Remarque sur le prolongement des transformations topologiques.

Par ISTVÁN FÁRY in Paris.

1. D'après un théorème bien connu de la topologie algébrique (théorème de JORDAN-BROUWER), si S est une surface homéomorphe à la sphère et située dans l'espace euclidien E de dimension trois, elle décompose E en deux domaines D, D'; nous désignons toujours par D le domaine borné et par D' le domaine non borné. L'exemple remarquable d'ANTOINE (voir ANTOINE [1]) montre que la structure de ces domaines peut être très compliquée: le groupe fondamental peut être infini, et il peut se produire par conséquent que l'intérieur de S ne soit pas homéomorphe à la boule. L'exemple d'ANTOINE fut simplifié par M. ALEXANDER (voir ALEXANDER [3]), qui a démontré en même temps, que cette singularité n'est pas possible pour les polyèdres; en d'autres termes, si S est un polyèdre (toujours homéomorphe à la sphère), alors $S \cup D$ est homéomorphe à la boule fermée (voir ALEXANDER [2]). Le théorème de M. ALEXANDER est valable plus généralement:

Théorème de M. Alexander. Soit S une surface, qui est homéomorphe à la sphère. Nous supposons qu'il existe une famille $\{P\}$ de plans parallèles, telle que, sauf un nombre fini de plans, dits exeptionnels, l'intersection $S \cap P$ se décompose en un nombre fini de courbes de Jordan, qui varient continûment avec P. Les plans exemptionnels sont de deux sortes:

1° l'intersection $S \cap P$ contient un point singulier, tel que si P passe par cette position singulière, une des courbes de l'intersection se réduit à un point, et disparaît après;

2° l'intersection $S \cap P$ contient un point singulier q, qui est un point multiple des courbes $S \cap P$; si P passe par cette position singulière, les courbes $S \cap P$ se rangent dans un autre ordre.

Dans ces conditions, si nous désignons par D le domaine borné limité par S, le domaine fermé $S \cup D$ est homéomorphe à la boule fermée[1]).

---

[1]) En vue d'applications ultérieures remarquons que le théorème ci-dessus vaut pour les surfaces S, qui se décomposent en un nombre fini de surfaces convexes.

Le théorème d'ALEXANDER, cité au-dessus, est valable pour une classe assez vaste de surfaces (contenant la classe des polyèdres), mais l'hypothèse du théorème ne se formule pas aisément; à vrai dire il ne s'agit ni d'hypothèse portant sur les données différentielles de la surface, ni de celles portant sur ses propr étés topologiques. Des exemples particuliers montrent qu'il n'existe pas des hypothèses nécessaires et suffisantes, portant sur les données différentielles de la surface, pour que $S \cup D$ soit homéomorphe à la boule fermée. Tout de même, ce théorème étant unique dans son genre, il n'est peut être pas inutile de donner une classe de surfaces (contenant la classe des polyèdres), délimitée nettement et simplement à l'aide des données différentielles, pour laquelle le théorème d'ALEXANDER est valable.

2. Théorème. — *Soit S une surface homéomorphe à la sphère, qui est située dans l'espace euclidien à trois dimensions; l'ensemble complémentaire de S se décompose en un domaine borné D et en un domaine non borné D'. Si nous supposons qu'en chaque point de S le paratingent laisse échapper une direction, le domaine fermé $S \cup D$ est homéomorphe à la boule fermée, tandis que $S \cup D'$ est homéomorphe au complémentaire d'une boule ouverte.*

3. Nous remarquons tout d'abord que la première proposition du théorème entraine la seconde. En effet, une transformation par rayons vecteurs réciproques, dont le centre o est situé dans D, fait correspondre à S une surface S' ; S' est homéomorphe à la sphère, et en chacun de ses points le paratingent laisse échapper une direction. Or, si la première proposition du théorème est valable, la fermeture de l'intérieur de S est homéomorphe à la boule fermée, en même temps que ce dernier, privé du point o, est homéomorphe à la fermeture de l'extérieur de S Ceci montre qu'il suffit de considérer la première proposition du théorème.

