Sur les séries de Taylor $F(x, y)$ ayant des coefficients entiers.

Par P. LELONG à Lille.

§ 1. Position du problème.

Je rappellerai d'abord un résultat relatif aux séries de Taylor d'une variable:

(1) $$F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

dont on suppose les coefficients a_n entiers. Cet énoncé donné par PÓLYA[1]) à la suite de travaux de E. BOREL dans le même sens peut s'énoncer de la manière suivante. Soit $E(D)$ la classe des fonctions analytiques et uniformes dans un domaine D et possédant à l'origine O supposée point intérieur de D un développement (1) à coefficients entiers: pour que $E(D)$ ne contienne que des fractions rationnelles, il suffit que la transformation $z' = z^{-1}$ change le complémentaire de D en un ensemble σ (nécessairement fermé et borné) de diamètre transfini $c(\sigma)$ inférieur à 1.

En d'autres termes: la condition $c(\sigma) < 1$, jointe au fait que les fonctionnelles

(2) $$a_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n F}{\partial z^n} \right)_{z=0}$$

ont des valeurs entières entraine que $F(z)$ analytique et uniforme dans D se réduise à une fraction rationnelle.

Je me propose de rechercher ici s'il existe une propriété analogue pour les fonctions $F(x, y)$ analytiques de deux variables complexes. Pour préciser, j'appellerai encore $E(D)$ la classe des fonctions $F(x, y)$ analytiques et uniformes dans un domaine D qui contient le point $O[x = y = 0]$ comme point intérieur, et je supposerai que les fonctionnelles

(3) $$a_{pq} = \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} \left(\frac{\partial^{p+q} F}{\partial x^p \partial y^q} \right)_O$$

"coefficients de Taylor" ont des valeurs entières en O. J'énoncerai alors:

---

[1]) G. PÓLYA, Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreise. *Math. Annalen*, **99** (1928), 687—706.

Problème A: *Donner des conditions suffisantes portant sur le domaine D qui contient O comme point intérieur, pour que la classe $E(D)$ ne contienne que des fractions rationnelles.*

Une solution partielle sera donnée ici au problème A: elle concerne surtout les domaines D obtenus en associant à une valeur $y \in d_1$ un domaine $x \in d_2(y)$. Il est toutefois vraisemblable que la forme du résultat obtenu est générale: il fait intervenir l'existence d'un cycle ou d'un ensemble de cycles W à deux dimensions réelles dans D et le comportement sur W d'une suite (S) de polynomes que nous allons définir.

Un monome $x^{t_1}y^{t_2} = (x)^t$ est caractérisé par un point $t = [t_1, t_2]$ du réseau (N) formé par les points du plan à coordonnées entières positives. Pour ordonner les monomes, on dira que l'exposant q de (N) est avant t et l'on écrira $q \prec t$ si l'on a $q_1 + q_2 \leqq t_1 + t_2$ et, soit $q_1 + q_2 < t_1 + t_2$, soit $q_1 < t_1$. On ordonne ainsi (N) suivant les diagonales descendantes. Le degré $n(q) = q_1 + q_2$ est fonction non décroissante de l'ordre.

L'addition des exposants correspond à la multiplication des monomes. On définit

$$p + q = t \quad \text{si} \quad p_1 + q_1 = t_1, \; p_2 + q_2 = t_2.$$

On définit de même $p = t - q$. Il est essentiel de remarquer: *a)* $p + q = t$ entraîne $p \preceq t$ et $q \preceq t$ car $n(p) + n(q) = n(t)$. *b)* Par contre l'ensemble des p qui pour t fixé, sont de la forme $p = t - q$, q quelconque, est contenu dans l'ensemble $p \preceq t$ mais est en général plus restreint que lui. Il est aisé de voir qu'il n'existe pas d'ordre sur le réseau (N) pour lequel l'ensemble $p \preceq t$ coïncide avec l'ensemble des p de la forme $p = t - q$ où q est pris dans (N).

Nous appellerons suite (S) de polynomes un ensemble de polynomes

$$P_t(x, y) = (x)^t + \sum_j \lambda_j^t (x)^j \tag{4}$$

tel qu'il corresponde un polynome P_t à chaque point t du réseau (N), le polynome P_t étant formé du premier monome $(x)^t = x^{t_1}x^{t_2}$ de coefficient unité et contenant seulement avec celui-ci des monomes d'exposants $j \prec t$ antécédents à t.

