Eine Verallgemeinerung der Inhaltsformel von Heron.

Von L. RÉDEI und B. SZ.-NAGY in Szeged.

1. Für den Inhalt I eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c gilt nach HERON

$$16I^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2. \tag{1}$$

Nach einer wenig bekannten Formel von STAUDT[1]) gilt für den Inhalt I eines ebenen Vierecks mit den Seiten a, b, c, d und den Diagonalen e, f:

$$16I^2 = 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2, \tag{2}$$

wobei a, c (und ebenfalls b, d) einander gegenüberliegen.

Diese Formeln lassen sich auf das Inhaltsquadrat eines Polygons und sogar auf das Produkt der Inhalte zweier Polygone verallgemeinern. Geben wir in den Ebene zwei geschloßene (nicht notwendig einfache) Polygone (ein m-Eck und ein n-Eck) mit den Ecken $A_1, \ldots, A_m$ bzw. $B_1, \ldots, B_n$ an ($m, n \geqq 3$), so daß diese bei einer Umlaufung der Polygonzüge in den angegebenen Reihenfolgen aufeinanderfolgen. Den Inhalt bezeichnen wir bzw. mit

$$I = I(A_1, \ldots, A_m),\ J = J(B_1, \ldots, B_n), \tag{3}$$

die wir wie üblich definieren, d. h. wir versehen die Ebene mit einem Richtungssinn, nach dem dann dem Dreiecksinhalt ein festes Vorzeichen zukommt, nehmen einen festen Punkt O und setzen

$$I = I(O, A_1, A_2) + I(O, A_2, A_3) + \ldots + I(O, A_{m-1}, A_m) + I(O, A_m, A_1)$$

(und entsprechend für J); wie bekannt, ist das Ergebnis von der Wahl von O unabhängig.

Wir beweisen den folgenden

Satz 1. *Es gilt*

$$16IJ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} r_{ik}^2 & r_{i,k+1}^2 \\ r_{i+1,k}^2 & r_{i+1,k+1}^2 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

wobei r_{ik} die Entfernung von A_i, B_k bezeichnet[2]). *Durch Identifizieren beider*

---

[1]) CHR. V. STAUDT, Über die Inhalte der Polygone und Polyeder, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **24** (1842), 252–256.

[2]) In (4) kommen i, k nur mod m bzw. mod n in Betracht (d. h. z. B $r_{n+1,k} = r_{ik}$) Ähnliche Kerrektionen sind auch später oft durchzuführen.

Polygone folgt hieraus:

$$16I^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \begin{vmatrix} s_{ik}^2 & s_{i,k+1}^2 \\ s_{i+1,k}^2 & s_{i+1,k+1}^2 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

wobei $s_{ik} = s_{ki}$ *die Entfernung von* A_i, A_k *bezeichnet. Beide Formeln sind im folgenden Sinne eindeutig: Weder die rechte Seite von* (4) *noch die von* (5) *ist durch ein anderes Polynom vom vierten Grade der Unbestimmten* r_{ik} $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$ *bzw. der Unbestimmten* s_{ik} $(i < k;\ i, k = 1, \ldots, m)$ *ersetzbar.*

Beispiele. Für den Inhalt I des Fünfecks gilt

$$16I^2 = \sum_{i=1}^{5} (2a_i^2a_{i+1}^2 + 2d_i^2d_{i+1}^2 - 2a_i^2d_i^2 - a_i^4),$$

wobei $a_1, \ldots, a_5$ (in der Reihenfolge einer Umlaufung) die Seiten und $d_1, \ldots, d_5$ je die gegenüberliegende Diagonale bezeichnen.

Für das Produkt der Inhalte I, J zweier Dreiecke mit den Ecken P, Q, R bzw. $1, 2, 3$ gilt

$$16IJ = \sum (P_1^2Q_2^2 - P_2^2Q_1^2),$$

wobei man über alle zyklischen Permutationen von P, Q, R und $1, 2, 3$ zu summieren hat und z. B. P_1 die Entfernung der Punkte $P, 1$ bezeichnet.

Bemerkung. Wohl ist (5) ein Spezialfall von (4), aber die Eindeutigkeit von (5) folgt keineswegs aus der von (4). Der Eindeutigkeitsbeweis von (5) wird uns mehr Mühe kosten als der von (4).

