Konstruktive Lösung der Apollonius-Aufgabe im n-dimensionalen Raum durch Benützung einer Erweiterung der zyklographischen Abbildung auf mehrdimensionale Räume.[1])

Von L. GYARMATHI in Debrecen.

Wohlbekannt ist die Verallgemeinerung der ebenen Apollonius-Aufgabe auf den n-dimensionalen Raum: gemäß derselben sind die Hyperkugeln, die $n+1$ vorgegebene Hyperkugeln berühren, immer konstruierbar und die Anzahl der Lösungen ist 2^{n+1}.

In der vorliegenden Arbeit wird zur Konstruktion des oben erwähnten Problems eine einheitliche Lösung in n-dimensionalen linearen Räumen gegeben, die auf eine Verallgemeinerung der zyklographischen Konstruktion der ebenen Apollonius-Aufgabe[2]) beruht und eine unlängst von MAURIN veröffentlichte Abbildungsmethode[3]) benützt.

Wir bedürfen in erster Linie eine Verallgemeinerung der zyklographischen Abbildung des Raumes. Wir können die Punkte des R_{n+1} auf eine Hyperebene Π_n in der Weise abbilden, daß wir zu jedem Punkte des R_{n+1} eine in der Π_n liegende orientierte Hyperkugel zuordnen.[4]) Mittelpunkt der Hyperkugel ist die Projektion des Punktes auf Π_n ihr Radius ist der Abstand des Punktes von Π_n. Dazu bemerken wir zunächst, daß wir die $n-1$-dimensionale Oberfläche der Hypelkugel, durch entsprechende Wahl des Normalvektors in einem beliebigen seiner Punkte orientieren können. Wir wollen diese Orientierung — abweichend von der üblichen — gleich so wählen, daß der positiven Orientierung ein zum Hyperkugelmittelpunkt gerichteter Normalvektor entspricht. Eine orientierte Hyperkugel soll in der Folge als Hypersphäre bezeichnet werden.

---

1) Auf dieses Problem wurde ich von Herrn Professor O. VARGA aufmerksam gemacht.

2) E. MÜLLER: Die Zyklographie. (Leipzig, 1929.) S. 53–58.

3) J. MAURIN: Géométrie descriptive à quatre dimensions. (Paris, 1948.)

4) Die Hypersphäre ist positiv bzw. negativ orientiert, je nachdem der Punkt „über" bzw. „unter" der Hyperebene Π_n liegt. (Vgl.[2]) S. 8. u. 415.)

Umgekehrt können wir jeder Hypersphäre A^s einen Punkt A des R_{n+1} zuordnen. Dies geschieht folgendermaßen: wir errichten die Normale zur Π_n im Mittelpunkt der A^s und tragen gemäß der Orientierung auf derselben die mit dem Radius gleichlange Strecke ab. Der Endpunkt wird dann mit dem gesuchten Punkt zusammenfallen.

Auf diese Weise ist die hypersphärische Geometrie auf die des Punktes zurückzuführbar. Dadurch werden zahlreiche auf Hypersphären bezügliche Aufgaben leichter lösbar, u. a. die auf den R_n verallgemeinerte Apollonius--Aufgabe. Dazu betrachten wir den R_{n+1}, der den gerichteten Hypersphären des R_n zugeordnet ist.

Wenn man einen Punkt A des R_{n+1} mit den Punkten der zugeordneten Hypersphäre A^s verbindet, erhält man einen n-dimensionalen Rotationskegel zweiter Ordnung. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen eine Hyperebene die A^s enthält, lautet die Gleichung dieses Kegels

$$\sum_{\lambda=1}^{n} (x_\lambda - a_\lambda)^2 - (x_{n+1} - a_{n+1})^2 = 0,$$

wo die a_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n+1)$ die affinen Koordinaten des Punktes A bedeuten. Diese, den Punkten des Raumes zugeordneten Kegel gehen durch eine in der unendlich fernen Hyperebene liegende Fläche Γ, die in homogenen Koordinaten durch

$$\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^2 - x_{n+1}^2 = 0, \qquad x_{n+2} = 0$$

darstellbar ist.

Durch Projizieren der Fläche Γ aus den Punkten des Raumes entstehen die sogenannten Γ-Kegel, deren Erzeugenden die Γ-Strahlen und Tagentenhyperebenen die Γ-Hyperebenen sind. Die A^s wird von den durch A gehenden Γ-Hyperebenen berührt. Es seien P_i^s die zyklographischen Bilder der Punkte P_i des Kegels, der dem Raumpunkt A zugeordnet ist. Unter diesen Voraussetzungen wird die A^s von den Hypersphären P_i^s in dem Punkte berührt, in welchem die dem Punkte P_i zugehörige Erzeugende die A^s berührt, und im Berührungspunkt haben die Hypersphären dieselbe Orientierung.