Nous énoncerons alors:

Théorème 1. *D étant un domaine contenant $O\,[x = y = 0]$ comme point intérieur, pour que la classe $E(D)$ des fonctions analytiques et uniformes dans D, ayant en O des coefficients de Taylor entiers ne contienne que des fractions rationnelles, il suffit que soient vérifiées les conditions suivantes:*

a) *Il existe dans D une variété W à deux dimensions réelles constituée par un cycle ou un ensemble de cycles; W est simplement enlacée avec l'ensemble $T(O)$ d'équation $xy = 0$ et peut être amenée par déformation continue dans D sur le cycle $V\,[|x| = r, |y| = r']$ pris dans un voisinage arbitraire de O.*

b) *Il existe une suite* (S) *de polynomes* $P_t(x, y)$ *pour lesquels on a sur* W:

$$\frac{1}{n_t}\log|P_t(x^{-1}, y^{-1})| \leqq \gamma < 0 \tag{5}$$

dès que le degré n_t *surpasse un nombre* n_0.

c) *De plus on suppose que* W *est obtenue de la façon s ivante: On désigne par* C *un contour fermé ou un ensemble de tels contours contenu dans l'intersection* d_0 *de* D *avec* $x=0$ *et réductible par déformation continue dans* d_0 *à un cercle* $|y|=r'$ *pris dans un voisinage de* $y=0$; *on appelle de même, pour* $y=\eta\in C$, $\Gamma(y)$ *un contour fermé ou un ensemble de contours fermés pris dans l'intersection* $d(y)$ *de* D *avec le plan* $y=\eta$ *et réductible dans* $d(y)$ *à un cercle* $|x|=r$ *arbitrairement petit entourant* $x=0$. *On a alors* $W=\sum[y\in C,\ x\in\Gamma(y)]$.

La condition b) est à rapprocher de la condition $c(\sigma)<1$ du résultat de Borel-Pólya; celle-ci équivaut en effet à l'existence d'un contour C dans le domaine plan D et à celle d'une suite (S) de polynomes de Tchebyscheff satisfaisant (5) sur C. On notera par contre que W est ici un cycle à deux dimensions réelles; pour les applications W sera pris dans D, évidemment au voisinage de la frontière de D, mais n'est plus comme dans le cas des séries $F(z)$ déterminé seulement par une approximation de celle-ci.

Remarquons encore que si D n'est pas un domaine d'holomorphie, $E(D)$ sera en général formée de fonctions analytiques dans un domaine $\breve{D}$ plus grand que D. On est amené à envisager:

Problème B: *Etant donné un domaine d'holomorphie* D *à l'intérieur duquel tout cycle* L^1 *à une dimension est réductible à un point par déformation continue, et* D *contenant* O *comme point intérieur, trouver des conditions suffisantes sur* D *pour la classe* $E(D)$ *ne contienne que des fractions rationnelles.*

Le problème B sera étudié dans le cas où D est un domaine cerclé par rapport à O. Les résultats obtenus montrent que les conditions suffisantes d'après le théorème 1 sont aussi nécessaires au sens suivant: si elles sont en défaut pour les domaines du type indiqué, $E(D)$ renferme des fonctions non rationnelles.

Pour terminer ces généralités qui concernent une question nouvelle à notre connaissance, signalons qu'il ne parait pas déraisonnable d'espérer que l'hypothèse c) sur W puisse être laissée de côté, W étant assujetti à la seule condition d'être une variété dans D simplement enlacée avec $T(0)$, sur laquelle est satisfaite la condition (5) relativement à une suite (S) de polynomes. Une solution moins partielle du problème posé semble possible dans cette voie.

§ 2. Problème B pour les domaines cerclés.

1. *Dicylindre de centre O.* Soit $D = D(R, R')$ le dicylindre $|x| < R$, $|y| < R'$. Nous établirons:

Proposition 1 *Pour que la classe $E(D)$ ne contienne que des fractions rationnelles, il faut et il suffit que l'on ait*

$$R_m = \min(R, R') > 1. \tag{6}$$

Si cette condition est réalisée, la classe $E(D)$ des fonctions analytiques dans $D(R, R')$, à coefficients de Taylor entiers à l'origine, ne contient que des polynomes.

Si elle n'est pas réalisée, $E(D)$ contient des fonctions non rationnelles.

