Über die Klassifikation der quadratischen Formen.

Von T. SZELE in Debrecen.

In der vorangehenden Arbeit von Herrn Á. CSÁSZÁR[1]) wurde ein sehr einfacher und schöner Beweis für das Determinantenkriterium der definiten quadratischen Formen gegeben. Im folgenden gebe ich einen weiteren Beweis desselben Satzes, der unter dem Einfluß der Császárschen Arbeit mit Ausschaltung der darin verwendeten (übrigens durchaus elementaren) analytischen Hilfsmittel entstanden ist. Und zwar werden wir uns im folgenden bloß auf den Determinantenbegriff und auf den Satz über die Entwicklung einer Determinante nach einer Zeile stützen. Darüber hinaus werden wir mit den gleichen Hilfsmitteln auch das Kriterium der semidefiniten Formen herleiten. In solcher Weise findet dieser Fragenkomplex eine vollständige und ganz elementare Darstellung, die sich etwa auch im Rahmen einer Anfangsvorlesung hineinfügt.

Wir betrachten die quadratische Form

$$(1) \qquad f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k=\sum_{i=1}^{n} x_i l_i(x)$$

der n Veränderlichen $x_1,\ldots,x_n$ (die auch als die Komponenten des Vektors x aufgefaßt werden können), wobei $l_i(x)$ die lineare Form

$$(2) \qquad l_i(x)=l_i(x_1,\ldots,x_n)=a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n \qquad (i=1,\ldots,n)$$

bezeichnet und für die Matrix (a_{ik}) des Koeffizientensystems von $f(x)$

$$(3) \qquad a_{ik}=a_{ki} \qquad (i=1,\ldots,n;k=1,\ldots,n).$$

gilt. Wir nehmen an, daß die Form $f(x)$ der n Veränderlichen x_i dieselben tatsächlich enthält, d. h. die Matrix (a_{ik}) keine Zeile mit lauter Elementen 0 enthält. Die Determinante i-ter Ordnung in der linken oberen Ecke dieser Matrix bezeichnen wir mit D_i $(i=1,\ldots,n)$. Unter einem Hauptminor von D_n verstehen wir, wie üblich, eine solche Unterdeterminante von D_n, die durch Streichung zu denselben Indizes gehöriger Zeilen und Spalten aus D_n hervorgeht. Wir werden noch die Bezeichnung

$$(4) \qquad f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)=\bar{f}(x)$$

verwenden, wobei also $\bar{f}(x)$ als eine quadratische Form von $n-1$ Veränderlichen betrachtet werden soll. Wir beweisen nun folgende beiden Sätze:

---

[1]) Á. CSÁSZÁR: Sur les formes quadratiques positives. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **1** (1950), 186—188.

Satz 1. *Die Form* (1) *ist dann und nur dann positiv bzw. negativ definit, wenn*

(5) $$D_i > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

bzw.

(6) $$(-1)^i D_i > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

gilt.

Satz 2. *Die Form* (1) *ist dann und nur dann positiv (negativ) semidefinit, wenn* $D_n = 0$ *ist und eine der nichtverschwindenden Hauptminoren von möglichst hoher Ordnung* $r\,(>0)$ *von* D_n *die Determinante einer positiv (negativ) definiten quadratischen Form ist.*

Offenbar genügt es die Aussagen über die *positiv* definiten bzw. semidefiniten Formen zu beweisen, da die Richtigkeit der übrigen Behauptungen der Sätze 1, 2 daraus unmittelbar folgt.

Bezeichnet man das zum Element a_{ik} gehörige algebraische Komplement in D_n mit A_{ik}, so gilt für den Vektor u mit den Komponenten

(7) $$u_i = A_{ni} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

(8) $$l_i(u) = a_{i1} A_{n1} + \ldots + a_{in} A_{nn} = \begin{cases} 0 & \text{für } 1 \leq i < n \\ D_n & \phantom{\text{für }} i = n \end{cases}$$

Daraus folgt nach (1)

(9) $$f(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i l_i(u) = u_n D_n = A_{nn} D_n = D_{n-1} D_n .$$

Andererseits ergibt sich nach (1) und (2)