4. Nous commençons la démonstration du théorème en décomposant la surface S en un nombre fini de petites parties, qui sont suffisamment régulières. Plus exactement: déterminons les parties

$$(1) \qquad F_1, \ldots, F_k, \quad F_1 \cup \ldots \cup F_k = S; \quad G_1, \ldots, G_k, \quad F_i \subset G_i \subset S$$

de la surface S, qui sont telles que les conditions suivantes sont valables:

a) par un choix convenable du système des coordonnées (ξ, η, ζ) la surface G_i admet une représentation de la forme

$$(2) \qquad \zeta = g(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in G_i'$$

où g est unc fonction univalente continue, satisfaisant à une condition de Lipschitz;

b) les projections G_i', F_i' de G_i, F_i respectivement sur le plan $\zeta = 0$ *sont des polygones convexes,* et tels que F_i' est contenu dans intérieur de G_i' (ainsi g est définie dans le domaine convexe G_i'; on peut supposer que la représentation (2) est valable dans un domaine plus grand que G_i').

D'après les résultats bien connu de M. BOULIGAND (voir par exemple BOULIGAND [4], pp. 76—78) la détermination des domaines (1) jouissant des propriétés *a), b)* est toujours possible. Nous fixons alors un tel ensemble de domaines (1).

5. Nous allons maintenant construire une surface S^*, dont l'intérieur soit désigné par D^*, qui est la "modification de S suivant G_1" dans laquelle la partie $F_1 \subset G_1$ de S est remplacée par "une portion plus régulière". Plus précisément: S^* serait telle que: 1° $S^* \cup D^*$ est homéomorphe à $S \cup D$; 2° en chaque point de S^* le paratingent laisse échapper une direction; 3° les surfaces S^* et S coincident sur la partie $S - G_1$ de S; 4° l'homéomorphisme de 1° fait correspondre à F_1, G_1 des parties F_1^*, G_1^* de S^*, donc F_1^* est la somme d'un nombre fini de surfaces convexes.

Supposons pour un moment que l'existence de S^* ait été démontré. Au bout d'un nombre fini ($\leqq k$) d'opérations on obtient une surface $\widetilde{S}$ (dont l'intérieur soit désigné par $\widetilde{D}$), telle que $\widetilde{S} \cup \widetilde{D}$ est homéomorphe à $S \cup D$, $\widetilde{S}$ étant la somme d'un nombre fini de surfaces convexes. Or, d'après le théorème cité de M. ALEXANDER (voir [1])) $\widetilde{S} \cup \widetilde{D}$ est homéomorphe à la boule fermée, la démonstration du théorème est ainsi complète.

6. Pour construire la surface S^* nous choisissons le système des coordonnées (ξ, η, ζ) de telle manière que la représentation (2) soit valable pour G_1; nou voulons orienter (ξ, η, ζ) de telle façon que les points voisins de G_1 et au-dessous de G_1 soient dans l'intérieur de S. Évidemment on a un $\varepsilon > 0$, tel que les domaines

$$\left.\begin{array}{l} g(\xi, \eta) - \varepsilon < \zeta < g(\xi, \eta) \\ g(\xi, \eta) < \zeta < g(\xi, \eta) + \varepsilon \end{array}\right. \qquad ((\xi, \eta) \text{ est dans un entourage de } G_1')$$

ne contiennent aucun point de la surface S; ainsi le domaine

(3) $$H\colon\; g(\xi, \eta) - \varepsilon < \zeta < g(\xi, \eta) + \varepsilon, \quad (\xi, \eta) \in G_1'$$

est tel que

(4) $$H \cap S = G_1.$$

Nous subdivisons le domaine G_1' en petits domaines polygonaux convexes, qui soient tels que, si

$$D_1, \ldots, D_m \qquad (D_i \subset G_1;\; i = 1, \ldots, m)$$

désignent les parties de S situées au-dessus de ces domaines, alors *l'enveloppe convexe* K_j de D_j soit contenue dans (3) $(j = 1, \ldots, m)$. Cette subdivision est toujours possible bien entendu. D'après (4) on a

$$K_i \cap S = D_i$$

et

(5) $K_i \cap K_j$ $(i \neq j)$ est l'enveloppe convexe de $D_i \cap D_j$,

qui est situé dans un plan perpendiculaire au plan $\zeta = 0$.

