Zentralsymmetrisierung konvexer Körper.

Von GYULA SZ.-NAGY in Szeged.

1. Die größte Sehne (oder eine der größten Sehnen) eines konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ in einer Richtung u ist der Durchmesser $d(u)$ von $\mathfrak{K}$ in der betreffenden Richtung. Verschiebt man die Durchmesser von $\mathfrak{K}$, so daß ihre Halbierungspunkte in einem festen Punkt 0 zusammenfallen, so bildet die Punktmenge der verschobenen Durchmesser einen in bezug auf 0 symmetrischen konvexen Körper $\mathfrak{K}_1^*$.

Der konvexe Körper $\mathfrak{K}$ hat in jeder Richtung u zwei Stützebenen, deren Abstand von ihrer Mittelebene halbiert wird. Verschiebt man die Paare der parallelen Stützebenen von $\mathfrak{K}$, so daß ihre Mittelebenen durch 0 gehen, so stützen die verschobenen Ebenenpaare einen konvexen Körper $\mathfrak{K}_2^*$ vom Mittelpunkt 0. Die Körper $\mathfrak{K}_1^*$ und $\mathfrak{K}_2^*$ stimmen überein. Der Körper $\mathfrak{K}^* \equiv \mathfrak{K}_1^* \equiv \mathfrak{K}_2^*$ ist der zentralsymmetrisierte von $\mathfrak{K}$. Die orthogonalen Projektionen von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$ haben in einer beliebigen Richtung u denselben Umfang.

$\mathfrak{K}^*$ ist ein im Verhältnis $1:2$ verkleinerter Vektorkörper von $\mathfrak{K}$ [1]).

Der Vektorkörper eines konvexen Körpers spielt in der neuesten Literatur eine wichtige Rolle[2]). Ich habe die vorher genannten Sätze in einer ungarischen Arbeit[3]) elementar und anschaulich bewiesen. Meine Beweise wurden wegen ihrer Sprache nicht bekannt. Ich möchte ihnen in einer vereinfachten und ergänzten Form eine größere Öffentlichkeit geben.

2. Bezeichnen A_1A_2 und B_1B_2 bzw. $A_1^*A_2^*$ und $B_1^*B_2^*$ zwei beliebige Durchmesser von $\mathfrak{K}$ bzw. ihre Lage nach der Verschiebung, so sind A_1A_2 und $A_1^*A_2^*$ bzw. B_1B_2 und $B_1^*B_2^*$ gleich und parallel. $A_1^*A_2^*$ und $B_1^*B_2^*$ halbieren sich in 0. Der Körper $\mathfrak{K}_1^*$ ist konvex, weil er jeden Punkt P_1^* der Strecke $A_1^*B_1^*$ enthält. Sind die Verteilungsverhältnisse $\lambda = (A_1^*B_1^*P_1^*) = (A_2^*B_2^*P_2^*) = (A_1B_1P_1) = (A_2B_2P_2)$, so sind die Strecken $P_1^*P_2^*$ und P_1P_2 gleich und

[1]) T. BONNESEN – W. FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934, S. 73.

[2]) P. VINCENSINI, Corps convexes. Séries linéaires. Domaines vectoriels, Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. XCIV (1938).

[3]) JULIUS (GYULA) v. SZ. NAGY, Über die Zentralen der konvexen Flächen, *Math. naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* Bd. 48 (1932), S. 832–847.

parallel. Sind nämlich $\lambda = (A_2^* B_1^* Q_1^*) = (A_2 B_1 Q_1)$, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $A_1^* A_2^* B_1^*$, $P_1^* Q_1^* B_1^*$ und $A_1 A_2 B_1$, $P_1 Q_1 B_1$, und aus Gleichheit und Parallelität von $A_1 A_2$ und $A_1^* A_2^*$, daß die Dreiecke $P_1^* Q_1^* B_1^*$ und $P_1 Q_1 B_1$ kongruent und $P_1^* Q_1^*$ und $P_1 Q_1$ gleich und parallel sind. Aus ähnlichen Gründen sind auch $Q_1^* P_2^*$ und $Q_1 P_2$ gleich und parallel. Daraus folgt, daß die Dreiecke $P_1^* P_2^* Q_1^*$ und $P_1 P_2 Q_1$ gleiche und parallele Seiten besitzen. Die Strecke $P_1^* P_2^*$ liegt in $\mathfrak{K}_1^*$, weil auch die konvexe Hülle von $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ (also ein Teil von $\mathfrak{K}$) eine zu $P_1^* P_2^*$ parallele und gleiche Sehne $P_1 P_2$ enthält. Damit ist bewiesen, daß $\mathfrak{K}_1^*$ konvex ist.

3. Sind a_1 und a_2 parallele Stützebenen von $\mathfrak{K}$ durch die Endpunkte des Durchmessers $A_1 A_2$ so stützen die zu a_1 parallelen Ebenen durch die Endpunkte des zu $A_1 A_2$ parallelen Durchmessers $A_1^* A_2^*$ von $\mathfrak{K}_1^*$ den Körper $\mathfrak{K}_1^*$.

