Über beschränkte additive Funktionale konvexer Polygone.

Von H. HADWIGER in Bern.

Zunächst will ich einige für die folgenden Ausführungen verbindliche Bezeichnungen festlegen. Unter einem konvexen Polygon, kürzer *Eipolygon*, verstehen wir eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Punktmenge der Ebene, deren Rand aus endlich vielen Strecken zusammengefügt ist. Punkte und Strecken sind entartete Eipolygone. Es ist zweckdienlich, ein kartesisches Achsensystem (x, y) einzuführen. Das durch $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ gegebene *Einheitsquadrat* E ist ein in der Formulierung eines Postulates ausgezeichnetes Eipolygon. Durch die Anschrift $A = \Sigma A_\nu$ will ich eine *Zerlegung* des Eipolygons A in endlich viele Teileipolygone A_ν, welche paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben sollen, kenntlich machen. Für die Formulierung eines weiteren Postulates besonders bedeutsam ist die Zerlegung $C = A + B$, wonach ein Eipolygon C durch eine Sehne $S = AB$ in zwei Teileipolygone A und B zerteilt ist (vgl. Abb. 1). Zwei Eipolygone A und B, welche durch eine Bewegung in der Ebene miteinander zur Deckung gebracht werden können, heißen *bewegungsgleich*, geschrieben $A \simeq B$; können diese sogar durch eine Translation zur Deckung gebracht werden, so nennen wir sie insbesondere *translationsgleich*, geschrieben $A \cong B$.

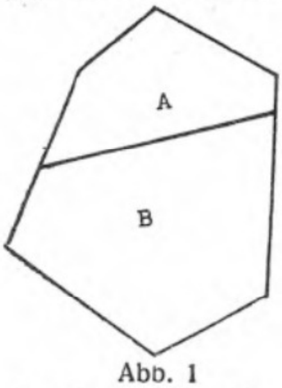

Abb. 1

Ein Eipolygon A kann in translationsinvarianter Weise durch die Längen s_ν der im positiven Umlaufssinn numerierten Randstrecken und die Winkel ξ_ν, welche die in den entsprechenden Randstrecken nach außen hin errichteten Normalen mit der positiven x-Achse (im positiven Umlaufssinn gemessen) einschließen, charakterisiert werden. Dies werde ich gelegentlich durch $A = (s_1, \ldots s_n | \xi_1, \ldots \xi_n)$ symbolisch zum Ausdruck bringen. (vgl. Abb. 2).

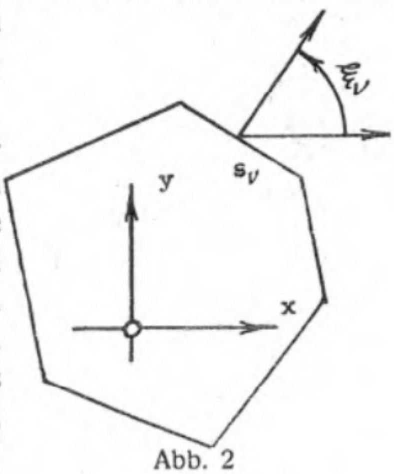

Abb. 2

§ 1. Translationsinvariante additive Eipolygonfunktionale.

Es bezeichne $\varphi(A)$ ein über der Klasse aller Eipolygone A eindeutig definiertes Funktional, welches die folgenden Postulate erfüllen soll:

$$\text{(I)} \qquad \varphi(A) = \varphi(A'), \qquad A \simeq A',$$
$$\text{(II)} \qquad \varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A+B) + \varphi(AB);$$
$$\text{(III)} \qquad |\varphi(A)| < \omega \text{ für alle } A \subseteqq E.$$

Die Schranke ω in (III) hängt vom Funktional, nicht aber von A ab.

Ein Funktional der genannten drei Eigenschaften, kurz ein (I, II, III)-Funktional ist also *translationsinvariant, additiv* und *beschränkt.*

An die Stelle von Postulat (II) kann auch

$$(\overline{\text{II}}) \qquad \varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A+B)$$

treten. Ein (I, $\overline{\text{II}}$, III)-Funktional läßt sich auffassen als ein (I, II, III)-Funktional, welches für alle entarteten Eipolygone verschwindet. Ein solches will ich *einfach-additiv* nennen.

