Über die Abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring.

Von T. SZELE in Debrecen.

Der Endomorphismenring einer Abelschen Gruppe[1]) ist im allgemeinen weder kommutativ, noch nullteilerfrei Es sind wichtige Aufgaben, sämtliche Abelsche Gruppen mit kommutativem bzw. nullteilerfreiem Endomorphismenring zu bestimmen.

In der vorliegenden Arbeit werden alle Abelschen *Torsionsgruppen* mit nullteilerfreiem Endomorphismenring angegeben, und es wird die Nichtexistenz von *gemischten Gruppen* dieser Art nachgewiesen[2])[3]). Da die erhaltenen nullteilerfreien Endomorphismenringe auch kommutativ sind so sind unsere Gruppen zugleich alle nicht-torsionsfreien Gruppen, deren Endomorphismenring ein Integritätsbereich ist.

Sei p eine beliebige Primzahl. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Z}(p^e)$ die zyklische Gruppe von der Ordnung p^e. PRÜFERS Gruppe „vom Typ p^∞", d. h. die Abelsche Gruppe, welche — aber keine echte Untergruppe von ihr — alle $\mathfrak{Z}(p^e)$ $(e = 1, 2, 3, \ldots)$ enthält, bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}(p^\infty)$. Der Endomorphismenring der Gruppe $\mathfrak{Z}(p^e)$ ist gleich dem Restklassenring mod p^e (gebildet im Ring der ganzen Zahlen). Mithin ist der Endomorphismenring von $\mathfrak{Z}(p^e)$ nur im

---

[1]) Die Abelschen Gruppen schreiben wir additiv. Unter dem Endomorphismenring einer Abelschen Gruppe verstehen wir immer den Ring *sämtlicher* Endomorphismen der Gruppe, was offenbar darauf hinauskommt, daß wir nur Gruppen *im gewöhnlichen Sinne* (d. h. ohne Operatorenbereich) in Betracht ziehen..

[2]) Unter einer *Torsionsgruppe* versteht man eine Abelsche Gruppe mit lauter Elementen endlicher Ordnung. Im entgegengesetzten Falle, wenn nämlich alle Elemente $(\neq 0)$ der Gruppe von unendlicher Ordnung sind, spricht man von einer *torsionsfreien* Gruppe. Eine Gruppe ist eine *gemischte Gruppe*, falls sie weder torsionsfrei, noch eine Torsionsgruppe ist. Die Menge sämtlicher Elemente von endlicher Ordnung in einer gemischten Gruppe $\mathfrak{G}$ ist offenbar eine Untergruppe, die wir im folgenden *die in* $\mathfrak{G}$ *enthaltene Torsionsgruppe* nennen werden.

[3]) Das Problem der torsionsfreien Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring ist viel schwieriger. Allerdings ist die Existenz solcher Gruppen durch sämtliche torsionsfreie Gruppen ersten Ranges (diese sind die Untergruppen der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen) sichergestellt.

Falle $e=1$ nullteilerfrei, und dann ist er gleich dem Primkörper von der Charakteristik p [4]). Der Endomorphismenring der Gruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ ist gleich dem Integritätsbereich der ganzen p-adischen Zahlen, woraus sich die denkbar einfachste, rein algebraische (sogar „rein gruppentheoretische") Möglichkeit für die Erklärung der p-adischen Zahlen ergibt[5]) Die Tatsache, daß der Endomorphismenring von $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ nullteilerfrei ist, läßt sich übrigens auch unabhängig davon, sehr leicht wie folgt zeigen. Die Gruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ sei durch die unendlichvielen erzeugenden Elemente $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und die Gleichungen

$$pA_1=0,\ pA_2=A_1,\ pA_3=A_2, \ldots$$

definiert. Sind nun zwei Endomorphismen von $\mathfrak{Z}(p^\infty)$, beide vom Nulloperator verschieden, angegeben, so lassen sich Elemente A_m und A_n bestimmen, die vom ersten bzw. zweiten Endomorphismus nicht auf Null abgebildet werden. Dann bildet aber das Produkt der beiden Endomorphismen das Element A_{m+n} sicher nicht auf Null, woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt, daß der Endomorphismenring von $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ nullteilerfrei ist.

Wir zeigen nun, daß mit den angegebenen Beispielen schon alle Torsionsgruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismenring erschöpft sind. Es gilt sogar der folgende:

Satz. *Ist der Endomorphismenring einer nicht-torsionsfreien Abelschen Gruppe nullteilerfrei, so ist die Gruppe isomorph zu einer der Gruppen* $\mathfrak{Z}(p^\infty)$, $\mathfrak{Z}(p)$.

