Die unendlichen Abelschen Gruppen mit lauter endlichen echten Untergruppen.

Von I. SZÉLPÁL in Szeged.

Bezeichne $\mathfrak{Z}(p)$ die (zyklische) Gruppe von der Primzahlordnung p und $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ die multiplikative Gruppe sämtlicher p-ter, p^2-ter, p^3-ter, ... komplexer Einheitswurzeln Nachher schreiben wir alle Abelschen Gruppen *additiv*. Dann läßt sich $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ durch die erzeugenden Elemente $A_1, A_2, A_3, \dots$ und die Gleichungen

$$pA_1 = 0,\ pA_2 = A_1,\ pA_3 = A_2, \dots \tag{1}$$

definieren. PRÜFER[1]) hat die Wichtigkeit von $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ in der Theorie der unendlichen Abelschen Gruppen erkannt, und es hat sich gezeigt, daß diese Gruppe in mehreren Fragen eine ausgezeichnete Rolle spielt[2]). Hier beweisen wir den folgenden

Satz: *Die Gruppen $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ sind die ei zigen unendlichen Abelschen Gruppen mit lauter endlichen echten Untergruppen.*

Die echten Untergruppen von $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ stimmen offenbar mit sämtlichen zyklischen p-Gruppen überein, womit die eine Helfte des Satzes bewiesen ist.

Umgekehrt bezeichne $\mathfrak{G}$ eine unendliche Abelsche Gruppe mit lauter endlichen echten Untergruppen. Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{G}$ zu einem $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ isomorph ist.

$\mathfrak{G}$ enthält offenbar keine unendliche zyklische Untergruppe, denn diese hätte echte unendliche (zyklische) Untergruppen. Folglich ist $\mathfrak{G}$ eine *Torsions-*

---

[1]) H. PRÜFER: Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen. *Math. Zs.* **17** (1923), 35–61.

[2]) Darüber bemerken wir folgendes: *a*) $\mathfrak{Z}(p)$ und $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ sind alle Abelschen Gruppen $\mathfrak{G}$ von der Eigenschaft. daß jedes homomorphe Bild (mit mehr als einem Element) von $\mathfrak{G}$ isomorph zu $\mathfrak{G}$ ist. Vgl. I. SZÉLPÁL: Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Homomorphismen, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **13** (1949), 51–53. *b*) $\mathfrak{Z}(p)$ und $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ sind alle Abelschen Torsionsgruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring. Vgl. T. SZELE: Über die Abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring. Erscheint demnächst in diesen *Publicationes*. *c*) Die Gruppen $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ sind bekanntlich alle „maximalen" Abelschen Torsionsgruppen mit lauter direkt unzerlegbaren Unterguppen.

gruppe (d. h. hat lauter Elemente von endlicher Ordnung). Hieraus folgt, daß $\mathfrak{G}$ sich in eine direkte Summe

(2) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_{p_1} + \mathfrak{P}_{p_2} + \dots$$

zerlegen läßt, wobei $\mathfrak{P}_{p_i}$ eine („primäre") p_i-Gruppe ist (d. h. nur Elemente von p_i-Potenzordnung hat) und $p_1, p_2, \dots$ verschiedene Primzahlen sind. Sind alle Summanden $\mathfrak{P}_{p_i}$ endlich, so muß ihre Anzahl unendlich sein, und dann hätte $\mathfrak{G}$ die unendliche echte Untergruppe $\mathfrak{P}_{p_2} + \mathfrak{P}_{p_3} + \dots$, was unmöglich ist. Folglich ist z. B. $\mathfrak{P}_{p_1}$ unendlich. Da $\mathfrak{P}_{p_1}$ keine echte Untergruppe von $\mathfrak{G}$ sein kann, gilt in (2): $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_{p_1}$.

Fortan schreiben wir $p_1 = p$. Wir haben bisher bekommen, daß $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe ist.

Die Elemente p-ter Ordnung von $\mathfrak{G}$ bilden mit Null zusammen eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$, worüber wir zeigen werden, *daß sie endlich ist*. Wäre nämlich $\mathfrak{U}$ unendlich, so gilt $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}$, mithin ist $\mathfrak{G}$ bekanntlich eine direkte Summe von unendlich vielen Gruppen vom Typ $\mathfrak{Z}(p)$. Nach Weglassen eines Summanden $\mathfrak{Z}(p)$ erhält man eine echte unendliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$, was unmöglich ist. Damit ist die obige Behauptung bewiesen.

Nunmehr bezeichne $p\mathfrak{G}$ die Untergruppe von $\mathfrak{G}$ bestehend aus allen verschiedenen Elementen pX (mit $X \in \mathfrak{G}$). Wir zeigen auf Grund des eben bewiesenen, daß $p\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ ist. Wäre nämlich $p\mathfrak{G}$ eine echte, folglich eine endliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so gibt es ein Element B (unter den endlich vielen Elementen) von $p\mathfrak{G}$, für die

$$pC_1 = pC_2 = \dots = B$$

mit unendlich vielen verschiedenen Elementen $C_1, C_2, \dots$ aus $\mathfrak{G}$ gilt. Dann aber sind $C_i - C_1$ $(i = 2, 3, \dots)$ unendlich viele verschiedene Elemente p-ter Ordnung in $\mathfrak{G}$, in Widerspruch mit unserer obigen Behauptung. Dies zeigt die Richtigkeit von $p\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$.

$p\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ bedeutet, daß in $\mathfrak{G}$ die Gleichung $pX = A$ für jedes Element A von $\mathfrak{G}$ lösbar ist. Bezeichnet also A_1 ein Element p-ter Ordnung in $\mathfrak{G}$, so gibt es der Reihe nach Elemente $A_2, A_3, \dots$ von der Eigenschaft (1). Die Elemente $A_1, A_2, A_3, \dots$ erzeugen eine (unendliche) Untergruppe von Typ $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ in $\mathfrak{G}$, folglich muß $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{Z}(p^\infty)$ gelten. Hiermit haben wir den Beweis des Satzes beendet.

(Eingegangen am 1. Juni 1949.)