Über das Krümmungsmaß in Finslerschen Räumen.[1])

Von O. VARGA in Debrecen.

Für einen Finslerschen Raum hat L. BERWALD eine zu einem Bivektor gehörige skalare Krümmung B definiert, die die natürliche Verallgemeinerung des entsprechend definierten Riemannschen Krümmungsmaßes bildet.[2]) Wir wollen diesen Skalar in der Folge als Berwaldsche Krümmung bezeichen. Der Bivektor ist dabei in einem Linienelement (x, v) durch die Richtung $v^\varkappa$ und den von ihm linear unabhängigen Vektor $\eta^\varkappa$ definiert. Es ist also

$$B = B(x, v, \eta).$$

In einer zweidimensionalen Finslerschen Mannigfaltigkeit (y^1, y^2) hat P. FINSLER eine Invariante $S(y, w)$ definiert,[3]) die er als innere Krümmung bezeichnet. Mit Hilfe des oben erwähnten Bivektors können wir nun eine im Punkte $x^\varkappa$ geodätische Fläche dadurch bestimmen, daß wir sämtliche Extremalen konstruieren, die in $x^\varkappa$ eine zum Bivektor gehörige Richtung berühren. Die so konstruierte zweidimensionale Mannigfaltigkeit besitzt natürlich ebenfalls eine Finslersche Maßbestimmung. Ist w diejenige Richtung der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, der v im n-dimensionalen Raum entspricht, so soll nachgewiesen werden, daß

$$B(x, v, \eta) = S(y, w)$$

gilt. Dies ist das genaue Analogon des bekannten Zusammenhanges zwischen dem Gaußschen und Riemannschen Krümmungsmaß.

§. 1. Die oskulierende Riemannsche Maßbestimmung.

Durch

$$x^\varkappa = x^\varkappa(t) \tag{1}$$

sei im Finslerschen Raum eine auf die Bogenlänge als Parameter bezogene Kurve gegeben. Wir betten dieselbe in eine Kurvenkongruenz

$$x^\varkappa = g^\varkappa(t^1, t^2, \ldots, t^n), \quad g^\varkappa(t, 0, \ldots, 0) \equiv x^\varkappa(t), \quad t = t^1, \tag{2}$$

ein. Der Parameter auf den einzelnen Kongruenzkurven ist dabei t^1. In dem

---

1) Vorgetragen an dem in Prag abgehaltenen gemeinsamen 3. Kongreß der tschechoslovakischen und 7. Kongreß der polnischen Mathematikers, 28. August—3. September 1949.

2) L. BERWALD [1], (siehe Schriftenverzeichnis am Ende der Arbeit), insbesondere Nr. 25.

3) P. FINSLER [1], insbesondere S. 104—106.

durch die Kongruenz (2) bedeckten Bereich T ist jedem Punkt durch $\partial_1 x^\varkappa$ ein Ortsvektor zugeordnet. Längs (1) sind diese Vektoren Einheitsvektoren. Da (2) eine Kurvenkongruenz darstellt, lassen sich diese Gleichungen nach den $t^\varkappa$ auflösen. Dadurch wird das Vektorfeld in T eine Ortsfunktion, die durch

(3) $$r^\varkappa = r^\varkappa(x^1, \ldots, x^n)$$

dargestellt werde. Die längs der Kurvenschar (2) oskulierende Riemannsche Maßbestimmung ist dann durch

(4) $$\bar{g}_{\alpha\beta}(x) \equiv g_{\alpha\beta}(x, r(x))$$

definiert.[4]) Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen den zu den $\bar{g}_{\alpha\beta}$ gehörigen Christoffelschen Symbolen erster Art und den Übertragungsparametern $\Gamma^*_{\alpha\beta\gamma}$ des Finslerschen Raumes herleiten. Wird wie üblich

(5) $$C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v^\gamma} g_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 (L^2)}{\partial v^\alpha \partial v^\beta \partial v^\gamma}$$

gesetz, so folgt, da L für einen Finslerschen Raum in den $v^\varkappa$ positiv homogen von erster Dimension ist,[5])

(6) $$C_{\alpha\beta\gamma} v^\alpha = C_{\alpha\beta\gamma} v^\beta = C_{\alpha\beta\gamma} v^\gamma = 0.$$

Wegen der Definition[6]) der $\Gamma^*_{\alpha\beta\gamma}$ und derjenigen der Christoffelschen Symbole erster Art erhält man bei Beachtung von (5) und (6) zunächst