Nach der sogenannten Vierpunktrelation von EULER[3]) gilt

$$\begin{vmatrix} 0 & s_{ij}^2 & s_{ik}^2 & s_{il}^2 & 1 \\ s_{ji}^2 & 0 & s_{jk}^2 & s_{jl}^2 & 1 \\ s_{ki}^2 & s_{kj}^2 & 0 & s_{kl}^2 & 1 \\ s_{li}^2 & s_{lj}^2 & s_{lk}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Die Eindeutigkeit von (5) steht mit (6) in keinem Widerspruch, weil (6) homogen vom sechsten Grade ist. Beim Beweis werden wir von (6) keinen Gebrauch machen.

Beweis der Formeln (4), (5). Wir führen in unserer Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O ein und bezeichnen mit

$$\mathfrak{a}_i = (x_i, y_i),\ \mathfrak{b}_k = (\xi_k, \eta_k)$$

die Ortsvektoren der Punkte A_i, B_k $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$. Nach der Formel

$$2I(O, A_i, A_{i+1}) = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_i \\ \mathfrak{a}_{i+1} \end{vmatrix}$$

[3]) S. z. B. H. Dörrie, *Triumph der Mathematik*, Breslau 1933, S. 286.

gilt

$$4IJ = \sum_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_i \\ \mathfrak{a}_{i+1} \end{vmatrix} \cdot \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} \mathfrak{b}_k \\ \mathfrak{b}_{k+1} \end{vmatrix} = \sum_i \sum_k \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_k & \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_{k+1} \\ \mathfrak{a}_{i+1} \mathfrak{b}_k & \mathfrak{a}_{i+1} \mathfrak{b}_{k+1} \end{vmatrix}$$

wobei $\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_k$ das innere Produkt von $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_k$ bezeichnet. Andererseits gilt

$$2\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_k = \mathfrak{a}_i^2 + \mathfrak{b}_k^2 - r_{ik}^2,$$

und so folgt

$$(7) \qquad 16IJ = \sum_i \sum_k \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_i^2 + \mathfrak{b}_k^2 - r_{ik}^2 & \mathfrak{a}_i^2 + \mathfrak{b}_{k+1}^2 - r_{i,k+1}^2 \\ \mathfrak{a}_{i+1}^2 + \mathfrak{b}_k^2 - r_{i+1,k}^2 & \mathfrak{a}_{i+1}^2 + \mathfrak{b}_{k+1}^2 - r_{i+1,k+1}^2 \end{vmatrix}.$$

Um (4) zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß in (7) (nach der Entwicklung der Determinanten) die Glieder herausfallen, die entweder von allen r_{ik} frei sind oder nur einen Faktor r_{ik}^2 enthalten. Die Summe der erstgenannten Glieder berechnet sich leicht zu

$$\sum_i \sum_k (\mathfrak{a}_i^2 - \mathfrak{a}_{i+1}^2)(\mathfrak{b}_{k+1}^2 - \mathfrak{b}_k^2);$$

diese verschwindet sogar beim Summieren über k. Die Koeffizientensumme von r_{ik}^2 ist

$$-(\mathfrak{a}_{i+1}^2 + \mathfrak{b}_{k+1}^2) + (\mathfrak{a}_{i+1}^2 + \mathfrak{b}_{k-1}^2) + (\mathfrak{a}_{i-1}^2 + \mathfrak{b}_{k+1}^2) - (\mathfrak{a}_{i-1}^2 + \mathfrak{b}_{k-1}^2) = 0,$$

womit (4), also auch (5), bewiesen ist.