Nun sollen zunächst einige Funktionale der von uns betrachteten Art aufgezählt werden: Ein triviales additives Funktional ist offenbar

$$\varphi(A) = \alpha \qquad \text{(Konstante)}, \tag{1}$$

welches für $\alpha = 0$ einfach-additiv ist. Es sei weiter $\beta = \beta(\xi)$ eine im Intervall $0 \leqq \xi < 2\pi$ definierte und dort beschränkte Winkelfunktion; dann ist

$$\varphi(A) = L_\beta(A) = \sum_1^n s_\nu \beta(\xi_\nu) \tag{2}$$

ein additives Funktional. Ist die Winkelfunktion β insbesondere *ungerade*, d. h. ist $\beta(\xi + \pi) = -\beta(\xi)$ (Winkeladditionen sind stets mod 2π auszuführen), so ist das Funktional einfach-additiv.

In den Ansatz (2) sind die Bestimmungsstücke s_ν und ξ_ν des Eipolygons $A = (s_1, \ldots s_n \mid \xi_1, \ldots \xi_n)$ eingegangen. Endlich sei das an sich nächstliegende Funktional

$$\varphi(A) = \gamma F(A) \tag{3}$$

an letzter Stelle aufgeführt; es bezeichnet γ eine willkürliche Konstante und $F(A)$ den Flächeninhalt von A Dieses Funktional ist stets einfach-additiv.

Die Gesamtheit der (I, II, III)- bzw. (I, $\overline{\text{II}}$, III)-Funktionale bilden eine lineare Mannigfaltigkeit. Aus den bisherigen Ansätzen (1) bis (3) ergeben sich durch lineare Kombination die folgenden additiven bzw. einfach-additiven Funktionale

$$\varphi(A) = \alpha + L_\beta(A) + \gamma F(A) \tag{4}$$

bzw.

$$\varphi(A) = \qquad L_{\overline{\beta}}(A) + \gamma F(A), \tag{5}$$

wobei α und γ willkürliche Konstante, $\beta(\xi)$ bzw. $\overline{\beta}(\xi)$ eine willkürliche beschränkte bzw. willkürliche ungerade beschränkte Winkelfunktion bezeichnet.

Es ist ein Hauptziel dieser Arbeit nachzuweisen, daß die mit (4) und (5) gewonnenen Funktionale die einzig möglichen sind, welche die entsprechend gültigen Postulate erfüllen, d. h. ich beweise nachfolgend den

Satz 1: *Die Mannigfaltigkeit der beschränkten, translationsinvarianten und additiven bzw. einfach-additiven Eipolygonfunktionale ist identisch mit der durch Ansatz* (4) *bzw. Ansatz* (5) *gegebenen Schar.*

Beweis: Daß die mit (4) und (5) angesetzten Funktionale die Postulate (I, II, III) und (I, $\overline{\text{II}}$, III) erfüllen, ist bereits erwähnt worden und unmittelbar verifizierbar. Unsere Aufgabe läßt sich darauf beschränken, zu zeigen, daß jedes (I, II, III)-Funktional in der Gestallt (4) darstellbar ist.

Hieraus ergeben sich dann die (I, $\overline{\text{II}}$, III) Funktionale durch Spezialisierung, wobei notwendig die Darstellung (5) resultiert. Es sei nun also $\varphi(A)$ ein (I, II, III)-Funktional. Wegen (I) hat dieses für alle Punkte P denselben Wert $\varphi(P)=\alpha$. Wir setzen

(6) $$\varphi_1(A)=\varphi(A)-\alpha,$$

sodaß $\varphi_1(P)=0$ ist. $\varphi_1(A)$ ist natürlich wieder ein (I, II, III)-Funktional. Für eine Strecke $S=(s,s\,|\,\xi,\xi+\pi)$ ist wieder wegen (I) $\varphi_1(S)=f(s,\xi)$. Durch Anwendung von (II) gewinnt man die Funktionalgleichung $f(x,\xi)+f(y,\xi)=$ $=f(x+y,\xi)$, und da im Hinblick auf (III) die fragliche Lösung für genügend kleine Argumente x beschränkt ist, läßt sich in bekannter Weise auf $f(s,\xi)=\sigma(\xi)\,s$ schließen, wobei $\sigma(\xi)$ eine beschränkte Winkelfunktion ist. Wir setzen nun $\bar{\bar{\beta}}(\xi)=\frac{1}{2}\sigma(\xi)$; offenbar gilt dann $\bar{\bar{\beta}}(\xi+\pi)=\bar{\bar{\beta}}(\xi)$, sodaß $\bar{\bar{\beta}}$ eine beschränkte *gerade* Winkelfunktion ist. Für jede Strecke S ist jetzt $\varphi_1(S)=L_{\bar{\bar{\beta}}}(S)$. Nun setzen wir

