Sur les formes quadratiques positives.

Par ÁKOS CSÁSZÁR à Budapest

On sait bien que les formes quadratiques à n variables

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k \qquad (a_{ik}=a_{ki})$$

jouent un rôle important dans la théorie des valeurs extrémales des fonctions à n variables. On y est conduit à chercher un moyen à reconnaître si une forme quadratique donnée prend des valeurs positives et négatives ou elle reste toujours positive ou bien toujours négative (excepté naturellement le système des valeurs $x_i=0$, $i=1,\ldots,n$). A ce but, on connaît bien le critère suivant: *Considérons les déterminants*

$$D_i=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1}\ldots a_{ii}\end{vmatrix} \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Pour que la forme quadratique $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$ *soit toujours positive, il faut et il suffit que les nombres* D_i *soient positifs; pour qu'elle soit toujours négative, il faut et il suffit que*

$$\operatorname{sg} D_i=(-1)^i \qquad (i=1,\ldots,n).$$

La deuxième partie de cette proposition étant une conséquence évidente de la première, il s'agit donc de prouver cette partie concernant les formes toujours positives. Les démonstrations usuelles font usages des théorèmes algébriques plus ou moins compliqués, par exemple de la théorie des substitutions linéaires ou de l'équation caractéristique, ce qui présente quelques difficultés dans les cours d'analyse. Dans ce qui suit, nous donnerons une démonstration simple du théorème cité basée sur un raisonnement analytique et n'utilisant que les propriétés fondamentales des déterminants.[1])

---

1) On trouve une idée semblable dans SCHLÖMILCH's *Handbuch der Mathematik*, 2. éd. Leipzig (1904), tome II, pp. 701–703, mais dans une élaboration incomplète et utilisant une proposition fausse.

Nous démontrerons le théorème par récurrence.

Pour $n=1$, la proposition est évidente. Supposons qu'elle soit démontrée pour le cas de $n-1$ variables et considérons le cas de n variables.

a) Supposons que (avec les notations précédentes) $D_i>0$ $(i=1,\dots,n)$. La forme $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$ est positive pour $x_n=0$, puisque dans ce cas elle est égale à $\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik}x_i x_k$ et cette forme à $n-1$ variables est toujours positive selon la proposition que nous supposons démontrée pour $n-1$ variables. Pour $x_n \neq 0$, on a

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k = x_n^2\left[\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik}\frac{x_i}{x_n}\cdot\frac{x_k}{x_n} + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\frac{x_i}{x_n} + a_{nn}\right],$$

il s'agit donc de montrer que le polynome du second degré à $n-1$ variables

$$f(u_1,\dots,u_{n-1}) \equiv \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik}u_i u_k + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}u_i + a_{nn}$$

est toujours positif. Or, en écrivant $r^2=\sum_{i=1}^{n-1} u_i^2$, on a

$$f(u_1,\dots,u_{n-1}) = r^2\left[\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik}\frac{u_i}{r}\cdot\frac{u_k}{r} + \frac{2}{r}\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\frac{u_i}{r} + \frac{a_{nn}}{r^2}\right].$$

Mais comme nous avons $\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{u_i}{r}\right)^2 = 1$, il s'ensuit que

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\frac{u_i}{r}\right| \leqq M$$

et, comme la forme quadratique $\sum_{i=1}^{n-1} a_{ik}x_i x_k$ est toujours positive, on a encore

$$\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik}\frac{u_i}{r}\cdot\frac{u_k}{r} \geqq m > 0.$$

On a donc pour r suffisamment grand $f(u_1,\dots,u_{n-1})>0$. Si $f(u_1,\dots,u_{n-1})$ n'était pas toujours positif, il devrait donc avoir une valeur minimale $\leqq 0$. $f(z_1,\dots,z_{n-1})$ étant cette valeur minimale, on devrait avoir $f_{u_i}(z_1,\dots,z_{n-1})=0$ $(i=1,\dots,n-1)$, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}z_k + a_{in} = 0 \qquad (i=1,\dots,n-1).$$

De là, selon la règle de Cramer, $z_k = A_{nk}/A_{nn}$, A_{nk} désignant le déterminant adjoint à l'élément a_{nk} dans le déterminant D_n (remarquons que $A_{nn}=D_{n-1}>0$) Mais par un simple calcul

$$f(z_1,\dots,z_{n-1}) = \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik}z_i z_k + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}z_i + a_{nn} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} z_i\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}z_k + a_{in}\right) + \frac{1}{A_{nn}}\sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{ni} = \frac{D_n}{D_{n-1}},$$

puisque $\sum_{k=1}^{n-1} a_{in} z_k + a_{in} = 0$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et

$$\sum_{i=1}^{n} a_{in} A_{ni} = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} A_{ni} = D_n .$$

On a donc $f(z_1, \dots, z_{n-1}) > 0$, ce qui montre que $f(u_1, \dots, u_{n-1})$ est toujours positif. La suffisance de la condition $D_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ est donc établie pour le cas de n variables.

b) Supposons que $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$ soit toujours positive. Il s'ensuit que la forme à $n-1$ variables $\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik} x_i x_k$ est toujours positive, car ses valeurs sont identiques à celles de $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$ prises pour $x_n = 0$. On a donc par l'hypothèse de récurrence $D_i > 0$ $(i = 1, \dots, n-1)$. Mais pour les valeurs $x_i = A_{ni}/A_{nn}$ $(i = 1, \dots, n)$, on a d'après les calculs précédents

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k = f(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{D_n}{D_{n-1}} .$$

Cette valeur étant positive, on a $D_n > 0$, ce qui montre la nécessité de la condition indiquée pour le cas de n variables.

(Reçu le 6 avril 1950.)