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(x) r^\gamma \equiv \Gamma^*_{\alpha\beta\gamma}(x, r) r^\gamma + C_{\alpha\beta\gamma}\left(r^\gamma \partial_\gamma r^\varkappa + r^\gamma \frac{\partial}{\partial v^\gamma} G^\varkappa\right).$$

Nun sind aber die Funktionen $G^\varkappa$ in den $v^\varkappa$ von 2-ter Ordnung positiv homogen,[7]) so daß die letzteren Gleichungen auch in der Form

(7) $$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(x) r^\gamma \equiv \Gamma^*_{\alpha\beta\gamma}(x, r) r^\gamma + C_{\alpha\beta\varkappa} A^\varkappa$$

dargestellt werden können, wobei wir

(8) $$A^\varkappa = r^\gamma \partial_\gamma r^\varkappa + 2\, G^\varkappa$$

gesetz haben. Überschieben wir Gleichungen (7) nochmals mit r^α, so ergibt sich wegen (6) und drei bekannten Relationen der Finslerschen Geometrie:[8])

(9) $$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(x) r^\alpha r^\gamma \equiv \Gamma^*_{\alpha\beta\gamma}(x, r) r^\alpha r^\gamma \equiv 2\, G_\beta(x, r) \equiv 2\, G^\lambda g_{\lambda\beta}.$$

Aus (9) folgt zunächst, daß sich eine Extremale des oskulierenden Riemannschen Raumes und eine solche des Finslerschen Raumes, die $x^\varkappa(t_0)$, $r^\varkappa(t_0)$ zum gemeinsamen Linienelement besitzen, in 2-ter Ordnung berühren.[9]) Eine Extremale des Finslerschen Raumes genügt den Diffarentialgleichungen 2-ter

---

4) A. Nazim [1], S. 17—20.
5) E. Cartan [1], S. 11.
6) E. Cartan [1], S. 16, Formel (XII).
7) E. Cartan [1], S. 16—17.
8) E. Cartan [1], S. 16, Formeln (X)—(XII).
9) A. Nazim [1], S. 20.

Ordnung[10])

$$x''^{\varkappa} = -2\, G^{\varkappa}(x, x').$$

Dabei wurde die Ableitung nach der Bogenlänge mit einem Strich bezeichnet. Eine Extremale des oskulierenden Riemannschen Raumes V_n genügt bekanntlich den Differentialgleichung

$$\tilde{x}''^{\varkappa} = -\bar{\Gamma}^{\varkappa}_{\alpha\beta}\, \tilde{x}'^{\alpha}\tilde{x}'^{\beta}.$$

Wegen (9) und dem gemeinsamen Linienelement folgt hieraus in

$$x''^{\varkappa}(t_0) = \tilde{x}''^{\varkappa}(t_0)$$

unsere Behauptung.

Wir setzen nun voraus, daß die Kurve (1) eine Extremale $\mathfrak{E}_1$ ist. Für das Feld der Einheitsvektoren $r^{\varkappa}$ von $\mathfrak{E}_1$ gilt dann

$$\frac{dr^{\varkappa}}{dt} \equiv r^{\gamma}\partial_{\gamma} r^{\varkappa} = -2\, G^{\varkappa}(x, r), \tag{10}$$

oder wegen (8)

$$A^{\varkappa} = 0. \tag{10}$$

Da die $r^{\varkappa}$ längs $\mathfrak{E}_1$ auch im oskulierenden Raum V_n Einheitsvektoren sind, so folgt wegen (9), daß

$$\frac{dr^{\varkappa}}{dt} = -\bar{\Gamma}^{\varkappa}_{\alpha\beta} r^{\alpha} r^{\beta}$$

besteht, und somit $\mathfrak{E}_1$ auch im V_n eine Extremale ist. Wir können nun eine $\mathfrak{E}_1$ enthaltende Kurvenkongruenz bestimmen, so daß für das Richtungsfeld (3) längs $\mathfrak{E}_1$ nicht nur (10), sonder sogar

$$\partial_{\gamma} r^{\varkappa} = -G^{\varkappa}_{\gamma}(x, r) \quad \text{mit} \quad G^{\varkappa}_{\gamma} = \frac{\partial}{\partial v^{\gamma}} G^{\varkappa} \tag{11}$$

gilt. Aus (11) folgen natürlich wegen der Homogenitätsvoraussetzungen über $G^{\varkappa}$ die Relationen (10). Daß eine derartige Wahl des Richtungsfeldes möglich ist, kann genau so bewiesen werden, wie für eine entsprechende Frage in der Riemannschen Geometrie.[11]) Aus (11) folgt nun wegen der expliziten Gestalt der $\Gamma^{*}_{\alpha\beta\gamma}$[6]) einerseits und der Form der Christoffelschen Symbole andererseits bei Beachtung von (5), daß längs $\mathfrak{E}_1$ die Identitäten

$$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(x) \equiv \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}(x, r) \tag{12}$$

gelten.