En effet si $R_m > 1$, il existe r_0 tel que l'on ait $1 < r_0 < R_m$. Soit M le maximum de $|F(x, y)|$ sur la variété $V: [|x| = |y| = r_0]$. Si l'on pose $F = \sum_{p,q} a_{p,q} x^p y^q$, on a:

$$a_{p,q} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_V F(\xi, \eta)\, \xi^{-p-1} \eta^{-p-1}\, d\xi\, d\eta. \tag{7}$$

D'où $|a_{p,q}| \leqq M r_0^{-(p+q)}$ quantité qui est inférieure à 1 dès qu'on a $p + q > n_0$; d'où $a_{p,q} = 0$ pour $p + q > n_0$; F est un polynome.

Pour la réciproque utilisons le théorème de Hadamard-Fabry relatif aux séries lacunaires: si pour la série $F(z) = \sum_n a_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$, où λ_n sont des entiers croissants on a $\lim(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = +\infty$, alors $F(z)$ est non prolongeable hors du cercle de convergence.

Dans ces conditions si $R_m = R \leqq 1$, on formera

$$\varphi_R(x) = \sum_p [R^{-p}]\, x^{2^p}$$

$[R^{-p}]$ désignant la partie entière de R^{-p}. La fonction

$$F(x, y) = \varphi_R(x) + g(y)$$

où g est un polynome à coefficients entiers, appartient à $E(D)$ et n'est pas rationnelle.

2. *Domaine de Reinhardt de centre O.* Rappelons qu'on appelle domaine de Reinhardt (de centre O) un domaine 2 fois cerclé qui contient en même temps que le point $[x_0, y_0]$ tous les points $[x = x_0 e^{i\theta},\ y = y_0 e^{i\varphi},\ 0 \leqq \theta < 2\pi,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi]$ Pour qu'un tel domaine contenant 0 soit domaine d'holomorphie, il faut et il suffit qu'il soit défini par les équations:

$$|x| = r = e^u,\ |y| = r' = e^v$$

l'ensemble des points $[u, v]$ étant un ensemble (g) convexe qui comprend évidemment les deux points à l'infini $[u = -\infty,\ v = 0]$, $[u = 0,\ v = -\infty]$; nous désignerons par γ la séparatrice ou frontière convexe de (g); elle détermine le domaine.

Proposition 2. *Etant donné un domaine de Reinhardt D de centre O, contenant 0 pour que $E(D)$ ne contienne que des fractions rationnelles, il faut et il suffit que la variété $V_1: [|x|=|y|=1]$ soit intérieure à D.*

Si la condition est vérifiée, $E(D)$ ne contient que des polynomes.

Si D ne contient pas V_1 à l'intérieur, il existe une série $F(x,y)=\sum_{p,q} a_{p,q} x^p y^q$, $a_{p,q}$ entiers, qui converge dans D et n'est pas une fraction rationnelle.

La première partie se démontre comme pour le dicylindre; si V_1 est intérieure à D, D contient la variété $|x|=|y|=r_0$, avec $r_0>1$ assez voisin de 1.

Démontrons la seconde partie en supposant que le domaine D ne contienne pas à son intérieur V_1; dans ces conditions le point $\omega\,[u=v=0]$ est sur γ ou au dessus de γ. La région (g) limitée par γ étant convexe, on peut dans les deux cas, mener par O une droite Δ n'ayant pas d'autre point commun avec (g) que O et laissant (g) au dessous d'elle.

Si Δ a une pente rationnelle, on écrira son équation

$$mu+nv=0, \qquad m, n \text{ entiers}$$

et on formera la série:

$$F_1(x,y)=\sum_p (x^m y^n)^{2^p} \tag{8}$$

Si Δ a une pente $-\tau$ irrationnelle, on formera une suite de fractions $n_p/m_p \to \tau$ et on écrira

$$F_2(x,y)=\sum (x^{m_p} y^{n_p})^{2^p}. \tag{9}$$

Il est clair que F_1 et F_2 convergent dans D car ces séries convergent dans le domaine de Reinhardt plus grand de séparatrice Δ. Reste à montrer que F_1 et F_2 ne sont pas rationnelles. Dans ce but nous établirons la proposition suivante relative aux séries lacunaires $F(x,y)$:

Proposition 3. *Si dans la série $F(x,y)=\sum_s a_s (x)^s$ les points s du réseau (N) pour lesquels $a_s \neq 0$ forment un ensemble (e) ayant la propriété suivante: tout point $s\in(e)$ est centre d'un cercle C_s qui ne contient pas de point de (e), et dont le rayon $r_s \to +\infty$ avec la distance de s à l'origine de (N); alors $F(x,y)$ n'est pas une fraction rationnelle.*

Il est immédiat que la Proposition entraîne que (8) et (9) ne soient pas rationnels.