B e w e i s d e r E i n d e u t i g k e i t v o n (4), (5). Existiert neben (4) und (5) je eine zweite Formel für $16IJ$ bzw. $16I^2$ von der im Satz 1 verlangten Art, so bekommt man als Differenz der entsprechenden rechten Seiten je ein nicht identisch verschwindendes Polynom vom Grade ≤ 4 der Unbestimmten r_{ik} $(i=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,n)$ bzw. s_{ik} $(i<k;\ i,k=1,\ldots,m)$,[4]) etwa

$$f(r_{11},\ldots,r_{mn}),\ g(s_{12},\ldots,s_{m-1,m}),$$

die aber nach der Ausführung der Substitutionen

$$r_{ik} = \sqrt{(x_i - \xi_k)^2 + (y_i - \eta_k)^2} \text{ bzw. } s_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}$$

verschwinden[5]). Wenn wir diese Substitutionen kurz mit dem Zeichen [] andeuten, dann wäre also $f \neq 0$, aber $[f]=0$, und $g \neq 0$, aber $[g]=0$. Die Unmöglichkeit hiervon und zugleich die Richtigkeit des Satzes 1 werden wir bewiesen haben, wenn wir etwas allgemeiner den folgenden Hilfssatz zeigen:

H i l f s s a t z. *Für irgendwelche Polynome f, g vom Grade $p \leq 4$ der Unbestimmten r_{ik} bzw. s_{ik} zieht eine der Gleichungen $[f]=0$, $[g]=0$ auch die Gleichung $f=0$ bzw. $g=0$ nach sich.*

---

[4]) Hier sind also, im Gegensatz zu unserer obigen Bezeichnung, die r_{ik} und die s_{ik} als (unabhängige) Unbestimmte anzusehen.

[5]) Dieses Verschwinden ist so gemeint, daß die x_i, y_i, ξ_k, η_k beliebige reelle Zahlen sein dürfen und r_{ik}, s_{ik} den nichtnegativen Wert obiger Quadratwurzeln bezeichnen.

Offenbar genügt, nur solche Polynome zu betrachten, die *homogen* vom Grade $p \leqq 4$ sind.

Für $p=0$ ist die Behauptung trivial. Sei $p \geqq 1$ und nehmen wir an, daß der Hilfssatz für Polynome vom Grade $p-1$ schon bewiesen ist.

Sei f ein Polynom vom Grade p, so daß $[f]=0$. Wir nehmen an, daß doch $f \neq 0$ ist und zeigen zunächst, daß dann f die r_{ik} nur zu gerader Potenz enthalten kann (d. h. f ein Polynom der r_{ik}^2 ist). Wäre es dem nicht so, d. h. würde es ein Glied von f geben, das z. B. r_{11} zu einer ungeraden Potenz enthält, so könnte man schreiben

$$f = r_{11} f_1 + f_2.$$

wo f_1, f_2 Polynome von r_{11}^2 und der r_{ik} $(\neq r_{11})$ sind und f_1 homogen vom Grade $p-1$ ist. Wegen $[f]=0$ gilt dann

$$(8) \qquad [r_{11}][f_1] = -[f_2].$$

Da $f_1 \neq 0$, kann nach der Induktionsannahme auch $[f_1]$ nicht identisch verschwinden. Es sei $[f_1] \neq 0$ z. B. für das System der Punkte (x_i^0, y_i^0), (ξ_k^0, η_k^0); wegen der Stetigkeit von $[f_1]$ kann man offenbar alle ξ_k^0 voneinander verschieden annehmen. Geben wir für die x_i, y_i, ξ_k, η_k mit der Ausnahme von x_1 die festen Werte $x_i^0, y_i^0, \xi_k^0, \eta_k^0$, so werden beide Seiten von (8) nicht identisch verschwindende algebraische Funktionen von x_1; $[r_{11}]$ hat die Verzweigungsstellen $x_1 = \xi_1^0 \pm i(y_1^0 - \eta_1^0)$, die aber keine Verzweigungsstellen von $[f_1]$ und von $[f_2]$ sind. Dieser Widerspruch beweist, daß f ein Polynom der r_{ik}^2 ist.

Ebenso folgt, daß g ein Polynom der s_{ik}^2 $(i<k)$ ist.

Also genügt es, den Hilfssatz nur noch in dem Fall zu beweisen, daß f und g Polynome der r_{ik}^2 bzw. s_{ik}^2 sind. Das führen wir direkt aus. Dabei brauchen wir nur den Fall zu betrachten, daß f und g vom vierten Grade in r_{ik} bzw. s_{ik} sind, denn sind sie vom zweiten Grade, so wird doch dieser Fall nach Multiplikation durch ein beliebiges r_{ik}^2 bzw. s_{ik}^2 $(i<k)$ auf den vorigen Fall zurückgeführt.