Beim Beweis dieses Satzes machen wir von der Bemerkung öfters Gebrauch, daß eine Gruppe mit nullteilerfreiem Endomorphismenring direkt unzerlegbar ist.

Sei nun $\mathfrak{G}$ eine nicht-torsionsfreie Abelsche Gruppe mit nullteilerfreiem Endomorphismenring. Die in $\mathfrak{G}$ enthaltene Torsionsgruppe bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}$. Nach der Voraussetzung enthält $\mathfrak{T}$ mehr als ein Element. Im folgenden unterscheiden wir zwei Fälle.

Erster Fall: Es gelte für jede natürliche Zahl n die Gleichung $n\mathfrak{T}=\mathfrak{T}$. Dann enthält[6]) $\mathfrak{T}$ und mithin auch $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$, die nach einem wichtigen Satz von BAER[7]) ein direkter Summand von jeder Obergruppe ist. Foglich gilt die direkte Zerlegung: $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}(p^\infty)+\mathfrak{H}$, wobei aber

[4]) Auch der Primkörper von der Charakterisitik Null ist ein Endomorphismenring, und zwar derjenige der additiven Gruppe der rationalen Zahlen.

[5]) Für den „Zwillingsbruder" des p-adischen Zahlkörpers, den reellen Zahlkörper gibt es leider keine ähnlich einfache, rein algebraische Einführungsmöglichkeit, obwohl sich diese beiden Körper mit Hilfe der Bewertungstheorie volkommen analog erfassen lassen.

[6]) Vgl. L. ZIPPIN: Countable torsions groups. *Ann. of Math.* **36** (1935), 86–99. Theorem 4.3, S. 89.

[7]) R. BAER: The Subgroup of the elements of finite order of an abelian group. *Ann. of Math.* **37** (1936), 766–781. Theorem 1.1, S. 766.

nach obigem $\mathfrak{H}$ verschwinden muß. In diesem Falle haben wir also $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p^\infty)$ bekommen.

Zwieter Fall: Es gelte $n\mathfrak{T} \neq \mathfrak{T}$ für eine natürliche Zahl n. Dann gibt es auch eine Primzahl p mit $p\mathfrak{T} \neq \mathfrak{T}$, den aus der Gültigkeit der Gleichung $q\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$ für jede Primzahl q folgte offenbar $n\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Wählen wir eine solche Primzahl p fest Dann bedeutet aber $p\mathfrak{T} \neq \mathfrak{T}$ zugleich auch $p\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}$. Folglich hat die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/p\mathfrak{G}$ mehr als ein Element, und sie zerfällt (als Abelsche Gruppe mit lauter Elementen $(\neq 0)$ von der Ordnung p) in die direkte Summe von Gruppen $\mathfrak{Z}(p)$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{G}/p\mathfrak{G}$ und zugleich auch die Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe vom Index p enthält. Wählen wir eine feste Untergruppe $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$ *vom Index p*. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ muß außerdem auch ein Element P von der Ordnung p enthalten, denn im entgegengesetzten Fall hätte $\mathfrak{T}$ nur Elemente von zu p primen Ordnungen, woraus $p\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$ folgte, im Widerspruch mit $p\mathfrak{T} \neq \mathfrak{T}$.

Wir zeigen nun, daß P nicht zu $\mathfrak{P}$ gehört. Wenn nämlich $P \in \mathfrak{P}$ gälte, so betrachten wir denjenigen Endomorphismus von $\mathfrak{G}$, der sämtliche Elemente der Nebenklasse $\mathfrak{P} + kB$ auf kP abbildet $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$, wobei B ein festes, außerhalb $\mathfrak{P}$ liegendes Element von $\mathfrak{G}$ ist. Das Quadrat von diesem Endomorphismus ist (wegen $P \in \mathfrak{P}$) Null, im Widerspruch mit unserer Annahme, daß der Endomorphismenring von $\mathfrak{G}$ nullteilerfrei ist. P gehört also in der Tat nicht zu $\mathfrak{P}$.

Liegt aber das Element P (der Ordnung p) außerhalb der Untergruppe $\mathfrak{P}$ (vom Index p), so bedeutet das die Gültigkeit der direkten Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{P}$, wobei jetzt $\mathfrak{Z}(p)$ die vom Element P erzeugte zyklische Untergruppe bezeichnet. Hier muß nach obigem der Summand $\mathfrak{P}$ verschwinden, womit $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p)$ also auch der Satz bewiesen ist.

(Eingegangen am 1. Juli 1949.)