Eine Bemerkung über definite quadratische Formen.

Von E EGERVÁRY in Budapest

Die Herleitung des Kriteriums für den definiten Charakter einer quadratischen Form geschieht bekanntlich am einfachsten durch vollständige Induktion. In der vorliegenden Note, welche sich an die vorangehenden Aufsätze von Á. CSÁSZÁR[1]) und T. SZELE[2]) anschließt, wollen wir in aller Kürze darauf hinweisen, daß diese Herleitung auf eine elementare Identität gegründet werden kann, welche durch geometrisch-anschauliche Betrachtungen nahegelegt wird und im besonderen Falle von zwei Variablen die Tatsache ausdrückt, daß ein Paraboloid immer — auf die weiter unten angegebene Art — als Schiebungs (Translations)-fläche aus zwei parabolischen Leitkurven erzeugt werden kann.

Schreiben wir nämlich die zur Diskussion einer Form von zwei Variablen gewöhnlich benutzte Identität

$$z=f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{11}\left(x+\frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2+\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}}y^2,\ (a_{11}\neq 0)$$

in der Form

$$(1)\qquad z=f(x,y)=f(\bar{x},0)+\frac{A}{A_{22}}y^2,\qquad \left(\bar{x}=x-\frac{A_{12}}{A_{22}}y\right),$$

(A bedeutet die Determinante der Form, $A_{ik}, A_{\substack{ik\\rs}},\ldots$ das algebraische Komplement von a_{ik}, $\begin{vmatrix} a_{ik} & a_{is} \\ a_{rk} & a_{rs} \end{vmatrix}, \ldots$), so erkennen wir, daß das Paraboloid $z=f(x\ y)$ durch Schiebung seiner Schnittparabel $z=f(x,0)$ entlang der Parabel $x=\frac{A_{12}}{A_{22}}y$, $z=\frac{A}{A_{22}}y^2$ erzeugt werden kann.

Um für die Form

$$z=f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_i\sum_j a_{ij}x_ix_j=\sum_i x_i\sum_j a_{ij}x_j \qquad (A_{nn}\neq 0)$$

---

[1]) A. CSÁSZÁR, Sur les formes quadratiques positives, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* 1 (1950), 186—188.

[2]) T. SZELE, Über die Klassifikation der quadratischen Formen, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* 1 (1950), 189—192.

die entsprechende Identität aufzustellen, betrachte man in Analogie zu (1) den Ausdruck

$$f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, 0) = \sum_i \left(x_i - \frac{A_{ni}}{A_{nn}} x_n\right) \sum_j a_{ij} \left(x_j - \frac{A_{nj}}{A_{nn}} x_n\right), \quad \left(\overline{x}_i = x_i - \frac{A_{ni}}{A_{nn}} x_n\right),$$

welcher sich mit Benützung von $\sum a_{ij} A_{kj} = \delta_{ik}$ in

$$f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, 0) = \sum_i \left(x_i - \frac{A_{ni}}{A_{nn}} x_n\right) \sum_j a_{ij} x_j = f(x_1, \ldots, x_n) - \frac{A}{A_{nn}} x_n^2$$

umformen läßt.

Die zu (1) analoge Identität lautet also folgendermaßen:

$$(2) \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, 0) + \frac{A}{A_{nn}} x_n^2; \qquad \left(\overline{x}_i = x_i - \frac{A_{ni}}{A_{nn}} x_n\right).$$

Dementsprechend kann auch das n-dimensionale Paraboloid aus einem $n-1$ dimensionalen durch Schiebung erzeugt werden.

In der Identität (2) können offenbar auch $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{n-1}, x_n$ als unabhängige Variablen betrachtet werden, folglich ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ dann und nur dann positiv definit, wenn dasselbe gleichzeitig für $f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, 0)$ und $\frac{A}{A_{nn}} x_n^2$ gilt. Diese beide Bedingungen sind aber mit Rücksicht auf die übliche Induktionsannahme mit den Bedingungen

$$A > 0, \; A_{nn} > 0, \; A_{\substack{n, \; n \\ n-1, n-1}} > 0, \ldots, a_{11} > 0$$

gleichwertig.

Mit Hilfe der Identität (2) kann auch eine positive, einfach semidefinite Form (d. h. eine solche, die nichtnegativ und nichtdefinit ist, aber mindestens einen positiv definiten Abschnitt von $n-1$ Variablen enthält) diskutiert werden.

Es sei nämlich $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ ein definiter Abschnitt von $f(x_1, \ldots, x_n)$. Dann gilt (2) und auch diesmal können $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, x_n$ als unabhängige Variablen betrachtet werden. Demzufolge ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ dann und nur dann positiv semidefinit, wenn beide Summanden rechts in (2) nichtnegativ sind und mindestens einer davon semidefinit ist. $f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, 0)$ ist nach Annahme definit, also muß $\frac{A}{A_{nn}} x_n^2$ semidefinit sein, woraus $A = 0$ folgt.

Im Falle einer einfach semidefiniten Form reduziert sich also die Identität (2) auf

$$(3) \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, 0), \qquad \left(\overline{x}_i = x_i - \frac{A_{ni}}{A_{nn}} x_n\right),$$

in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß in diesem Falle das Paraboloid in ein Zylinder ausartet, welcher die Hyperebene $z = 0$ entlang der Gerade $x_i = \frac{A_{ni}}{A_{nn}} x_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ berührt.

Zur Diskussion von mehrfach semidefiniten Formen kann man eine geeignete Verallgemeinerung der Identität (2) benutzen, welche z. B. für zweifach semidefinite Formen folgendermaßen lautet:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-2}, 0, 0) + \frac{A_{n-1, n-1} x_n^2 - 2 A_{n, n-1} x_{n-1} x_n + A_{nn} x_{n-1}^2}{A_{\substack{n-1, n-1 \\ n \;\;\; , n}}},$$

$$\overline{x}_i = x_i - \frac{A_{\substack{n-1, i \\ n \;\;\; , n}} x_{n-1} + A_{\substack{n-1, n-1 \\ n \;\;\; , i}} x_n}{A_{\substack{n-1, n-1 \\ n \;\;\; , n}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

(Eingegangen am 2. Juni 1950.)