# Ausfüllung eines konvexen Bereiches durch Kreise.

Von LÁSZLÓ FEJES TÓTH in Budapest.

Betrachten wir ein unendliches System einander nicht überdeckender Einheitskreise, in dem jeder Kreis von sechs anderen berührt wird. Diese Kreise füllen $100\pi/\sqrt{12}=90{\cdot}69\ldots\,\%$ der Ebene aus, lassen also $100(1-\pi/\sqrt{12})=9{\cdot}30\ldots\,\%$ der Ebene frei. Füllen wir nun die Lücken durch ähnlich angeordnete sehr kleine Kreise aus, so haben wir ein System einander nicht überdeckender Kreise von zweierlei verschiedener Größen vor uns, das angenähert nur $100(1-\pi/\sqrt{12})^2=0{\cdot}8668\ldots\,\%$ der Ebene frei lässt.

Daß aber der Inhalt der Lücken pro 100 Flächeneinheit bei keiner denkbaren Anordnung von zweierlei Kreisen unter den obigen Wert $0{\cdot}8668\ldots$ gedrückt werden kann, ist eine zwar naheliegende, jedoch keineswegs triviale Tatsache, die wir im Folgenden unter allgemeineren Bedingungen beweisen wollen.

Unser Resultat — bei dessen Fassung und Beweis ein Gebiet und sein Flächeninhalt mit demselben Symbol bezeichnet werden soll — ist enthalten im folgenden

**Satz:** *Es sei ein konvexes Gebiet $T$ mit einem Inkreis $K$, sowie eine positive ganze Zahl $n$ vorgegeben. Ist in $T$ eine beliebige Anzahl einander nicht überdeckender Kreise von $n$-erlei verschiedener Größe eingelagert, so gilt für den von den Kreisen freigelassenen Flächenteil $t$ von $T$*

$$t/T\geqq(1-\pi/\sqrt{12})^{n-1}\,.\,\{1-\mathrm{Max}\,(\pi/\sqrt{12},\,K/T)\}.$$

*Die rechtsstehende Schranke ist genau. Gleichheit kann jedoch nur im trivialen Fall erreicht werden, falls in ein Gebiet mit $K/T\geqq\pi/\sqrt{12}$ allein der Inkreis eingelagert ist.*

Handelt es sich um ein Gebiet für welches $K/T\geqq\pi/\sqrt{12}$ gilt, z. B. um ein Polygon mit höchstens 6 Seiten, so haben wir

$$t/T\geqq(1-\pi/\sqrt{12})^{n}.$$

Den Fall $n=1$ der obigen Ungleichung — der im Folgenden ein wenig anders formuliert als Hilfsatz 1 ausgesprochen wird — habe ich bereits früher gefunden[1]). Verwandte Untersuchungen bezüglich der dichtesten Lagerung kongruenter Kreise rühren von A. THUE, H. HADWIGER, B. SEGRE, K.

MAHLER, vom Verfasser und anderen her[2]). Verallgemeinerungen auf inkongruente Kreise in anderen Richtungen befinden sich in einem Aufsatz des Verfassers[3]).

Der Beweis beruht auf zwei Hilfsätzen.

Hilfsatz 1. *Sind in einem konvexen Gebiet $T$ wenigstens zwei kongruente Kreise eingelagert, so ist ihre Inhaltssumme $<\pi T/\sqrt{12}$.*

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Kreise $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$, den Halbmesser 1 besitzen. Weiterhin genügt es offenbar statt $T$ die kleinste konvexe Hülle $H$ der Kreise in Betracht zu ziehen.

Wir greifen einen Kreis $k_i$ heraus und fassen die Menge $m_i$ derjenigen Punkte von $H$ ins Auge, deren Potenz bezüglich $k_i \leqq$ ist als die Potenzen bezüglich der übrigen Kreise. Von dieser Konstruktion geht klar hervor, daß $m_i$ ein konvexes Gebiet ist, das $k_i$ enthält, und die Gebiete $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ das Gebiet $H$ lückenlos und (von den gemeinsamen Randpunkten abgesehen) schlicht bedecken.

Wir reihen nun die Gebiete $m_i$ in zwei Gruppen ein je nachdem $m_i$ erstens nur von geradlinigen Strecken oder zweitens teilweise auch von einem Kreisbogen berandet ist. Wir zeigen daß im ersten Fall $m_i \geqq \sqrt{12}$, im zweiten $m_i \geqq 2+\pi/2 > \sqrt{12}$ ausfällt.

Fall 1. Wir betrachten ein konvexes Vieleck $m$, das den Einheitskreis $k$ enthält und die Eigenschaft besitzt, daß die Fußpunkte der vom Kreismittelpunkt auf die Seiten gefällten Lote voneinander einen Abstand $\geqq 1$ besitzen. Es handelt sich um die Tatsache, daß unter diesen Vielecken das umbeschriebene reguläre Sechseck $\overline{m}$ den kleinstmöglichen Inhalt besitzt.

Um dies einzusehen bezeichnen wir den Umkreis von $\overline{m}$ mit $u$ und zeigen, daß schon für den in $u$ liegenden Teil $m'$ von $m$ die Ungleichung $m \geqq m' \geqq \overline{m} = \sqrt{12}$ gilt.