Considérons le domaine

$$K = K_1 \cup \ldots \cup K_m$$

qui contient la surface G_1; plus précisément on a, vu que $K \subset \bar{H}$ et d'après (4)

$$K \cap S = G_1.$$

Chaque droite perpendiculaire au plan $\zeta = 0$ coupe K suivant un segment; d'après (5) ce segment varie continûment, si sa droite de support coupe G_1' en un point intérieur. On peut alors parler de la surface inférieure G_I et supérieure G_S de K, qui admettent les représentations

$$\begin{aligned} G_I: \quad & \zeta = k_I(\xi, \eta) \\ G_S: \quad & \zeta = k_S(\xi, \eta) \end{aligned} \qquad ((\xi, \eta) \in G_1')$$

(où ces fonctions sont univalentes et continues dans l'intérieur de G_1'); le domaine K est déterminé par l'inégalité

$$K: \quad k_I(\xi, \eta) \leqq \zeta \leqq k_S(\xi\ \eta) \qquad ((\xi, \eta) \in G_1').$$

Nous considérons maintenant une fonction $f(\xi, \eta) \geqq 0$ deux fois continûment dérivable, et telle que

$$f(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, \text{ si } (\xi, \eta) \in F_1' \\ 0, \text{ si } (\xi, \eta) \text{ est dans le complémentaire de } G_1' (\supset F_1'). \end{cases}$$

Posons enfin

$$(6) \qquad \begin{aligned} g_I^*(\xi, \eta) &= f(\xi, \eta)\, k_I(\xi, \eta) + (1 - f(\xi, \eta))\, g(\xi, \eta), \\ g_S^*(\xi, \eta) &= f(\xi, \eta)\, k_S(\xi, \eta) + (1 - f(\xi\ \eta\ ))\, g(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Comme on a toujours $k_I(\xi, \eta) \leqq k_S(\xi, \eta)$, on voit que $g_I^*(\xi, \eta) \leqq g_S^*(\xi\ \eta)$. Ainsi les fonctions g_I^* et g_S^* définissent des surfaces G_I^*, G_S^*, qui sont telles que $(S - G_1) \cup G_I^*$ et $(S - G_1) \cup G_S^*$ sont des surfaces homéomorphes à la sphère; l'intérieur de la surface G_1 est situé dans l'intérieur de $G_I^* \cup G_S^*$.

7. Considérons maintenant une droite d orthogonale au plan $\zeta = 0$. Les points d'intersection de d avec les surfaces G_I^*, G_1, G_S^* soient désignés par p, q, r. Nous faisons correspondre par homothétie au segment pq le segment pr (ceci a un sens même si les points ne sont pas tous distincts). En faisant cette construction pour toute droite coupant la surface G_1, nous obtenons une application topologique du domaine limité par $G_I^* \cup G_1$ sur le domaine limité par $G_I^* \cup G_S^*$; cette application est l'identité dans les points p, c'est-à-dire sur la surface G_I^*. En le prolongeant par l'application identique dans l'intérieur de S, nous avons une application topologique de $S \cup D$ sur $S^* \cup D^*$. La surface F_1 est transformée en une surface F_1^*, qui est une partie de la frontière de K (voir (6)); F_1^* se décompose ainsi en un nombre fini de surfaces convexes. La surface S^* jouit alors des propriétés 1°—4°, la démonstration du théorème est alors complète.

8. Lemme. *Soit D un domaine dans E, limité par la surface S. Supposons qu'il existe une application topologique*

$$F: \ D \cup S \longrightarrow B \cup S'$$

où B désigne une boule ouverte, dont la frontière est la sphère S'. Si on se donne une application topologique

$$g: \ S \longrightarrow S',$$

on peut la prolonger en une application topologique

$$G: \ D \cup S \longrightarrow B \cup S', \tag{7}$$

(*telle que* $G(x) = g(x)$, *si* $x \in S$).

Nous allons construire un automorphisme Φ de la boule B (cela veut dire une transformation topologique $B \longrightarrow B$), telle que l'application ΦF soit identique à g sur la fontière S de D: $\Phi F(x) = g(x)$ $(x \in S)$. Si l'on pose $G = \Phi F$, on obtient le prolongement G de g.

La construction de Φ est la suivante. Soit o le centre de B; posons $\Phi(o) = o$, et

$$\Phi(x) = g(F^{-1}(x)), \text{ si } x \in S'. \tag{8}$$

Soit p $(\neq o)$ un point donné, et désignons par p' l,intersection du rayon op avec la sphère S'. Choisissons le point q sur le rayon $o\Phi(p')$ ($\Phi(p')$ étant défini par (8)), telle que $\overline{op} = \overline{oq}$, et posons

$$\Phi(p) = q.$$

Évidemment Φ est une transformation topologique; (8) est valable c'est-à-dire pour $G = \Phi F$ on a $G(x) = g(x)$, si $x \in S$.

9. Nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème. — *Soit S une surface (située dans l'espace E à trois dimensions), qui est homéomorphe à la sphère. Désignons par S' une sphère, et par $f: S \longrightarrow S'$ une transformation topologique. Si en chaque point de S le paratingent laisse échapper une direction, alors la transformation f se prolonge dans une transformation topologique F de tout l'espace sur lui-même:*

$$F: E \longrightarrow E, \quad F(x) = f(x), \quad \text{si } x \in S.$$

D'après le théorème du no 2, on a les applications

$$G': \ D' \cup S \longrightarrow B' \cup S',$$
$$F': \ D \cup S \longrightarrow B \cup S',$$

où D', D désignent l'extérieur, l'intérieur de S respectivement, B', B ceux de la sphère S'. Désignons par $g(x)$ la restriction de $G'(x)$ sur la surface S. D'après le lemme on peut prolonger $g(x)$ en une transformation topologique $G(x)$, définie dans $D \cup S$. (voir (7)). On obtient ainsi l'application $F(x)$ du théorème en posant

$$F(x) = \begin{cases} G'(x), \text{ si } x \in D' \cup S \\ G(x), \text{ si } x \in D \cup S. \end{cases}$$

10. Faisons enfin quelques remarques sur la possibilité de généraliser le théorème d'ALEXANDER à un espace euclidien à n dimensions, bien que la méthode d'ALEXANDER ne puisse être étendue.

Soit D un domaine situé dans l'espace euclidien E_n de dimension n; je suppose que tous les groupes d'homotopie de D disparaissent.

Dans le cas $n=2$, d'après un théorème bien connu de la théorie des fonctions d'une variable complexe, on a une application $f\colon B_2 \longrightarrow D$ qui est conforme dans l'intérieur du disque B_2. Cette application f transporte alors la géométrie hyperbolique (modèle de POINCARÉ) de B_2 dans le domaine D

Si nous considérons maintenant le cas $n \geqq 3$, on a toujours la géométrie hyperbolique dans l'intérieur de la boule B_n de dimension n. On n'a pas maintenant en général l'application conforme $f\colon B_n \longrightarrow D$, mais si on avait une application topologique f de cette sorte, on pourrait transporter la géométrie hyperbolique de B_n dans le domaine D. D'autre part, si on pouvait établir une géométrie hyperbolique dans l'intérieur de D, on pourrait aussi déterminer une application topologique $f\colon B_n \longrightarrow D$.

Pour démontrer l'existence d'une application $f\colon B_n \longrightarrow D$, on peut alors essayer de construir une géométrie hyperbolique dans un domaine D, dont les groupes d'homotopie disparaissent. Je ne sais pas si les méthodes actuelles de la topologie et de la géométrie nous permettent d'établir une telle géométrie, mais je voudrais signaler une possibilité de construire une "géométrie intrinsèque" du domaine D, dans laquelle les géodésiques sont localement uniques. Il me semble d'ailleurs très probable que par une amélioration de la méthode que nous voulons indiquer on peut même construire une géométrie, où les géodésiques sont globalement uniques.

Nous considérons l'espace E_{n+1} doué des coordonnées cartésiennes $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, et nous identifions l'espace E_n avec le sous-espace $x_{n+1}=0$ de E_{n+1}. En chaque point x de D soit $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ l'inverse de la valeur de la distance du point x à la frontière de D. Nous définissons ainsi une surface

$$S\colon\ x_{n+1}=f(x)=f(x_1, \ldots, x_n) \qquad (x \in D) \tag{9}$$

dans E_{n+1}. Pour chaque couple de points $p, q \in D$ nous définissons la distance $d_D(p, q)$ comme la borne inférieure de la longeur des courbes joignant les points $f(p)$, $f(q)$ sur la surface S. On peut caractériser cette métrique du domaine D aussi par la convention suivante: La longueur de la courbe $x(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1;\ x(0)=p,\ x(1)=q)$ doit être la longueur euclidienne de la courbe $f(x(t))$ dans l'espace E_{n+1}. Si la surface S est suffisemment régulière les géodésiques seront localement uniques, mais je ne connais pas de méthodes qui permettent d'établir l'unicité globale des géodésiques (même en faisant des hypothèses supplémentaires concernant S).

Bibliographie.

[1] L. Antoine: Sur l'homéomorphisme de deux figures et leurs voisinages, *Journ. de Math. pures et appl.* (8) **4** (1921), pp. 221—235.

[2] J. W. Alexander: On the subdivision of 3-space by a polyhedron, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **10** (1924), pp. 6—8.

[3] J. W. Alexander: An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected, *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, **10** (1924), pp. 8—10.

[4] G. Bouligand: Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris, Vuibert (1932).

(Reçu le 18 novembre 1949.)