---

[10]) Die Differentialgleichungen der Extremalen in dieser Form bei E. CARTAN [1], S. 17.

[11]) O. VARGA [1]. Man hat in den dort auftretenden Differentialgleichungen statt

$$\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu}(x(t_1, \ldots, t_k, 0, \ldots, 0))\, \xi^{\lambda} \frac{dx^{\mu}(t_1, \ldots, t_k, 0, \ldots, 0)}{dt_k}$$

bloß

$$G^{\varkappa}_{\lambda}(g(t^1, \ldots, t^k, 0, \ldots, 0)) \frac{dg^{\lambda}(t^1, \ldots, t^k, 0, \ldots, \;)}{dt^k}$$

zu setzen.

§. 2. Beziehungen zwischen den Krümmungsaffinoren des oskulierenden Riemannschen und Finslerschen Raumes.

Wir zeigen nun, daß zwischen dem Krümmungsaffinor $\bar{R}_{\alpha\beta\delta\gamma}$ des oskulierenden V_n und dem durch

$$(13) \qquad R_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}}{}^{\delta} = 2\,\partial_{[\alpha}\Gamma^{*\delta}_{\beta]\gamma} - 2\,G^{\varrho}_{[\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{|\varrho|}}\Gamma^{*\delta}_{\beta]\gamma} + 2\,C_{\dot{\varrho}\dot{\gamma}}{}^{\delta}\,(\partial_{[\alpha}G^{\varrho}_{\beta]} + G^{\varrho}_{[\alpha|\tau|}\,G^{\tau}_{\beta]} + $$
$$+ 2\,\Gamma^{*\varrho}_{[\beta|\gamma|}\,\Gamma^{*\delta}_{\alpha]\varrho} \qquad \left(\text{mit } G^{\varrho}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial v^{\beta}}G^{\varrho}_{\alpha}\right)$$

definierten Krümmungsaffinor des Finslerschen Raumes[12]) längs $\mathfrak{C}_1$, die Identitäten

$$(14) \qquad \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,r^{\beta}r^{\gamma} \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta}\,r^{\beta}r^{\gamma}$$

bestehen.

B e w e i s. Aus den Relatitonen (7), die Identitäten in den $x^{\varkappa}$ sind, folgt durch Ableitung nach x^{τ}:

$$(15) \quad \partial_{\tau}\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(x)\cdot r^{\gamma} + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(x)\cdot\partial_{\tau}r^{\gamma} = \partial_{\tau}\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x,r)\,r^{\gamma} + \frac{\partial}{\partial v^{\sigma}}\Gamma^{*}_{\alpha\beta\gamma}\,\partial_{\tau}r^{\sigma}\cdot r^{\gamma} +$$
$$+ \Gamma^{*}_{\alpha\beta\gamma}\,\partial_{\tau}r^{\gamma} + \partial_{\tau}C_{\alpha\beta\varkappa}\cdot A^{\varkappa} + C_{\alpha\beta\varkappa}\cdot\partial_{\tau}A^{\varkappa}.$$

Längs einer Kongruenzkurve gilt nun

$$(16) \qquad r^{\tau}\,\partial_{\tau}A^{\varkappa} = \frac{d}{dt}A^{\varkappa},$$

was insbesondere längs $\mathfrak{C}_1$ wegen (10′) Null ist. Auf Grund dieser Bemerkung folgt aus (15) bei Beachtung von (6) und (12), daß längs $\mathfrak{C}_1$

$$(17) \qquad \partial_{\tau}\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}r^{\gamma}r^{\tau} = \partial_{\tau}\Gamma^{*}_{\alpha\beta\gamma}r^{\gamma}r^{\tau} - \frac{\partial}{\partial v^{\sigma}}\Gamma^{*}_{\alpha\beta\gamma}\,G^{\sigma}_{\tau}\,r^{\tau}r^{\gamma}$$

gilt. Berücksichtigen wir die Beziehungen (6), so ergibt sich unter erneuerter Beachtung von (15):

$$(18) \qquad \partial_{\tau}\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}\cdot r^{\alpha}r^{\gamma} = \partial_{\tau}\Gamma^{*}_{\alpha\beta\gamma}\cdot r^{\alpha}r^{\gamma} - \frac{\partial}{\partial v^{\sigma}}\Gamma^{*}_{\alpha\beta\gamma}\cdot G^{\sigma}_{\tau}\,r^{\alpha}r^{\gamma}.$$

Aus der Definition des Riemannschen Krümmungsaffinors und des durch (13) angegebenen Krümmungsaffinors des Finslerschen Raumes folgt nun wegen (12), (15), (17) und (18) die unter (14) behauptete Beziehung längs $\mathfrak{C}_1$.