Dies läßt sich leicht einsehen, wenn man 0 in den Halbierungspunkt von $A_1 A_2$ setzt. Dann stimmen $A_1^* A_2^*$ und $A_1 A_2$ überein und die Ebenen a_1 und a_2 stützen auch $\mathfrak{K}_1^*$. Widrigenfalls hätte $\mathfrak{K}$ eine Sehne durch 0, deren Endpunkte außerhalb des parallelen Ebenenpaares $a_1 a_2$ lägen. Dann hätte aber die zu dieser Sehne parallele Durchmesser von $\mathfrak{K}$ mindestens einen Endpunkt außerhalb des Ebenenpaares $a_1 a_2$.

4. Sind a_1^* und a_2^* parallele Stützebenen durch die Endpunkte eines Durchmessers $A_1^* A_2^*$ von $\mathfrak{K}_1^*$, so stützen die zu a_1^* parallelen Ebenen durch die Endpunkte des zu $A_1^* A_2^*$ parallelen Durchmessers von $\mathfrak{K}$ diesen konvexen Körper.

Zum Beweis dieser Behauptung setzt man den Punkt O in A_2 und dann vergrößert man den erhaltenen Körper $\mathfrak{K}_1^*$ bezüglich von $O \equiv A_2$ im Verhältnis $1:2$ in einen konvexen Körper $\mathfrak{K}'$. Die zu a_1^* parallele Ebene a_1' durch A_1 ist eine Stützebene von $\mathfrak{K}'$ und auch von $\mathfrak{K}$, weil $\mathfrak{K}$ an der A_2 nicht enthaltenden Seite von a_1' keinen Punkt P besitzt. Widrigenfalls wäre die Strecke $A_2 P = OP$ von $\mathfrak{K}$ größer als ihre in $\mathfrak{K}'$ fallende Teilstrecke, welche dem zu $A_2 P$ parallelen Durchmesser von $\mathfrak{K}_1^*$ gleich ist. Die Körper $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1^*$ haben also in jeder Richtung gleiche Durchmesser.

5. Die zu den parallelen Stützebenen durch die Endpunkte eines Durchmessers $A_1 A_2$ von $\mathfrak{K}$ parallelen Ebenen durch die Endpunkte des zu $A_1 A_2$ parallelen Durchmessers von $\mathfrak{K}_1^*$ sind also Stützebenen von $\mathfrak{K}_1^*$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{K}_1^* \equiv \mathfrak{K}_2^* \equiv \mathfrak{K}^*$ ist. $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$ haben also in jeder Richtung u gleiche Breiten und gleiche Durchmesser. Dasgleiche gilt offenbar auch für einen konvexen Bereich $\mathfrak{B}$ und für seinen zentralsymmetrisierten $\mathfrak{B}^*$.

6. Die konvexen Bereiche $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ haben gleiche Umfänge.

Dies ist klar, wenn $\mathfrak{B}$ ein Dreieck ist. Dann ist $\mathfrak{B}^*$ ein Sechseck, dessen Seiten und Hauptdiagonalen zu den Seiten von $\mathfrak{B}$ parallel sind. Die Hauptdiagonalen halbieren sich in O. Die Seiten von $\mathfrak{B}^*$ sind halb so groß, wie die paralelle Seite von $\mathfrak{B}$.

Ist a eine Seite eines konvexen Vielecks $\mathfrak{B}$ und enthält die zu a parallele Stützgerade von $\mathfrak{B}$ nur einen Stützpunkt A, so ist jede Verbindungsstrecke von A und eines beliebigen Punktes der Seite a ein Durchmesser von $\mathfrak{B}$. Bei dem zentralsymmetrisierten liegen die Endpunkte dieser Durchmesser auf zwei zu a parallelen Strecken von den Längen $\frac{a}{2}$. Liegen die Stützpunkte der zu a parallelen Stützgeraden auf einer Seite von $\mathfrak{B}$ mit der Länge b, so sind die Verbindungstrecken der Punkte von a und b Durchmesser von $\mathfrak{B}$. Die Endpunkte der parallelen Durchmesser von $\mathfrak{B}^*$ füllen offenbar zwei parallele gleiche Strecke von der Länge $\frac{a+b}{2}$. Hieraus folgt, daß die Vielecke $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ gleiche Umfänge besitzen. Daraus folgt der Satz für einen beliebigen konvexen Bereich $\mathfrak{B}$ und für seinen zentralsymmetrisierten $\mathfrak{B}^*$, wenn man ihn durch eingesch iebene Vielecke annähert, deren Ecken Endpunkte gewisser paarweise parallelen Durchmesser von $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ sind. Damit ist bewiesen, daß die orthogonale Projection von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$ gleiche Umfänge besitzen.