(10) $$f(x-u) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - u_i)\, l_i(x-u) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - u_i)\,(l_i(x) - l_i(u)) =$$
$$= \sum x_i l_i(x) + \sum u_i l_i(u) - \sum x_i l_i(u) - \sum u_i l_i(x) .$$

Mit Rücksicht auf (3), (8), (9) erhält man aber

(11) $$\sum u_i l_i(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{k=1}^{n} a_{ki} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{n} a_{ki} u_i =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k l_k(u) = D_n x_n$$

und

$$\sum u_i l_i(u) = f(u) = D_n u_n .$$

Folglich schreibt sich (10) nach (1) in der Form

(12) $$f(x-u) = f(x) + D_n (u_n - 2x_n) .$$

Den Satz 1 beweisen wir nun mit Induktion nach n. Nehmen wir an, daß der Satz für $n-1$ (statt n) richtig und (1) eine positiv definite quadratische Form ist. Dann ist auch die Form (4) positiv definit, mithin gilt (5) nach der Induktionsannahme für $i = 1, \ldots, n-1$. Wegen

(13) $$u_n = A_{nn} = D_{n-1} > 0$$

ist aber $f(u) > 0$, so daß auf Grund von (9) auch $D_n > 0$ gilt.

Setzen wir umgekehrt die Richtigkeit von (5) voraus. Dann ist die Form (4) nach unserer Induktionsannahme positiv definit. Folglich genügt es nur noch die Richtigkeit von

$$f(x_1, \dots, x_n) > 0 \tag{14}$$

für $x_n \neq 0$ d. h. wegen $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ für $x_n = u_n \,(= D_{n-1} \neq 0)$ zu zeigen. Dann gilt aber $f(x-u) = \bar{f}(x-u) \geqq 0$, woraus nach (12)

$$f(x) + D_n(u_n - 2u_n) \geqq 0,$$
$$f(x) \geqq D_n u_n = D_n D_{n-1} > 0$$

folgt. Damit ist (14) und zugleich auch Satz 1 bewiesen.

Um Satz 2 zu beweisen, zeigen wir zunächst durch Induktion nach n, daß für eine positiv semidefinite Form (1)

$$D_n = 0 \tag{15}$$

gilt. Ist nämlich $f(x)$ positiv semidefinit, so ist die Form (4) entweder positiv semidefinit oder positiv definit. Im ersten Fall ist nach unserer Induktionsannahme $D_{n-1} = u_n = 0$, so daß nach (12) und $f(x-u) \geqq 0$

$$f(x) - 2D_n x_n \geqq 0$$

gilt. Daraus folgt für $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0,\ x_n = \frac{D_n}{a_{nn}}$ wegen $a_{nn} > 0$[2])

$$a_{nn}x_n^2 - 2D_n x_n = -\frac{D_n^2}{a_{nn}} \geqq 0$$

d. h. (15.). Im zweiten Fall kommt (13) nach Satz 1 zur Geltung. Demnach folgt aus (9) und $f(x) \geqq 0$ die Ungleichung $D_{n-1}D_n \geqq 0$ d. h. (wegen (13)) $D_n \geqq 0$. Da aber $f(x)$ nach Voraussetzung keine positiv definite Form ist, ergibt sich daraus nach Satz 1 wiederum (15).

Auf Grund von (15) läßt sich nun die Notwendigkeit der Bedingung m Satz 2 leicht beweisen. Sei nämlich die Form (1) positiv semidefinit und numerieren wir die Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ derart, daß $D_r \neq 0$ ist $(0 < r < n)$[3]), dagegen jeder Hauptminor größer Ordnung als r von D_n verschwindet. Dann ist die zur Determinante D_r gehörende Form $f(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ nach dem eben Bewiesenen positiv definit.