Also sei f ein (homogenes) Polynom vom zweiten Grade der r_{ik}^2; wir zeigen, daß aus $[f]=0$ folgt $f=0$. Für $m=n=3$ ist das richtig, denn die neun r_{ik} $(i, k=1, 2, 3)$ befriedigen offenbar keine nicht identisch verschwindende Gleichung (es handelt sich ja um neun solche Bestandteile — Diagonalen und Seiten — eines Sechsecks, die keinem Fünfeck angehören, und man weiß, daß man zur Bestimmung eines Sechsecks neun Angaben benötigt). Im übriggebliebenen Fall darf aus Symmetriegründen $m \geqq 4$ angenommen werden. Nehmen wir auch an, daß gegen unsere Behauptung $f \neq 0$ ist und daß wir die Behauptung für $m-1$ statt m schon bewiesen haben. Betrachten wir ein nichtverschwindendes Glied

$$(9) \qquad a r_{ik}^2 r_{jl}^2 \qquad (a \neq 0)$$

von f. Man wähle zwei Indizes u, v $(=1, \ldots, m)$, die voneinander und von i, j verschieden sind. Man darf annehmen, daß $v=m$ ist. Identifiziere man die Unbestimmten r_{mh} und r_{uh} $(h=1,\ldots,n)$, dann geht f in ein homogen quadratisches Polynom f_1 der Unbestimten r_{ik} $(i=1,\ldots,m-1\,;\ k=1,\ldots,n)$ über, das das Glied (9) mit demselben Koeffizienten a enthält, also $f_1 \neq 0$ gilt. Andererseits gilt wegen $[f]=0$ noch mehr $[f_1]=0$, da ja die zweite Gleichung aus der ersten dadurch entsteht, daß man die Punkte A_m und A_u zusammenfallen läßt. Dieser Widerspruch mit der Induktionsannahme beweist $f=0$.

Endlich wollen wir noch $g=0$ zeigen. Für $m=3$ ist das richtig, denn die drei Dreiecksseiten befriedigen keine nicht identisch verschwindende Gleichung. Im Falle $m \geqq 4$ nehmen wir an, daß gegen die Behauptung $g \neq 0$ ist und daß wir die Behauptung für $m-1$ statt m schon bewiesen haben. Enthält g ein Glied

$$a s_{ik}^4 \qquad (a \neq 0\,;\ i<k), \tag{10}$$

so verfahren wir ähnlich wie vorher, indem wir nämlich zwei A_u, A_v, $(u, v=1,\ldots,m)$ einander gleichsetzen mit voneinander und von i, k verschiedenen u, v, woraus wieder ein Widerspruch entsteht. Im übriggebliebenen Fall enthält g kein Glied von der Form (10).

Betrachten wir dann den Fall, daß g (nach paßender Umnumerierung der Indizes $1,\ldots,m$) ein Glied

$$a s_{12}^2 s_{1m}^2 \qquad (a \neq 0) \tag{11}$$

enthält. Man setze dann A_m gleich A_2 und bezeichne mit g_1 das so aus g entstandene Polynom der s_{ik}^2 $(i<k\,;\ i,k=1,\ldots,m-1)$. Dieses g_1 enthält wegen (11) das Glied $a s_{12}^4$ offenbar unverändert und so ist $g_1 \neq 0$. Hieraus entsteht wegen $[g_1]=0$ wieder ein Widerspruch.

Es ist nur noch der Fall übrig, daß g aus lauter Gliedern von der Form

$$a s_{ij}^3 s_{kl}^2 \qquad (i<j\,;\ k<l)$$

besteht, wobei alle i, j, k, l verschieden sind. Ausführlich lautet dann g so:

$$g = a s_{12}^2 s_{34}^2 + b s_{13}^2 s_{24}^2 + c s_{14}^2 s_{23}^2 + \ldots$$

(in den übrigen Gliedern kommt mindestens ein Index $\geqq 5$ vor). Lassen wir A_4 der Reihe nach mit A_1, A_2, A_3 zusammenrücken. Dabei nimmt g entsprechend die Form

$$g_1 = (a+b)\, s_{12}^2 s_{13}^2 + \ldots, \quad g_2 = (a+c)\, s_{12}^2 s_{23}^2 + \ldots, \quad g_3 = (b+c)\, s_{13}^2 s_{23}^2 + \ldots$$

an. Aus der Induktionsannahme folgt wegen $[g_1]=[g_2]=[g_3]=0$, daß g_1, g_2, g_3 verschwinden müßen, und das ergibt $a=b=c=0$. Mit gleichem Schluß ergibt sich, daß alle Glieder von g verschwinden, womit der Hilfssatz und auch Satz 1 bewiesen ist.