[12]) E. Cartan [1], S. 36, Formel (XIX′). Wir haben die dort auftretende Bezeichnung $R_{\gamma.\beta\alpha}^{\;\;\delta}$ des Krümmungsaffinors zu $R_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}}{}^{\delta}$ abgeändert.

§. 3. Geodätische Abweichung und Beziehung zwischen der inneren Finslerschen und skalaren Berwaldschen Krümmung im Finslerschen Raum.

Aus (14) können wir nun wichtige Folgerungen ziehen. Wir betrachten in dem längs $\mathfrak{C}_1$ oskulierenden V_n noch eine zu $\mathfrak{C}_1$ benachbarte Extremale $\mathfrak{C}_2$. Jedem Punkte $x^\varkappa$ von $\mathfrak{C}_1$ ordnen wir auf $\mathfrak{C}_2$ denjenigen Punkt $x^\varkappa + \xi^\varkappa$ zu, der auf dem Endpunkt des in $x^\varkappa$ zu $\mathfrak{C}_1$ orthogonalen Vektor $\xi^\varkappa$ liegt. Für die geodätische Abweichung gilt dann[13])

$$(19) \qquad \frac{d^2\xi^\delta}{dt^2} = -\bar{R}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}}{}^{\delta}\, r^\beta r^\gamma \xi^\alpha$$

Nun ist aber die Finslersche Maßbestimmung längs $\mathfrak{C}_1$ identisch mit der des V_n. Der zu $\mathfrak{C}_1$ in $x^\varkappa$ orthogonale Vektor ist daher auch im Finslerschen Raume zu $\mathfrak{C}_1$ orthogonal. Aus (14) folgt andererseits, daß längs $\mathfrak{C}_1$

$$(20) \qquad \frac{d^2\xi^\delta}{dt^2} = -R_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}}{}^{\delta}\, r^\beta r^\gamma \xi^\alpha$$

gilt. Die durch $x^\varkappa + \xi^\varkappa$ definierte Extremale $\mathfrak{C}_1$ des V_n ist aber dann auch Extremale im Finslerschen Raume, da (20) genau die Gleichungen der geodätischen Abweichung zweier benachbarten Extremalen im Finslerschen Raum sind.[14])

Setzen wir nun insbesondere voraus, daß unsere Mannigfaltigkeit zweidimensional ist, dann reduzieren sich sowohl (19) als (20) auf die klassische Jacobische Gleichung

$$(21) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + Ky = 0,$$

in der t, wie oben, die Bogenlänge und y den Normalabstand der beiden Extremalen bedeutet. Im V_2 ist K bekanntlich das Gaußsche Krümmungsmaß der Mannigfaltigkeit, während für eine Finslersche Mannigfaltigkeit

$$(22) \qquad K(x^1, x^2) \equiv S(x^1, x^2, r^1(x^1, x^2), r^2(x^1, x^2))$$

genau mit der von P. Finsler definierten innenren Krümmung des Linienelementes übereinstimmt. Daraus folgt:

Das innere Krümmungsmaß einer zweidimensionalen Finslerschen Mannigfaltigkeit ist längs einer Extremalen $\mathfrak{C}$ identisch mit dem Gaußschen Krümmungsmaß der längs $\mathfrak{C}$ oskulierenden Riemannschen Maßbestimmung.[15])

Wird im n-dimensionalen Finslerschen Raum längs $\mathfrak{C}_1$ in stetiger Weise ein Vektorfeld $\eta^\varkappa$ erklärt — dessen Vektoren nirgends mit den Tangentenvektoren von $\mathfrak{C}_1$ zusammenfallen —, so ist durch $v^\varkappa$, $\eta^\varkappa$ längs $\mathfrak{C}_1$ ein stetiges Feld von Bivektoren bestimmt. Für einen beliebigen dieser Bivektoren ist das Berwaldsche Krümmungmaß durch

[13]) J. A. Schouten und D. J. Struik [1], S. 171, Formel (16.55).

[14]) E. Cartan [1], S. 39—40 und Formeln (47), (XXV).