Nun wenden wir uns zur Lösung des Apollonius-Problems. Es sei

$$\sum_{\lambda=0}^{n} (x_\lambda - a_\lambda^{(i)})^2 = r_i^2$$

die Gleichung der Hyperkugeln (diese sind nur in n-dimensionalem Raum Hypersphären) und

$$\sum_{\lambda=1}^{n} (x_\lambda - a_\lambda^{(i)})^2 - (x_{n+1} - r_i)^2 = 0$$

die Gleichungen der den beliebig orientierten Hypersphären zugeordneten Γ-Kegeln. Dabei bedeuten die a_λ die Mittelpunktkoordinaten, die r_i die Radii der Hypersphären $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$.

Die den gemeinsamen Punkten der Γ-Kegel zugeordneten Hypersphären berühren die gegebenen Hypersphären.

Die Γ-Kegel gehen alle durch die Γ-Fläche und daher schneiden einander je n Γ-Kegel in einem Kegelschnitt, der mit dem $n+1$-ten Γ-Kegel zwei Punkte gemeinsam hat. Wegen der doppelten Orientierbarkeit aller Hypersphären erhalten wir daher 2^{n+1} Lösungen.

Die konstruktive Durchführung der Lösung beruht auf einer Verallgemeinerung der MÜLLERschen Konstruktion.[2])

Man kann durch passende Wahl des rechtwinkligen Koordinatensystems immer erreichen, daß die Gleichungen der ersten zwei Γ-Kegel in Affinkoordinaten

$$x_1^2+\ldots+x_n^2-(x_{n+1}-r_1)^2=0 \tag{1}$$

$$(x_1-a_1^{(2)})^2+x_2^2+\ldots+x_n^2-(x_{n+1}-r_2)^2=0 \tag{2}$$

sind Ihr Schnitt liegt in einer Hyperebene L_n, deren Gleichung

$$-2a_1^{(2)}x_1+2x_{n+1}(r_2-r_1)+a_1^{(2)^2}+r_1^2-r_2^2=0 \tag{3}$$

ist und die sonach zu der durch die x_1- und x_{n+1}-Achse bestimmten — im Folgenden kurz als $[x_1, x_{n+1}]$ Koordinatenebene bezeichneten — Ebene senkrecht steht. Diese Hyperebene soll in Analogie zu Bezeichnungen der darstellenden Geometrie des R_3 als n-te Projektionshyperebene bezeichnet werden. Ihr n-tes Bild wird durch die Diagonale desjenigen Rechtecks bestimmt, das sich als Schnitt der Umrißerzeugenden der n-ten Bilder der Γ-Kegel ergibt, und nicht durch die Scheitel dieser Γ-Kegel geht. (Vgl. in der Fig. das dritte Bild der ersten zwei Γ-Kegel.) Die Achse x_1 wird vom L_n im Punkte

$$\left(\frac{a_1^{(2)^2}+r_1^2-r_2^2}{2a_1^{(2)}},\ 0,\ 0,\ldots,\ 0\right) \tag{4}$$

geschnitten.

Der Schnittpunkt der Bildhyperebene mit der Geraden, die durch die Scheitel der zwei Γ-Kegel geht, (welcher Punkt gleichzeitig Ähnlichkeitspunkt der beiden Hypersphären ist), ist durch

$$\left(-\frac{a_1^{(2)}r_1}{r_2-r_1},\ 0,\ 0,\ldots,\ 0\right)$$

angegeben. Der Polarraum $P_n^{(1)}$ dieses Punktes ist in Bezug auf den ersten Γ-Kegel eine n-te Projektionshyperebene mit der Gleichung

$$-\frac{a_1^{(2)}r_1}{r_2-r_1}x_1+r_1x_{n+1}-r_1^2=0. \tag{5}$$

Laut (3) und (5) ist L_n parallel zu $P_n^{(1)}$. Es haben nämlich zwei zu einer Ebene orthogonale R_n mit paralleler Schnittlinie den unendlichfernen R_{n-1} gemein.

Die Gleichungen der den zwei Kegeln zugeordneten Hypersphären sind

$$\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^2 = r_1^2,$$

$$(x_1 - a_1^{(2)})^2 + \sum_{\lambda=2}^{n} x_\lambda^2 = r_2^2.$$

Um den Potenzraum H_{n-1} der beiden Hypersphären zu erhalten, bestimmen wir durch

$$x_{1,H}^2 - r_1^2 = (a_1^{(2)} - x_{1,H})^2 - r_2^2 \tag{6}$$

zunächst den auf der x_1-Achse liegenden Punkt des H_{n-1}. Dieser Punkt ist

$$\left(\frac{a_1^{(2)2} + r_1^2 - r_2^2}{2a_1^{(2)}}, 0, 0, \ldots, 0\right). \tag{7}$$

Der H_{n-1} selbst ist dann als derjenige Raum bestimmt, der zur x_1-Achse senkrecht steht und durch den zuvor bestimmten Punkt geht. Da die x_{n+1}-Achse senkrecht zu Π_n ist, steht nicht nur L_n sondern auch H_{n-1} zur $[x_1, x_{n+1}]$ Koordinatenebene senkrecht. Nach (4) und (7) haben L_n und H_{n-1} ihren auf der x_1-Achse liegenden Punkt gemeinsam, folglich enthält L_n den Potenzraum H_{n-1}.