2. Jetzt gehen wir zur Untersuchung der Frage über, was aus den Inhaltsformeln (4), (5) wird, wenn man zu „Polygonen mit unendlich vielen Seiten", d. h. zu beliebigen geschlossenen Kurven in der Ebene übergeht.

Es handele sich um die geschlossenen Kurven K, L; die Punkte A von K seien durch den Parameter u, die Punkte B von L durch den Parameter v charakterisiert ($0 \leqq u \leqq U$, $0 \leqq v \leqq V$; $A(0)=A(U)$, $B(0)=B(V)$) Der Abstand von $A(u)$ und $B(v)$ sei mit $r(u,v)$ bezeichnet, sein Quadrat mit $q(u,v)$. Wir nehmen an, daß die Funktion $r(u,v)$ stetig ist und stetige partielle Ableitungen $r_u(u,v)$, $r_v(u,v)$ und $r_{uv}(u,v)$ besitzt. Dann sind offenbar auch

$$q=r^2,\quad q_u=2rr_u,\quad q_v=2rr_v,\quad q_{uv}=2r_ur_v+2rr_{uv} \tag{12}$$

stetige Funktionen von u, v.

Nun sei K_m und L_n je ein in K bzw. L eingeschriebenes Polygon mit den Ecken $A(u_i)$ ($i=1,\ldots,m$) bzw. $B(v_k)$ ($k=1,\ldots,n$), wobei

$$0=u_1<u_2<\ldots<u_m<u_{m+1}=U,\quad 0=v_1<v_2<\ldots<v_n<v_{n+1}=V.$$

Für die entsprechenden Inhalte I_m, J_n hat man nach Satz 1:

$$16I_mJ_n=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} q(u_i,v_k) & q(u_i,v_{k+1}) \\ q(u_{i+1},v_k) & q(u_{i+1},v_{k+1})\end{vmatrix}.$$

Substrahiert man in jeder Determinante die erste Spalte aus der zweiten, und dann die erste Reihe aus der zweiten, so erhält man

$$16I_mJ_n=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} q(u_i,v_k) & q(u_i,v_{k+1})-q(u_i,v_k) \\ q(u_{i+1},v_k)-q(u_i,v_k) & [q(u_{i+1},v_{k+1})-q(u_{i+1},v_k)]-[q(u_i,v_{k+1})-q(u_i,v_k)]\end{vmatrix}.$$

Wendet man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an, so bekommt man hieraus:

$$16I_mJ_n=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} q(u_i,v_k) & q_v(u_i,v_k^*)\,\Delta_k \\ q_u(u_i^*,v_k)\,\delta_i & q_{uv}(u_i^{**},v_k^{**})\,\delta_i\,\Delta_k\end{vmatrix},$$

also

$$16I_mJ_n=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} q(u_i,v_k) & q_v(u_i,v_k^*) \\ q_u(u_i^*,v_k) & q_{uv}(u_i^{**},v_k^{**})\end{vmatrix}\delta_i\Delta_k,$$

wobei u_i^* und u_i^{**} Werte aus dem Intervall (u_i, u_{i+1}), v_k^* und v_k^{**} Werte aus dem Intervall (v_k, v_{k+1}), während δ_i und Δ_k die Längen dieser Intervalle bezeichnen.