(7) $$\varphi_2(A)=\varphi_1(A)-L_{\bar{\bar{\beta}}}(A),$$

sodaß $\varphi_2(S)=0$ ist. $\varphi_2(A)$ ist nunmehr ein (I, $\overline{\text{II}}$, III)-Funktional. Für ein Rechteck $R=\left(a,b,a,b\,|\,0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ ist ebenfalls wieder wegen (II) $\varphi_2(R)=$ $=r(a,b)$. Nach ($\overline{\text{II}}$) gelten die Funktionalgleichungen $r(a,x)+r(a,y)=r(a,x+y)$ und ebenso $r(x,b)+r(y,b)=r(x+y,b)$; analog wie oben schließt man wegen (III) auf $r(a,b)=\gamma\,a\,b$. Also ist $\varphi_2(R)=\gamma\,F(R)$. In gleichartiger Weiterentwicklung setzen wir

(8) $$\varphi_3(A)=\varphi_2(A)-\gamma\,F(A).$$

sodaß $\varphi_3(R)=0$ ist. $\varphi_3(A)$ ist wieder ein (I, $\overline{\text{II}}$, III)-Funktional.

Endlich betrachten wir ein Trapez $U=\left(p,u,q,a\,|\,0,\xi\;\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, $0<\xi<\pi$. Da $\varphi_3(A)$ für Rechtecke verschwindet, folgert man aus ($\overline{\text{II}}$), daß $\varphi_3(U)$ nur von u und ξ abhängig ist; also ist $\varphi_3(U)=t(u,\xi)$ Wieder nach ($\overline{\text{II}}$) ergibt sich die Funktionalgleichung $t(x,\xi)+t(y,\xi)=t(x+y,\xi)$, sodaß sich mit (III) $t(u,\xi)=\tau(\xi)u$ schließen läßt, wobei $\tau(\xi)$ eine in $0<\xi<\pi$ definierte beschränkte Winkelfunktion ist. Insbesondere ist $\tau\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Nun führen wir eine ungerade Winkelfunktion $\bar{\beta}(\xi)$, für die also $\bar{\beta}(\xi+\pi)=-\bar{\beta}(\xi)$ gilt, durch den Ansatz $\bar{\beta}(\xi)=\tau(\xi)$ für $0<\xi<\pi$ und $\bar{\beta}(0)=0$ ein; diese ist offenbar beschränkt wegen (III). Für jedes Trapez der hier betrachteten Art ist sodann $\varphi_3(U)=L_{\bar{\beta}}(U)$ Endlich setzen wir

(9) $$\varphi_4(A)=\varphi_3(A)-L_{\bar{\beta}}(A),$$

sodaß $\varphi_4(U)=0$. $\varphi_4(A)$ ist wieder ein (I, $\overline{\text{II}}$, III)-Funktional.

Nun schließt man, daß das Funktional $\varphi_4(A)$ für allgemeiner gestaltete Trapeze $V=(p,u,q,v\,|\,0,\xi,\pi,\eta)$ $0<\xi<\pi, \pi<\eta<2\pi$, verschwinden muß, da sich ein solches als Differenz zweier Trapeze U und U' bilden läßt, wobei sodann ($\overline{\text{II}}$) passend angewandt werden kann. Weiter läßt sich ein beliebiges Eipolygon A streifenartig in endlich viele Trapeze V_ν zerlegen. Sukzessive Anwendung von ($\overline{\text{II}}$) führt zum entscheidenden Schluß, daß für jedes Eipolygon A

(10) $$\varphi_4(A)=0$$

ist, sodaß also das mit der letzten Stufe aufgestellte Funktional indentisch verschwindet. Nach (6) bis (10) gewinnt man für das ursprüngliche Funktional zunächst die Darstelleung

(11) $$\varphi(A)=\alpha+L_{\bar{\bar{\beta}}}(A)+\gamma F(A)+L_{\bar{\beta}}(A)$$

Nun ist noch $L_{\bar{\beta}}(A)+L_{\bar{\bar{\beta}}}(A)=L_\beta(A)$, wobei $\beta(\xi)=\bar{\bar{\beta}}(\xi)+\bar{\beta}(\xi)$ gesetzt wird; die letzte Relation gibt übrigens die eindeutige Zerlegung einer Winkelfunktion β in die gerade und ungerade Komponente $\bar{\bar{\beta}}$ und $\bar{\beta}$. Nun hat man

(12) $$\varphi(A)=\alpha+L_\beta(A)+\gamma F(A),$$

wo also α und γ zwei Konstanten und β eine beschränkte Winkelfunktion ist. Damit ist der Satz 1 vollständig bewiesen.

