecht ist.*

(Eingegangen am 15. Januar, 1949.)

---

[1]) Gy. Sz.-Nagy, Merkwürdige Punktgruppen bei allgemeinen Lemniskaten, *Acta Scientiarum Math. Szeged*, **13** (1949), 1—13.