Läßt man m und n über alle Grenzen wachsen, so daß

$$\max_{i=1,\ldots,m}\delta_i\to 0 \quad\text{und}\quad \max_{k=1,\ldots,n}\Delta_k\to 0,$$

so erhält man aus (13) für die Inhalte der Kurven K, L:

$$16IJ=\int_0^U\!\!\int_0^V\begin{vmatrix} q(u,v) & q_u(u,v) \\ q_v(u,v) & q_{uv}(u,v)\end{vmatrix}du\,dv.$$

Nach den Substitutionen (12) gelangt man endlich zum

Satz 2. *Beschreiben die Punkte $A(u)$ $(0 \leqq u \leqq U)$ und $B(v)$ $(0 \leqq v \leqq V)$ je eine geschlossene Kurve K, L vom Inhalt I bzw. J, und ist der Abstand $r(u, v)$ von $A(u)$ und $B(v)$ eine stetige und stetige partielle Ableitungen $r_u(u, v)$, $r_v(u, v)$, $r_{uv}(u, v)$ besitzende Funktion, so gilt*

$$8IJ = \int_0^U \int_0^V r^2 (r r_{uv} - r_u r_v)\, du\, dv. \tag{14}$$

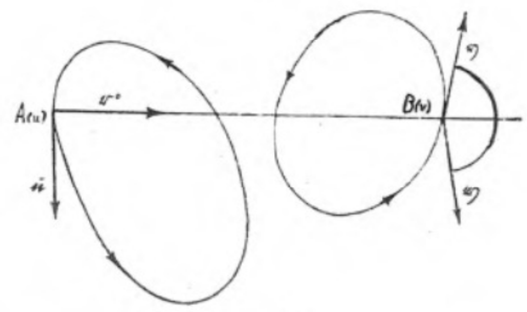
Es ist also diese Formel, die als die sinngemäße Übertragung der Heronschen Formel auf eine Kurve (Fall $K = L$) bzw. ein Kurvenpaar (Fall $K \neq L$) angesehen werden sollte. (Im Falle $K = L$ hat man natürlich $U = V$, $B(v) = A(v)$ zu setzen.) Die Stetigkeitsvoraussetzungen ließen sich freilich durch wesentlich schwächere ersetzen, doch wollen wir darauf nicht näher eingehen.

3. Schauen wir unsere Formel (14) in dem Falle näher an, daß die Parameter die *Bogenlänge* bedeuten. Man überzeugt sich leicht, daß dann

$$r_u = -\mathfrak{u}\mathfrak{r}^0, \quad r_v = \mathfrak{v}\mathfrak{r}^0, \quad r r_{uv} = (\mathfrak{u}\mathfrak{r}^0)(\mathfrak{v}\mathfrak{r}^0) - \mathfrak{u}\mathfrak{v},$$

wobei $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(u)$ den (im Sinne wachsender Bogenlänge gerichteten) Einheitsvektor der Tangente von K im Punkte $A(u)$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(v)$ den Einheitsvektor der Tangente von L im Punkte $B(v)$, endlich $\mathfrak{r}^0 = \mathfrak{r}^0(u, v)$ den aus $A(u)$ nach $B(v)$ gerichteten Einheitsvektor bedeuten. Ist $\mathfrak{n}^0$ ein auf $\mathfrak{r}^0$ orthogonaler Einheitsvektor in der Ebene, so folgt hieraus, daß

$$r r_{uv} = -(\mathfrak{u}\mathfrak{n}^0)(\mathfrak{v}\mathfrak{n}^0).$$



Figur 1.

Wenn man das in bezug auf $\mathfrak{r}^0(u, v)$ genommenes Spiegelbild von $\mathfrak{v}(v)$ mit $\mathfrak{w}(u, v)$ bezeichnet, dann ist $\mathfrak{w}\mathfrak{r}^0 = \mathfrak{v}\mathfrak{r}^0$, $\mathfrak{w}\mathfrak{n}^0 = -\mathfrak{v}\mathfrak{n}^0$, also

$$r r_{uv} - r_u r_v = (\mathfrak{u}\mathfrak{n}^0)(\mathfrak{w}\mathfrak{n}^0) + (\mathfrak{u}\mathfrak{r}^0)(\mathfrak{w}\mathfrak{r}^0) = \mathfrak{u}\mathfrak{w}.$$