Pour l'établir formons des conditions nécessaires pour que F soit rationnelle. De l'identité

$$F(x,y)\,C(x,y)=B(x,y),$$

où B et C sont des polynomes, c'est-à-dire des sommes de monomes dont les exposants appartiennent à des régions bornées β et γ de (N), on déduit:

$$[\sum_{s\in(N)} a_s(x)^s]\,[\sum_{t\in\gamma} c_t(x)^t] \equiv \sum_{q\in\beta} b_q(x)^q$$

(10) $$E_q: \sum_{l\in\gamma} c_l a_{q-l} = b_q \qquad \text{si } q\in\beta$$

(11) $$E_q: \sum_{l\in\gamma} c_l a_{q-l} = 0 \qquad \text{si } q\bar{\in}\beta.$$

On pose $a_{q-l}=0$ si $q-l$ n'appartient pas à (N). En considérant une région $q\in\gamma'$ où γ' n'a aucun point commun avec β et contient autant de points de (N) que γ, on forme le déterminant

$$D(\gamma,\gamma') = \|a_{q-l}\|^{(q,l)}, \qquad q\in\gamma',\ l\in\gamma$$

q variant avec les lignes, l avec les colonnes. La compatibilité des équations E_q pour $q\in\gamma'$ entraîne

$$D(\gamma,\gamma')=0.$$

On peut d'ailleurs remplacer γ par une région G contenant γ. D'où:

Proposition 4. *Pour que $F=\sum_{s\in(N)} a_s(x)^s$ soit rationnelle il faut que les déterminants*

(12) $$D(G,G') = \|a_{q-l}\|^{(q,l)}, \qquad l\in G,\ q\in G'$$

soient nuls, G et G' étant deux régions contenant le même nombre de points de (N), G' ne rencontrant pas la région finie β des exposants du numérateur et G étant assujettie à contenir la région γ des exposants du dénominateur.

Montrons que la Proposition 4 entraîne la précédente. Soit $s\in(e)$ pour lequel $a_s\neq 0$. Associons à s la région G_s constituée par les points $q=s+j$, $j\in\gamma$. On doit avoir

$$D_s = D(\gamma, G_s) = \|a_{s+j-l}\|^{(j,l)} = 0, \qquad j\in\gamma,\ l\in\gamma.$$

Or D_s d'après l'hypothèse faite sur (e) se réduit à sa diagonale $j=l$, donc vaut $(a_s)^\nu$, dès que γ est contenue dans C_s, soit pour $|0s|$ suffisamment grand. Donc dans les conditions énoncées à la Proposition 3, F ne peut être rationnelle.

La même conclusion peut être obtenue en supposant seulement l'existence d'une suite de cercles lacunaires C_s dont les rayons augmentent indéfiniment. Il est vraisemblable que la caractère lacunaire énoncé dans la Proposition 3 assure l'impossibilité du prolongement de F au delà du domaine de Reinhardt de convergence de la série de Taylor.

Remarquons enfin que si l'on prend pour variété W la variété $|x|=|y|=r_0$, $r_0>1$, déjà considérée, et pour suite $P_s(x,y)=(x)^s$, les conditions suffisantes trouvées jusqu'ici pour que $E(D)$ ne contienne que des fractions rationnelles, constituent une application du théorème 1.

3. *Domaines simplement cerclés et domaines de Hartogs.* Soit S un domaine simplement cerclé de centre O, c'est-à-dire contenant en même temps que $[x_0, y_0]$ tous les points $[x=x_0e^{i\theta},\ y=y_0e^{i\theta},\ 0\leq\theta<2\pi]$. Pour que S contenant 0 soit un domaine d'holomorphie, il faut et il suffit qu'il soit défini par $y = tx$, $|x| < R(t)$, où $-\log R(t)$ est sousharmonique ou $-\infty$.

Un domaine H est dit domaine de Hartogs de plan de symétrie $x = 0$ si même temps que $[x_0, y_0]$, H contient les points $[x = x_0 e^{i\theta},\ y = y_0,\ 0 \leq \theta < 2\pi]$. Pour que H soit un domaine d'holomorphie, contenant 0, il faut et ilsuffit qu'il soit défini par $[y \in d,\ |x| < R(y)]$, où $-\log R(y)$ est sousharmonique ou $-\infty$.