§. 2. Bewegungsinvariante additive Eipolygonfunktionale.

In diesem zweiten Teil will ich das Postulatet (I) ersetzen durch

($\bar{\text{I}}$) $$\varphi(A)=\varphi(A'), \qquad A\simeq A',$$

und im übrigen die beiden andern Postulate (II) bzw. ($\overline{\text{II}}$) und (III) beibehalten. Es soll sich also um die über der Klasse der Eipolygone A definierten *bewegungsinvarianten, additiven* und *beschränkten* Funktionale $\varphi(A)$ handeln. Da die Voraussetzungen verstärkt wurden, handelt es sich offenbar um eine echte Teilmannigfaltigkeit der im ersten Teil betrachteten Schar der translationsinvarianten Funktionale. Um die Mannigfaltigkeit der ($\bar{\text{I}}$, II, III)- bwz. ($\bar{\text{I}}$, $\overline{\text{II}}$, III)-Funktionale zu gewinnen, genügt es im Hinblick auf dem Satz 1 diejenigen Funktionale der Schar (4) bzw. (5) herauszusuchen, welche nicht nur (I) sondern sogar ($\bar{\mathrm{I}}$) erfüllen. So ergeben sich die Ansätze für die additiven bzw. einfach-additiven Funktionale

$$\varphi(A) = \alpha + \beta L(A) + \gamma F(A) \tag{13}$$

bzw.

$$\varphi(A) = \gamma F(A), \tag{14}$$

wo α, β und γ willkürliche Konstanten, $L(A)$ und $F(A)$ Randlänge (Umfang) und Flächeninhalt bedeuten.

Die Tatsache, daß die Funktionale (13) und (14) die einzig möglichen sind, welche die entsprechenden Postulate erfüllen, kann unabhängig von den Vorausgehenden sehr einfach bewiesen werden und ist bekannt[1]). Der Vollständigkeit wegen formulieren wir den entsprechenden

Satz 2: *Die Mannigfaltigkeit der beschränkten, bewegungsinvarianten und additiven bzw. einfach-additiven Eipolygonfunktionale ist identisch mit der durch Ansatz* (13) *bzw. Ansatz* (14) *gegebenen Schar.*

Beweis: Im Hinblick auf den Umstand, daß die Satzaussage geläufig ist, will ich mich darauf beschränken, den Nachweis, wie er im Rahmen unserer Entwicklung verläuft, nur kurz anzudeuten. Man zeigt zunächst, daß ein Funktional $L_{\bar{\bar{\beta}}}(A)$ mit einer geraden Winkelfunktion $\bar{\bar{\beta}}$ nur dann das Postulat ($\bar{\mathrm{I}}$) befriedigen kann, wenn $\bar{\bar{\beta}}(\xi) = \beta$ (konstant) ausfällt. Analog zeigt man, daß dies für ein Funktional $L_{\bar{\beta}}(A)$ mit ungerader Winkelfunktion $\bar{\beta}$ nur dann zutrifft, wenn $\bar{\beta}(\xi) = 0$ ist. Im ersteren Fall wird also $L_{\bar{\bar{\beta}}}(A) = \beta L(A)$, und im letzteren $L_{\bar{\beta}}(A) = 0$ sein. Ein Funktional $L_{\beta}(A)$ erfüllt ($\bar{\mathrm{I}}$) nur dann, wenn dies auch für die gerade und ungerade Komponente $L_{\bar{\bar{\beta}}}(A)$ und $L_{\bar{\beta}}(A)$ der Fall ist. Alles übrige ergibt sich von selbst.

(Eingegangen am 16. November 1949.)

---

[1]) Vgl. die Ausführungen von W. Blaschke über die bewegungsinvarianten addierbaren Komplexfunktionen in „Vorlesungen über Integralgeometrie", Zweites Heft, Leipzig und Berlin (1937), § 43. Unsere Beweiskonstruktion ist methodisch der Blaschkeschen Schlußweise nachgebildet.