Über nichtprimitive reguläre Graphen dritten Grades.

Von P. MEDGYESSY in Debrecen

Ein endlicher Graph G (im engeren Sinne) — d. h. ein endliches System von „Knotenpunkten" und „Kanten", welch letztere gewisse Paare von verschiedenen Knotenpunkten miteinander verbinden — heißt ein regulärer Graph dritten Grades, wenn jeder Knotenpunkt von G der Endpunkt von genau drei Kanten in G ist. Im folgenden ziehen wir auch Graphen „im weiteren Sinne" in Betracht, in denen es auch solche Kanten gibt, die einen Knotenpunkt mit sich selbst verbinden. Eine solche Kante heißt eine *Schlinge.* Ein regulärer Graph dritten Grades im weiteren Sinne kann auch Knotenpunkte enthalten, in denen eine Schlinge und eine Kante, die keine Schlinge ist, endigen. Eine geschlossene Kette $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_mA_1$ von Kanten in G — wobei $A_1, \ldots, A_m$ verschiedene Knotenpunkte von G bezeichnen — heißt ein *Kreis* von G. Eine Kante des Graphen G, die keinem Kreise von G angehört, heißt eine *Brücke* von G. Ein Graph B heißt ein *Baum,* wenn jede seiner Kanten eine Brücke ist.

Von nun an bezeichnen wir mit G einen *zusammenhängenden* regulären Graphen dritten Grades im weiteren Sinne. Ein Teilgraph von G mit denselben Knotenpunkten heißt ein *Faktor* von G. Besitzt G einen Faktor G_1, der aus Kanten — die keine Schlingen sind — ohne gemeinsame Knotenpunkte besteht, so nennt man G *nichtprimitiv* und G_1 einen *Faktor ersten Grades* von G. Bezeichnet man mit G_2 die Menge der nicht zu G_1 gehörenden Kanten von G, so heißt der Graph G_2 ein *Faktor zweiten Grades* von G. Man sieht unmittelbar, daß G_2 eine „Summe" von knotenpunktfremden Kreisen und Schlingen ist. Ist eine solche Zerfällung von G auf Faktoren G_1, G_2 vom ersten bzw. zweiten Grade gegeben, so sollen — wie es seit PETERSEN stets üblich ist — die Kanten von G_1 als *rote* Kanten, die Kanten von G_2 als *blaue* Kanten bezeichnet werden. (In den folgenden Figuren werden die roten Kanten gestrichelt, die blauen Kanten vollständig ausgezogen.) In diesem Sinne lassen sich die nichtprimitiven regulären Graphen dritten Grades auch dadurch charakterisieren, daß sie eine „Zweifärbung" gestatten. Nach einem wichtigen Satz von PETERSEN[1]) gestatten z. B. die brückenlosen regulären Graphen dritten Grades immer eine Zweifärbung.

Bezeichnen $A_1, \ldots, A_n$ solche (nicht notwendig verschiedenen) Knotenpunkte von G, daß es in G eine Kante mit den Endpunkten A_i, A_{i+1} gibt ($i=1, \ldots, n-1$),

[1]) D. KÖNIG: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (Leipzig, 1936) S. 186

und sind in der Kantenfolge $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ mit der bestimmten Orientierung $\overrightarrow{A_1 \ldots A_n}$ die Kanten abwechselnd rot und blau, so nennen wir eine solche Kantenfolge eine (im Falle $A_n = A_1$ *geschlossene*) *gerichtete alternierende Kantenfolge* von G. Nun läßt sich der Satz, den wir im folgenden beweisen wollen, so formulieren:

In jedem endlichen zusammenhängenden regulären Graphen dritten Grades mit Zweifärbung läßt sich eine geschlossene gerichtete alternierende Kantenfolge angeben, die jede blaue Kante genau einmal und jede rote Kante genau zweimal enthält.[2])

Den Beweis beginnen wir mit einer Bemerkung über die Struktur der regulären Graphen dritten Grades mit Zweifärbung, in denen jede rote Kante eine Brücke ist. In einem solchen Graphen $\bar{B}$ bilden die blauen Kanten — wie oben schon bemerkt — ein System von knotenpunktfremden Kreisen, denen jetzt auch die etwaigen Schlingen von $\bar{B}$ zugerechnet sind. Wird jeder dieser blauen Kreise des Graphen $\bar{B}$ auf einen Punkt zusammengezogen, so entsteht offenbar ein Baum B mit lauter roten Kanten. Offenbar ist die Struktur von $\bar{B}$ durch diesen zugehörigen „roten Baum" B eindeutig bestimmt und der Graph $\bar{B}$ läßt sich sofort rekonstruieren, sobald der Baum B bekannt ist. Es sollen nämlich nur die „blauen Kreisen" mit entsprechenden Kantenanzahlen „um die einzelnen Knotenpunkte des roten Baumes" B wiederhergestellt werden. Insbesondere soll zu jedem Endpunkt von B eine blaue Schlinge zugefügt werden. Durch diese Bemerkung erledigt sich das Strukturproblem der regulären Graphen dritten Grades mit Zweifärbung, in denen jede rote Kante eine Brücke ist. In einem solchen Graphen $\bar{B}$ gibt es immer eine Schlinge, da der zugehörige Baum B immer (mindestens zwei) Endpunkte besitzt.[3]) Im folgenden machen wir nur von dieser letzteren Bemerkung Gebrauch.

