Ein anschaulicher Beweis der ersten Plückerschen Formel.

Von GYULA SZ.-NAGY in Szeged.

Nach dieser bekannten Formel hat eine algebraische Kurve C n-ter Ordnung mit d Doppelpunkten und mit r Rückkehrpunkten die Klasse

$$k = n(n-1) - 2d - 3r. \tag{1}$$

Der hier gegebene anschauliche Beweis dieser Formel ist eine wesentliche Vereinfachung des Beweises von H. G. ZEUTHEN[1]).

Man kann annehmen, daß der unendlichferne Punkt Y_∞ der y-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems nicht auf der Kurve C liegt, und daß keine singuläre Tangente, keine durch einen singulären Punkt gehende Tangente und keine der Verbindungsgeraden von je zwei singulären Punkten der Kurve C zur y-Achse parallel sind. Widrigenfalls könnte man diese Lage von C bezüglich der y-Achse durch eine geeignete Projektion immer erreichen.

Bezeichnet g eine zur y-Achse parallele beliebige Gerade, so hat man zu zeigen, daß die Kurve C von k Geraden g berührt wird. Aus den Annahmen folgt, daß höchstens zwei Treffpunkte einer Geraden g mit C in einem Punkt P zusammenfallen können. Trifft dies für eine Gerade g zu, so weichen ihre übrigen $n-2$ Treffpunkte mit C von P und voneinander ab.

Sind P und P' zwei beliebige Treffpunkte von C mit einer beliebigen (zur y-Achse parallelen) Geraden g, so verschiebt man die Sehne PP' so in g, daß ihr Halbierungspunkt in die x-Achse fällt. Die Endpunkte aller so verschobenen Sehnen liegen auf eine algebraischen Kurve K von $n(n-1) = N$-ter Ordnung. Diese Kurve wird nämlich von einer Geraden g den $\frac{n(n-1)}{2}$ Kombinationen der Punktpaare PP' entsprechend in N Punkten getroffen.

Die Kurve K ist symmetrisch in bezug auf die x-Achse. Die Konstruktion ihrer Punkte ist der bekannten STEINERschen Symmetrisierung[2]) ähnlich.

Die Kurve K wird von der x-Achse in N Punkten X_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ getroffen. Bezeichnet g_i die Gerade g durch X_i, so ist g_i entweder eine Tangente der Kurve C, oder sie geht durch einen singulären Punkt von C. Ein

---

1) H. G. ZEUTHEN: Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. Leipzig (1914), S. 21–23.

2) W. BLASCHKE: Kreis und Kugel. Leipzig (1916). T. BONNESEN-W. FENCHEL: Theorie der konvexen Körper. *Ergebnisse der Math.* (1934), S. 69–70.

Punkt der Kurve K fällt nämlich dann und nur dann auf die x-Achse, also mit einem Punkt X_i zusammen, wenn zwei Treffpunkte P_i und P_i' von g_i mit C in einem Punkt P_i zusammenfallen. Dies trifft dann zu, wenn P_i ein Berührungspunkt von C mit g_i, oder ein singulärer Punkt von C ist.

Die Richtigkeit der Formel (1) folgt daraus, daß X_i ein einfacher, zweifacher bzw. dreifacher Treffpunkt der x-Achse mit der Kurve K ist, je nachdem P_i ein Berührungspunkt (mit g_i), ein Doppelpunkt bzw. ein Rückkehrpunkt der Kurve C ist. Dies läßt sich leicht einsehen, wenn man die Kurve K in der Umgebung des Punktes X_i konstruiert.

Ist P_i ein Berührungspunkt (mit der Tangente g_i) oder ein Rückkehrpunkt der Kurve C und bezeichnet γ einen genügend kleinen und P_i enthaltenden Bogen von C, dessen Endpunkte auf eine Gerade g fallen, so wird γ von einer beliebigen Geraden g entweder in zwei Punkten oder in keinen getroffen. Durch die STEINERsche Symmetrisierung des Bogens γ (bezüglich der x-Achse) erhält man offenbar einen durch X_i gehenden Teilbogen $\varkappa$ der Kurve K. Ist g_i die Tangente von γ in P_i, so wird $\varkappa$ in X_i von g_i offenbar berührt und von der x-Achse (senkrecht) geschnitten. Ist P_i ein Rückkehrpunkt, so hat auch der Bogen $\varkappa$ einen Rückkehrpunkt in X_i, dessen Tangente die x-Achse ist.

Schneidet sich ein genügend kleines Bogenpaar γ_1, γ_2 der Kurve C im Doppelpunkt P_i und wird es von einer Geraden g in 2 oder 0 Punkten getroffen, so führt die Symmetrisierung das Bogenpaar γ_1, γ_2 in ein Bogenpaar $\varkappa_1, \varkappa_2$ der Kurve K über, das sich im Doppelpunkt X_i von K schneidet. Ist P_i ein isolierter Doppelpunkt von C, so ist X_i ein isolierter Doppelpunkt von K.

Damit ist die Formel (1) bewiesen.

Anmerkungen. Ein Selbstberührungspunkt P_i von C ist in der Formel (1) als ein Zusammenfallen von zwei Doppelpunkten zu betrachten. Berührt sich das Bogenpaar γ_1, γ_2 von C in P_i, so berühren die Bogen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ von K in X_i einander und die x-Achse. X_i ist dann ein vierfacher Treffpunkt von K mit der x-Achse.

Besitzt die Kurve in P_i einen s-fachen Punkt mit verschiedenen Tangenten ($s \geqq 2$), so ist P_i in der Formel (1) als $\frac{s(s-1)}{2}$ Doppelpunkte zu rechnen, weil X_i ein $s(s-1)$-facher Punkt der Kurve K ist. Eine zu P_i genügend nahe liegende Gerade g hat nämlich in der Umgebung von P_i s Treffpunkte mit C, die auf der Geraden g $\frac{s(s-1)}{2}$ Sehnen bestimmen. Diese Gerade g hat also in der Umgebung von X_i $s(s-1)$ Treffpunkte mit K, die in X_i zusammenfallen, falls g durch P_i geht.

(Eingegangen am 15. Januar 1949.)