Sind A_1A_2 und B_1B_2 bzw. $A_1^*A_2^*$ und $B_1^*B_2^*$ Durchmesser eines konvexen Bereiches $\mathfrak{B}$ bzw. die parallelen Durchmesser seines zentralsymmetrisierten $\mathfrak{B}^*$ und bezeichnen s_1, s_2 bzw. s_1^*, s_2^* die Bogenlängen A_1B_1, A_2B_2 bzw. $A_1^*B_1^*$, $A_2^*B_2^*$ auf der Randkerve von $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$, so folgt aus dem obigen Beweis, daß $s_1+s_2=s_1^*+s_2^*=2s_1^*=2s_2^*$ sind.

7. Besitzt die Randkurve C von $\mathfrak{B}$ überall einen stetigen Krümmungsradius, so besitzt offenbar auch die Randkurve C^* von $\mathfrak{B}^*$ diese Eigenschaft.

Während ein Punkt P sich auf C von A_1 bis B_1 bewegt, dreht sich die zugehörige Stützgerade (Tangente) um einen Winkel α, um die Totalkrümmung des Bogens A_1B_1 von C Offenbar haben die Bogen A_1B_1, A_2B_2 bzw. $A_1^*B_1^*$, $A_2^*B_2^*$ auf C bzw. C^* dieselbe Totalkrümmung α. (A_1A_2 und B_1B_2 bzw. $A_1^*A_2^*$ und $B_1^*B_2^*$ sind Durchmesser von $\mathfrak{B}$ bzw. die parallelen Durchmesser von $\mathfrak{B}^*$.) Während nämlich P den Bogen A_1B_1 beschreibt, dreht sich die zugehörige Stützgerade g von $\mathfrak{B}$ und seine zu g parallele Stützgerade, sowie jede zu g parallele Stützgerade von $\mathfrak{B}^*$ um denselben Winkel α. Ist s_1 die Länge des Bogens A_1B_1 von C, so wird der Krümmungsradius von C im Punkt A_1 durch den Grenzwert

$$\varrho_1 = \lim_{B_1 \to A_1 (\alpha \to 0)} \frac{s}{\alpha}$$

definiert. Aus den Gleichungen $s_1+s_2=s_1^*+s_2^*=2s_1^*=2s_2^*$ folgen also die Gleichungen

$$\varrho_1+\varrho_2=\varrho_1^*+\varrho_2^*=2\varrho_1^*=2\varrho_2^*,$$

wo ϱ_1, ϱ_2 bzw. ϱ_1^*, ϱ_2^* die Krümmungsradien von C in den Punkten A_1, A_2 bzw. diejenigen von C^* in den Punkten A_1^*, A_2^* bedeuten.

Dieser Satz entspricht einem Satz von P. VINCENSINI[4]) über den Vektorbereich eines konvexen Bereichs.

Der zentralsymmetrisierte eines konvexen Bereichs konstanter Breite B ist ein Kreis von Durchmesser B. Die Krümmungsradien in den Endpunkten eines Durchmessers von einer Kurve konstanter Breite ergeben also eine konstante Summe, die Breite der Kurve.

8. Hat der konvexe Körper $\mathfrak{K}$ den Mittelpunkt O, so fällt er mit seinem zentralsymmetrisierten $\mathfrak{K}^*$ zusammen. Hat aber $\mathfrak{K}$ keinen Mittelpunkt, so kann man sich die Gestalt von $\mathfrak{K}^*$ nicht leicht vorstellen. Ist z. B. $\mathfrak{K}$ ein regelmäßiges Tetraeder, so ist $\mathfrak{K}^*$ ein Kubooktaeder. Dieser Körper entsteht, wenn man aus einem Würfel oder aus einem regelmäßigen Oktaeder bei seinen Ecken je eine dreiseitige bzw. vierseitige Pyramide abschneidet, deren Seitenkanten Hälften von Kanten des Würfels bzw. Oktaeders sind. Ein Kubooktaeder hat also 8 Ecken, 12 (gleiche) Kanten und wird von 8 Dreiecken und 6 Quadraten begrenzt.

Ist $\mathfrak{K}$ ein beliebiges Tetraeder, so wird $\mathfrak{K}^*$ von 8 Dreiecken und von 6 Parallelogrammen begrenzt. Jede Seite dieser 14 Polygone ist parallel zu einer Kante von $\mathfrak{K}$ und halb so lang ist, als diese.

Ein beliebiger Durchmesser des Tetraeders verbindet nämlich entweder eine Ecke mit einem Punkt des gegenüberliegenden Randdreiecks von $\mathfrak{K}$, oder je einen Punkt von zwei windschiefen Kanten. Die Endpunkte der parallelen Durchmesser von $\mathfrak{K}^*$ liegen auf zwei parallelen und kongruenten Dreiecken bzw. Parallelogrammen, je nachdem sie zu den Durchmessern der ersten bzw. zweiten Art im Tetraeder $\mathfrak{K}$ parallel sind.

(Eingegangen am 15. Januar 1949.)

[4]) A. a. O., S. 24.