Wir können also folgendes feststellen: Die Polarräume der durch die Scheitel der beiden Γ-Kegel bestimmten Geraden bezüglich dieser Kegel sind parallel zur Hyperebene L_n, die den Potenzraum H_{n-1} enthält. Ähnliches kann man vom Schnitt der drei Γ-Kegel behaupten, u s. w.

Durch die $n+1$ Scheitel der gegebenen Γ Kegel ist eine Hyperebene E_n bestimmt, ihre Polargeraden bezüglich der Γ-Kegel sind parallel zur Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte der Γ-Kegel. Die Verbindungsgerade geht noch durch den gemeinsamen Potenzpunkt H der $n+1$ Hypersphären.

Den gemeinsamen Potenzpunkt erhalten wir durch Konstruktion der Schnittpunkte der zu je zwei Hypersphären gehörigen Potenzräume. Einen Punkt der Polare von E_n bezüglich eines beliebigen Γ Kegels erhalten wir, wenn wir zum Schnitt von E_n mit Π_n den Pol bezüglich der zu Γ-Kegel gehörigen Hypersphäre bilden. Zur Vereinfachung der Konstruktion bemerken wir schließlich, daß der Schnitt von E_n und Π_n die Ähnlichkeitspunkte der gegebenen Hypersphären enthält.[5])

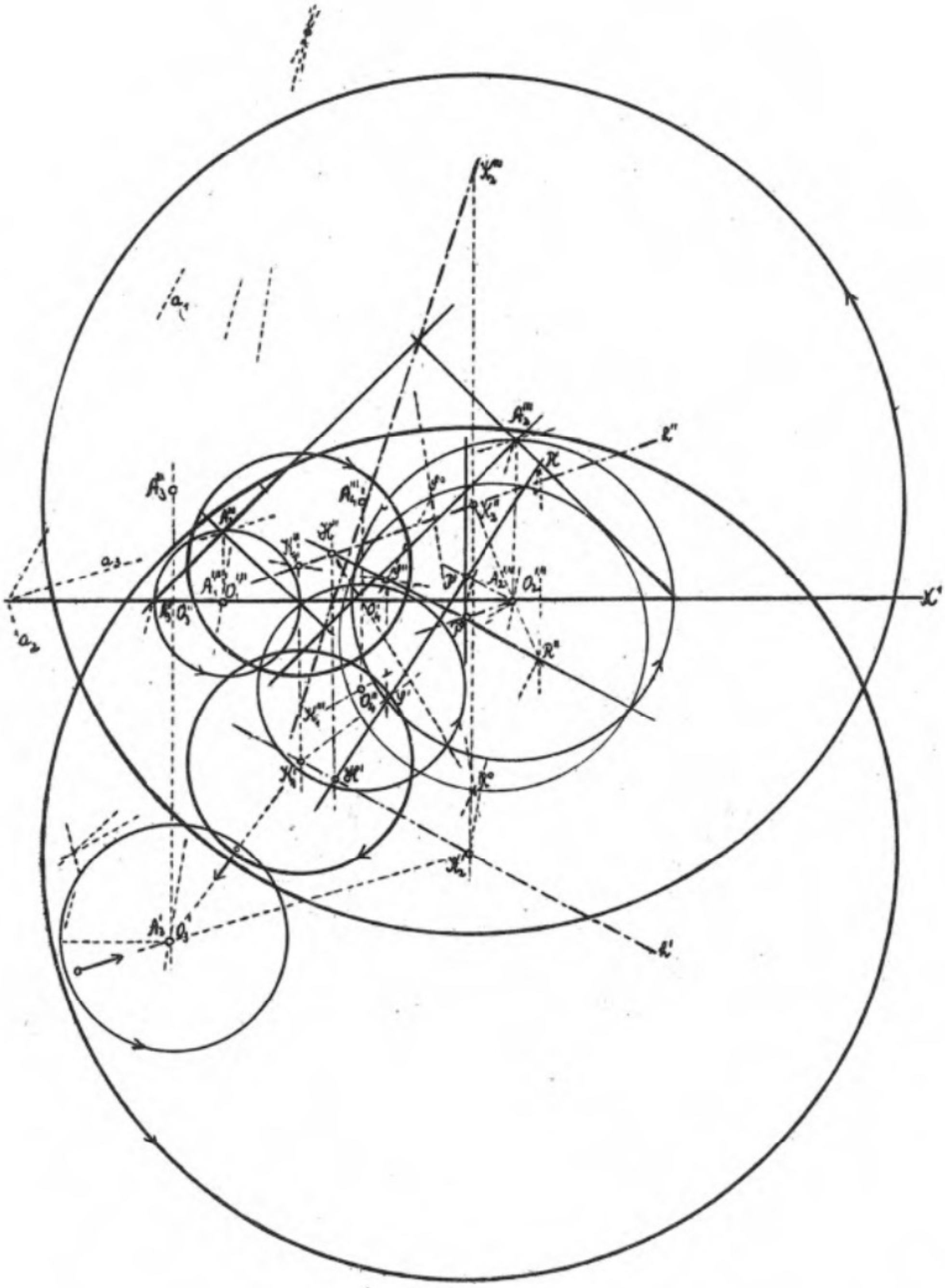
Die auftretenden Konstruktionen können für eine beliebige Dimension bei Verwendung der MAURINschen Abbildung mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden, weil sie nur von erster oder zweiter Ordnung sind.