Endlich zeigen wir durch Induktion nach n, daß die Bedingung im Satz 2 auch hinreichend ist. Sei also $D_r > 0$ und jeder Hauptminor größer Ordnung als r $(r < n)$ von D_n gleich 0. Dann gilt nach unserer Induktionsannahme

$$\bar{f}_{r+1}(x) = f(x_1, \dots, x_r, 0, x_{r+2}, \dots, x_n) \geqq 0. \tag{16}$$

Somit genügt es wegen $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ nur noch die Richtigkeit von

$$f(x) \geqq 0 \qquad \text{für } x_{r+1} = v_{r+1} \neq 0 \tag{17}$$

---

[2]) Im fall einer positiv semidefiniten Form $f(x)$ ist nämlich $a_{nn} < 0$ offenbar ausgeschlossen. Die Unmöglichkeit von $a_{nn} = 0$ folgt so. Wäre $a_{nn} = 0$, so ergibt sich für die Werte $x_i = -2a_{in}, x_n = a_{ii} + 1, x_k = 0$ $(k \neq i, n)$ $f(x) = 4a_{ii}a_{in}^2 - 4a_{in}^2(a_{ii}+1) = -4a_{in}^2 \geqq 0$ d. h. $a_{in} = 0$. Dann aber enthält $f(x)$ die Veränderliche x_n gar nicht.

[3]) $r > 0$ folgt aus $a_{11} > 0$. Vgl. die Bemerkung[2]).

zu beweisen, wobei v_{r+1} eine Konstante ist.[4]) Für diesen Zweck bezeichnen wir das zum Element a_{ik} gehörige algebraische Komplement *in der Determinante* D_{r+1} mit A'_{ik} und definieren den Vektor v durch die Komponenten

(18) $$v_i = A_{r+1,i}\ (i=1,\ldots,r+1);\ v_{r+2}=\ldots=v_n=0.$$

Dann ist $v_{r+1}=A'_{r+1,r+1}=D_r \neq 0$ nach unserer Annahme erfüllt. Gelingt es uns also

(19) $$f(x-v)=f(x) \qquad \text{für } x_{r+1}=v_{r+1}$$

zu beweisen, so folgt aus (16) wegen $f(x-v)=\bar{f}_{r+1}(x-v)$ (für $x_{r+1}=v_{r+1}$) die Gültigkeit von (17).

Nun folgt (19) wegen (10), (1) und $\Sigma v_i l_i(x)=\Sigma x_i l_i(v)$ (vgl. (11)) unmittelbar aus

(20) $$l_i(v)=a_{i1}A'_{r+1,1}+\ldots+a_{i,r+1}A'_{r+1,r+1}=0 \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Die Richtigkeit von (20) ist für $i\leqq r+1$ wegen $D_{r+1}=0$ auf Grund der Definition der $A'_{r+1,k}$ klar. Es genügt also (20) nur noch für den Fall $i=r+2$ zu beweisen, da die Veränderlichen x_{r+2} und $x_j\,(r+2<j\leqq n)$ vertauscht werden können. Bezeichnet man aber das algebraische Komplement von a_i *in* D_{r+2} mit A''_{ik}, so gilt

$$l_{r+2}(v)=\sum_{k=1}^{r+1} a_{r+2,k}A'_{r+1,k}=-A''_{r+1,r+2}.$$

Nun läßt sich die Gleichung

(21) $$A''_{r+1,r+2}=0$$

folgendermaßen beweisen. Wegen $D_{r+2}=0$ gelten die $r+1$ Gleichungen

$$a_{i1}A''_{r+2,1}+\ldots+a_{i,r+1}A''_{r+2,r+1}+a_{i,r+2}A''_{r+2,r+2}=0;\quad (i=1,\ldots,r,r+2).$$

Die letzten Glieder der linken Seiten lassen sich hier wegen $A''_{r+2,r+2}=$ $=D_{r+1}=0$ streichen. Die Determinante (der Koeffizienten a_{ik}) des so entstehenden Gleichungssystem ist $-A''_{r+1,r+2}$. Multipliziert man also die Gleichungen mit den entsprechenden, zur letzten Spalte gehörenden algebraischen Komplementen dieser Determinante und addiert sie, so ergibt sich die Gleichung $-A''_{r+1,r+2}\cdot A''_{r+2,r+1}=0$. Daraus folgt nach (3) die Gültigkeit von (21), womit der Beweis des Satzes 2 vollendet ist.

(Eingegangen am 29. April 1950.)

---

[4]) Dann ist nämlich $f(x)$ entweder positiv definit oder positiv semidefinit. Der erste Fall ist aber wegen $r<n$ d. h. $D_n=0$ nach Satz 1 ausgeschlossen.