Die Formel (14) läßt sich also auch in der Form schreiben:

$$8IJ = \int_0^U \int_0^V r^2 . (\mathfrak{u}\mathfrak{w})\, du\, dv. \tag{15}$$

Da $\mathfrak{u}, \mathfrak{w}$ beide Einheitsvektoren sind, ist $|\mathfrak{u}\mathfrak{w}| \leqq 1$, folglich

$$|8IJ| \leqq \int_0^U\int_0^V r^2(u,v)\,du\,dv = \int_0^U\int_0^V \left\{[\xi(v)-x(u)]^2+[\eta(v)-y(u)]^2\right\} du\,dv = D,$$

wobei $(x(u), y(u))$, $(\xi(v), \eta(v))$ die Koordinaten der Punkte $A(u), B(v)$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem bedeuten. Dieses Doppelintegral D ist aber gleich

$$U\int_0^V (\xi^2(v)+\eta^2(v))\,dv + V\int_0^V (x^2(u)+y^2(u))\,du -$$
$$-2\int_0^U x(u)\,du \int_0^V \xi(v)\,dv - 2\int_0^U y(u)\,du\int_0^V \eta(v)\,dv,$$

oder

$$D = UV(T_1+T_2) - 2UV(X_1X_2+Y_1Y_2);$$

hier ist T_1 der Trägheitsmoment der (homogen mit der Gesamtmasse 1 belegenen) Kurve K in bezug auf den Anfangspunkt O, (X_1, Y_1) sind die Koordinaten des Schwerpunktes von K; T_2, X_2, Y_2 haben analoge Bedeutung für die Kurve L.

Aus der Formel (15) hat sich also die folgende merkwürdige Ungleichung ergeben:

Sei O ein Punkt der Ebene der Kurven K, L, von dem aus die Schwerpunkte dieser Kurven unter rechtem Winkel erscheinen (O darf auch mit einem der Schwerpunkte zusammenfallen). Dann besteht zwischen den Trägheitsmomenten T_1, T_2 dieser Kurven in bezug auf den Punkt O, ihren Inhalten I, J und ihren Längen U, V folgende Ungleichung:

$$8IJ \leqq UV(T_1+T_2). \tag{16}$$

Ist insbesondere $K=L$ und bedeutet T den Trägheitsmoment von K in bezug auf ihren Schwerpunkt, so nimmt (16) die Gestalt an:

$$8I^2 \leqq U^2\,2T, \quad \text{d. h.} \quad T \geqq \left(\frac{2I}{U}\right)^2. \tag{17}$$ [6]

---

[6]) Die Ungleichung (17) läßt sich übrigens auch aus der Formel

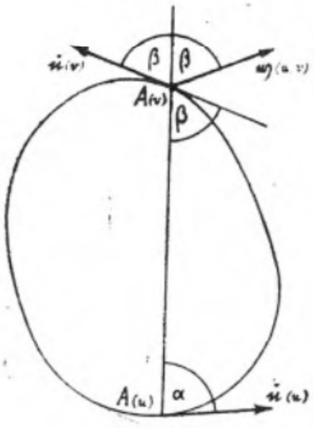
$$2I = \int_0^U (x(u)\,y'(u) - y(u)\,x'(u))\,du$$

ableiten. Nach der Schwarzschen Ungleichung gilt nämlich

$$\left[\int_0^U (xy'-yx')\,du\right]^2 \leqq \int_0^U (x^2+y^2)\,du \int_0^U (x'^2+y'^2)\,du,$$

und hier ist $x'^2+y'^2=1$ (u ist ja die Bogenlänge). Gleichheit besteht nur dann, wenn die Funktionenpaare $\{x(u), y(u)\}$, $\{y'(u), -x'(u)\}$ in konstantem Verhältnis stehen, d. h. wenn $y' : x = -x' : y$, was nur für Kreise zutrifft.

Für eine *konvexe* Kurve K ist $\mathfrak{u}\mathfrak{w} = \cos(\alpha - \beta)$, wo α und β die in der Figur 2 dargestellte Bedeutung haben. (Im Falle eines Kreises ist immer $\alpha = \beta$, also $\cos(\alpha - \beta) = 1$.) Aus der Formel (15) ergibt sich dann auch die folgende, entgegengesetzt gerichtete Ungleichung:



Figur 2.

Besitzt $\cos(\alpha - \beta)$ *auf der konvexen Kurve* K *ein positives Minimum* $\varkappa$, *so ist*

$$8I^2 \geqq \varkappa \int_0^U \int_0^U r^2 \, du \, dv,$$

also

$$T \leqq \frac{1}{\varkappa} \left(\frac{2I}{U} \right)^2$$

(Eingegangen am 3. Februar 1949.)