An der beiliegenden Figur werden die vorangehenden zur Lösung des Apollonius-Problems im Raume R_3 angewandt.

Die vier Kugeln K_i (O_i, r_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ wurden unter günstiger Annahme in einem Dreibildsystem dargestellt.[6]) H ist der gemeinsame Potenz-

[5]) Es ist durch die Zyklographie leicht zu beweisen, daß je $n+1$ Ähnlichkeitspunkte der $n+1$ Hypersphären in einem Raum R_{n-1} liegen.

[6]) Auch O_4 wird in der zweiten Bildebene angenommen. Der besseren Durchsichtigkeit halber wird nur das eine Bild der gegebenen Kugeln dargestellt.



punkt der Kugeln. Den gerichteten Kugeln als Sphären zugeordnete Punkte im R_4 wurden nach der MAURINschen Abbildung dargestellt.[3])

Von den drei Bildern der Scheitel der Γ-Kegel A_i fallen die beiden ersten mit den Bildern der Mittelpunkte der Sphären zusammen. Das dritte Bild wurde durch Abtragen des, entsprechend der Orientierung mit Vorzeichen versehenen, Radius auf dem Ordner vom Schnittpunkte mit der Achse des Bildsystems gewonnen.[7])

Die Gerade A_2P ist in Bezug auf den zweiten Kegel die Polare der durch die Scheitel der Γ-Kegel gehenden E_3 (Spurlinie: a_1, a_2, a_3). Der Punkt P ist Pol derjenigen Ebene, die durch die Ähnlichkeitspunkte der Sphären bestimmt ist. Zwei Punkte der Lösung K_1 und K_2 — die gemeinsamen Punkte der vier Kegel — ergeben sich als Schnittpunkt derjenigen Geraden h mit einem der Kegel, die durch den Potenzpunkt H geht und zu A_2P parallel ist.

Die Konstruktion dieser Punkte ergibt sich durch Projektion des Schnittpunktes der Geraden HP mit der zweiten Γ-Sphäre vom Punkte A_2 aus auf die Gerade h. Die dritten Ordner der Bilder K_1 und K_2 ergeben die Radii der berührenden Kugeln, das erste und zweite Bild aber die Bilder der Kugelmittelpunkte.

Durch passende Orientierung der Kugeln erhält man sämtliche 16 Lösungen der Aufgabe, die zum Teil auch imaginär sein können.

Wenn wir auf die obige Konstruktion der Radii der berührenden Kugeln verzichten, dann kann die ganze Konstruktion in (die Kugeln enthaltenden) R_n ausgeführt werden. Dies entspricht der Tatsache, daß das ebene Apollonius-Problem rein planimetrisch lösbar ist.

Mann kann also die Lösung der Apollonius-Aufgabe in beliebigen linearen Räumen so zusammenfassen. Man bestimmt den Potenzpunkt H und die Räume E_k, die die Ähnlichkeitspunkte der Hypersphären K_i enthalten, und zugleich auch die Pole P_{ik} der letzteren in Bezug auf diese Hypersphären. Die Berührungspunkte der gesuchten berührenden Hypersphären sind die Schnittpunkte der entsprechenden Hypersphären mit den Geraden HP_{ik} $(i=1,\ldots, n+1;\ k=1,\ldots,2^n)$.[8])

(Eingegangen am 1. Dezember 1949.)

---

[7]) Die Orientierung der auf den Sphären liegenden Zyklen stimmt mit der Orientierung der Sphären überein.

[8]) Vgl. [2]) S. 58. Satz 3