Nun beweisen wir den obigen Satz durch Induktion nach der Anzahl a der Knotenpunkte von G. Da der Satz für die beiden möglichen Typen von G mit $a = 2$ (vgl. Fig. 1) offenbar richtig ist, können wir uns auf den Fall $a > 2$ beschränken und annehmen, daß der Satz für Graphen mit „kleineren" a schon bewiesen ist. Enthält G eine Schlinge s, so ergibt sich der Beweis für G unmittelbar. Wir tilgen die rote Kante r (mit ihren zwei Endpunkten), die die Schlinge s trägt, aus G aus und vereinigen die

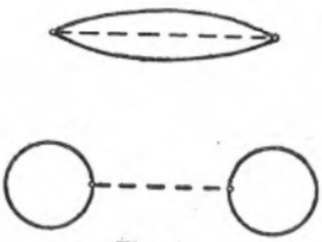

Fig. 1.

[2]) Der Leser kann vielleicht glauben, daß der obige Satz eine triviale Folgerung aus Eulers wohlbekanntem Satz ist, laut welches man sämtliche Kanten eines Graphen in einem geschlossenen Kantenzug dann und nur dann durchlaufen kann, wenn nach jedem Knotenpunkt des Graphen eine gerade Anzahl von Kanten laufen. Durch Verdoppelung der roten Kanten im obigen Graphen G entsteht nämlich offenbar ein „Eulerscher" Graph. — Man beachte aber, daß die Existenz einer „Eulerschen Linie" im letzteren Graphen keineswegs die Existenz einer *alternierenden* Kantenfolge mit den im obigen Satz angegebenen Eigenschaften in G nach sich zieht.

[3]) D. König, loc. cit. S. 49.

beiden blauen Kanten b_1, b_2, die nach dem anderen Endpunkt der roten Kante r laufen, zu einer einzigen blauen Kante b. Dadurch entsteht ein zusammenhängender regulärer Graph dritten Grades mit Zwei färbung und mit $a-2$ Knotenpunkten, wofür also der Satz nach unserer Annahme richtig ist. Man gebe eine geschlossene gerichtete alternierende Kantenfolge des letzteren Graphen im Sinne des Satzes an. Dann läßt sich der getilgte Teil von G in diese Kantenfolge bei der Kante b derart einschalten, daß dadurch eine Kantenfolge von G im Sinne des Satzes entsteht.

Im restlichen Teil des Beweises kann angenommen werden, daß G keine Schlinge enthält. Dann besitzt G nach unserer obigen Bemerkung eine rote Kante PQ, die keine Brücke ist. (Vgl. Fig. 2.) Wir entfernen aus G die Knotenpunkte P, Q und die fünf Kanten PA, PB, QC, QD, PQ und führen dafür zwei neue blaue Kanten AB, CD ein. Dadurch entsteht — da PQ keine Brücke in G ist — ein zusammenhängender regulärer Graph dritten Grades mit Zweifärbung, der nach Voraussetzung eine geschlossene gerichtete alternierende Kantenfolge im Sinne des Satzes, etwa

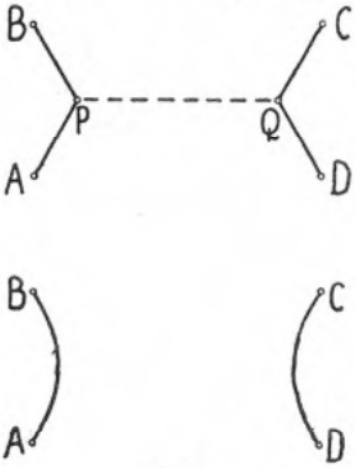

Fig. 2.

$$X_1 \dots X_k AB\, X_{k+1} \dots X_l\, CD\, X_{l+1} \dots X_1$$

besitzt. Dann läßt sich aber der entfernte Teil des Graphen G in diese Kantenfolge nach

$$X_1 \dots X_k APQC\, X_l \dots X_{k+1} BPQ\, D\, X_{l+1} \dots X_1$$

derart einschalten, daß somit eine Kantenfolge von G im Sinne des Satzes entsteht. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Bemerkung. Eine Brücke von G ist nach obigem immer rot und sie wird bei einer geschlossenen gerichteten alternierenden Kantenfolge des Graphen G im Sinne des Satzes beidemal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Es kann aber geschehen, daß ein brückenloser Graph G eine Kantenfolge im Sinne des Satzes besitzt, bei der jede rote Kante beidemal in gleicher Richtung durchlaufen wird. Wir behaupten, daß G in diesem Falle eine *Dreifärbung* gestattet (d. h. in drei Faktoren zerfällt). Versieht man nämlich jede blaue Kante von G mit der (eindeutig bestimmten) Orientierung, die dem Durchlaufungssinn der alternierenden Kantenfolge entspricht, so werden in diesem Falle je zwei aufeinanderfolgende Kanten eines blauen Kreises in G offenbar stets entgegengesetzt orientiert. Es enthält also jeder blaue Kreis von G eine gerade Anzahl von Kanten, woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt.

(Eingegangen am 11. März 1950.)