Bezeichnen wir die von den Seiten von $m$ bestimmten Sehnen von $u$ mit $s_1, s_2, \ldots, s_p$. Wir haben zu zeigen, daß der Inhalt der Vereinigungsmenge der von $s_1, s_2, \ldots, s_p$ bestimmten Kreisabschnitte sein Maximum im Falle $m \equiv \overline{m}$ erreicht.

---

[1]) L. FEJES TÓTH: Über dichteste Kreislagerung und dünnste Kreisüberdeckung. *Comment. Math. Helv.* **23** (1949), pp. 342–349. Wir haben den untenstehenden Beweis des Hilfsatzes 1 hierher übernommen, und zwar einerseits vollständigkeitshalber, andererseits hinsichtlich der Tatsache, daß auch der Beweis des Hilfsatzes 2 auf Gedanken dieses Beweises beruht. Ein anderer Beweis des Hilfsatzes 1 befindet sich in meinem Aufsatz: On the densest packing of circles in a convex domain. *D. Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forh.* **21** (1948), pp. 68–71.

[2]) Genauere Literaturangaben findet man in meinen Arbeiten [1]).

[3]) L. FEJES: Einige Bemerkungen über die dichteste Lagerung inkongruenter Kreise. *Comment. Math. Helv.* **17** (1944–45), pp. 256–261. Vgl. auch L. FEJES TÓTH: Some packing and covering theorems. *Acta Sci. Math., Szeged,* im Druck befindlich.

Für $p \leqq 6$ ist diese Behauptung trivial. Im Fall $p > 6$ beachte man, daß die Sehnenmittelpunkte von einander einen Abstand $\geqq 1$ besitzen. Man rechnet aber leicht nach, daß höchstens 7 Punkte mit dieser Eigenschaft in den von $k$ und $u$ begrenzten Kreisring eingelagert werden können. Da aber eine Seitenlänge des $u$ einbeschriebenen regulären 7-Ecks $= \frac{4}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{7} = 1{\cdot}00201 \ldots$ ist, also kaum die Einheit übertrifft, so leuchtet ein, daß diese sieben Punkte sehr nahe am Rand von $u$ liegen müßen. Somit können in diesem Fall die Sehnen $s_1, s_2, \ldots, s_7$ nur einen überaus kleinen Teil von $u$ abschneiden, womit alles bewiesen ist.

Fall 2. Wir schreiten von einem gemeinsamen Randpunkt von $k_i$ und $H$ ausgehend am Rand von $m_i$ in den beiden entgegengesetzten Richtungen fort, bis wir auf je einem Eckpunkt $E_1$, bzw. $E_2$ stoßen. Die Ungleichung $m_i \geqq 2 + \frac{\pi}{2}$ ergibt sich aus der Tatsache, daß $m_i$ einen Kappenbereich von $k_i$ enthält, bzw. selbst ein Kappenbereich von $k_i$ ist, dessen Innenwinkel bei den Eckpunkten $E_1$ und $E_2$ nicht stumpf sein können.

Nun gilt $T \geqq H = \sum_{i=1}^{\nu} m_i > \sqrt{12}\,\nu$, w. z. b. w.

Hilfsatz 2. *Es sei $G$ ein Gebiet, das von einem konvexen Gebiet $T$ durch Heraushebung einer endlichen Anzahl von in $T$ liegenden, nicht übereinandergreifenden Kreisscheiben entsteht. Ist in $G$ eine beliebige Anzahl kongruenter Kreise eingelagert, die nicht größer sind als der kleinste herausgehobene Kreis, so ist ihre Inhaltssumme $< \pi G/\sqrt{12}$.*

Beweis. Es seien $k_1, k_2, \ldots, k_\nu = \pi$ die in $G$ liegenden, $k_{\nu+1}, \ldots, k_\mu$ die herausgehobenen Kreise. Wir zerlegen $T$ durch die Konstruktion des obigen Beweises in die Teilgebiete $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$. Dann gilt nach dem obigen Beweis offenbar $m_i \geqq \sqrt{12}$, für $i = 1, 2, \ldots, \nu$ und daher $G > \sum_{i=1}^{\nu} m_i \geqq \sqrt{12}\,\nu$, w. z. b. w.

Nun ist unser Satz nach Hilfsatz 1 für $n = 1$ richtig. Nehmen wir ihre Gültigkeit für $n-1$ statt $n$ an, so gilt für den außerhalb der $n-1$-erlei größeren Kreisen liegenden Teilgebiet $G$ von $T$:

$$G/T \geqq (1-\pi/\sqrt{12})^{n-2}.\ \{1-\mathrm{Max}\,(\pi/\sqrt{12},\ K/T)\}.$$

Dann gilt aber für denjenigen Flächenteil $t$ von $G$, die nicht von den kleinsten Kreisen überdeckt sind, nach Hilfsatz 2 die Ungleichung

$$t/G > 1-\pi/\sqrt{12}.$$

Multipliziert man die beiden letzteren Ungleichungen miteinander, so ergibt sich die gewünschte Ungleichung.

*(Eingegangen am 15. September 1949.)*