[15]) L. Berwald [2], S. 40.

(23) $$B = -\frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta}\eta^{\alpha}r^{\beta}\eta^{\gamma}r^{\delta}}{g_{[\alpha[\gamma}g_{\delta]\beta]}\eta^{\alpha}r^{\beta}\eta^{\gamma}r^{\delta}}$$

erklärt.[2]) Wegen (4), (14) und der bekannten Definition des Riemannschen Krümmungsmaßes R für einen Bivektor folgt daher für das Bivektorfeld längs $\mathfrak{C}_1$

(24) $$B = R.$$

Wird nun im V_n für den Bivektor eines Punktes $x_0^{\varkappa}$ von $\mathfrak{C}_1$ die in $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ geodätische Fläche Φ_0, die natürlich $\mathfrak{C}_1$ enthält, konstruiert, so ist bekanntlich das Gaußsche Krümmungsmaß K_0 von Φ_0 in $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ gleich dem Riemannschen Krümmungsmaß, das zu dem Bivektor dieses Punktes gehört, d. h. in $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ gilt

(25) $$R_0 = K_0.$$

Wegen (24) ist also auch

(26) $$B_0 = K_0.$$

Wenn nun das Richtungsfeld $r^{\varkappa}$ die Fläche Φ_0 berührt, dann ist die von V_n auf Φ_0 induzierte Riemannsche Maßbestimmung identisch mit der, die Finslersche Maßbestimmung von Φ_0 längs $\mathfrak{C}_1$ oskulierenden Riemannschen Maßbestimmung. Ist daher eine solche Wahl des Richtungsfeldes möglich, dann wird wegen (22)

(27) $$B_0 = S_0.$$

Wir zeigen nun, daß eine solche Wahl für $r^{\varkappa}$ getroffen werden kann, daß die Fläche Φ_0 auch für den Finslerschen Raum geodätisch in $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ wird. Dazu betrachten wir sämtliche von $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ ausgehende Extremalen des Finslerschen Raumes. In einer hinreichend kleinen Umgebung von $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ ist das Feld

$$r^{\varkappa} = r^{\varkappa}(x^1, \ldots, x^n)$$

ihrer Tagentenvektoren ein solches der gewünschten Art. Die zu diesem Feld gehörige oskulierende Riemannsche Maßbestimmung V_n, die durch (4) bestimmt ist, ist im Punkte $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ singulär. Die in $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ geodätische Fläche Φ_0 des Finslerschen Raumes ist wegen der anschließend zu (9) angestellten Betrachtungen im V_n auch im singulären Punkte geodätisch. Auf Φ_0 fällt natürlich die induzierte und die längs $\mathfrak{C}_1$ oskulierende Maßbestimmung zusammen. Durch den Grenzübergang $x^{\varkappa} \to \underset{0}{x}^{\varkappa}$ längs $\mathfrak{C}_1$ kann (24) und (22) auch für $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ als richtig erkannt werden. Das Bestehen von (25) und (26) in $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ folgt so: Man betrachte einen von $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ verschiedenen Punkt $x^{\varkappa}$ auf $\mathfrak{C}_1$ und konstruiere die zu dem Bivektor dieses Punktes gehörige und in demselben geodätische Fläche Φ des V_n. Beim Grenzübergang $x^{\varkappa} \to x^{\varkappa}$ längs $\mathfrak{C}_1$ wird nun gleichzeitig $\Phi \to \Phi_0$. Daraus folgt, daß (25) und (26) richtig ist. Dann gilt aber (27), w. z. b. w.

Schriftenverzeichnis.

L. Berwald: [1] Untersuchungen der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. *Math. Z.* **25** (1926), 40–73.

[2] Über Finslersche und Cartansche Geometrie I. Geometrische Erklärungen der Krümmung und des Hauptskalars eines zweidimensionalen Finslerschen Raumes. *Mathematica* (Cluj) 17 (1941), 34–58.

E. Cartan: [1] Les espaces de Finsler. *Actualités scientifiques et industrielles,* **79** (1934), Paris.

P. Finsler: [1] Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. *Diss. Göttingen* (1918).

A. Nazim: [1] Über Finslersche Räume. *Diss. München* (1936).

J. A. Schouten-D. J. Struik: [1] Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. II. (1938), Groningen.

O. Varga: [1] Vektorfelder, deren kovariante Ableitung längs einer vorgegebenen Kurve verschwindet. *Hung. Acta Math.* **1**, No. 4 (1949), 1–3.

(Eingegangen am 1. Dezember 1949.)