Par la substitution $x = ty$, $F(x, y) = \Sigma a_{p,q} x^p y^q$ devient $\Phi = \Sigma a_{p,q} t^p y^{p+q}$ à coefficients entiers; le problème B pour les domaines S est donc contenu dans le même problème pour les domaines H.

Je vais montrer que le théorème 1 permet de résoudre le problème B pour ces derniers.

Proposition 5. *Pour que la classe $E(H)$ ne contienne que des fractions rationnelles, il faut et il suffit que soient satisfaites les conditions suivantes:*

Il existe un ensemble ouvert e con enant l'origine $O[x = y = 0]$ et contenu dans la base $d[x = 0,\ y \in d]$ sur lequel on a $R(y) > \varrho > 1$; la composante e_0 de e qui contient O donne par la transformation $y' = y^{-1}$ une région dont le complémentaire σ fermé et borné a un diamètre transfini $c(\sigma) < 1$.

Remarquons tout d'abord que les conditions énoncées sont nécessaires; elles le sont en effet pour les dicylindres de centre O qui sont des domaines H particuliers.

Elles sont suffisantes d'après le théorème 1. Enfermons σ à l'intérieur d'un nombre fini de contours rectifiables L', l'ensemble σ' des domaines formés ayant un diamètre transfini c' avec $c < c' < 1$. On peut former alors des polynomes

$$T_n(y') = y'^n + \sum_{j=0}^{j=n-1} \lambda_j^{(n)} y'^j$$

satisfaisant à

$$|T_n(y')| < (c' + \varepsilon)^n$$

sur L' pour $n > n_0$, avec $c' + \varepsilon = c'' < 1$.

En posant, si $s = [s_1, s_2]$,

$$P_s(x, y) = x^{s_1} T_{s_2}(y)$$

et prenant comme variété W la variété constituée en associant à un point $y \in L$ du transformé de L' par $y = y'^{-1}$, le cercle $|x| = \varrho'$, où l'on a $\varrho' > \varrho > 1$, on voit aisément que les conditions du théorème 1 sont satisfaites: $E(H)$ ne renferme que des fractions rationnelles.

§ 3. Problème A: démonstration du théorème 1.

Nous supposerons $F(x, y)$ analytique dans un domaine D contenant l'origine; elle est développable sous la forme

$$(13) \qquad F(x, y) = \sum_p a_p(y)\, x^p$$

dans un dicylindre $|x|<r$, $|y|<r$ suffisamment petit; les $a_p(y)$ sont des fonctions analytiques à coefficients de Taylor entiers à l'origine.

Nous considérons pour le moment y comme un paramètre et préciserons en reprenant un raisonnement classique[2]) les conditions nécessaires et suffisantes pour que F soit fraction rationnelle de x.

Nous poserons

$$X_\alpha^\beta = \| a_{\alpha+i+j} \|^{(i,j)}, \qquad (0 \leqq i \leqq \beta,\ 0 \leqq j \leqq \beta)$$

i variant avec les lignes, j avec les colonnes dans le déterminant X_α^β; ce déterminant étant un polynome des quantités

$$(14) \qquad a_p = \frac{1}{p!} \frac{\partial^p F}{\partial x^p}$$

est une fonction analytique dans D; nous le noterons encore $X_\alpha^\beta F(x, y)$.

Les fonctions $X_\alpha^\beta F(x, y)$ étant identiquement nulles pour $\alpha < -\beta$, on supposera toujours $\alpha \geqq -\beta$.

Nous établirons:

Proposition 6. *a) Pour que F analytique dans D soit une fraction rationnelle de x, il faut que l'on ait*

$$X_\alpha^\beta F(x, y) \equiv 0 \qquad \textit{dans } D$$

pour $\alpha \geqq p$, $\beta \geqq n$ $(p \geqq -n)$ *où* $p = m - n + 1$, *m étant le degré du numérateur, n celui du dénominateur.*

b) Il est également nécessaire qu'on ait

$$X_0^\beta F(x, y) \equiv 0 \qquad \textit{dans } D$$

pour $\beta \geqq \max(m+1, n) = p_1$.

c) En réciproque de *a)*: *si l'on a* $X_\alpha^\beta F(x, y) \equiv 0$ *pour* $\alpha \geqq p$, $\beta \geqq n$ *et* $X_{\alpha_0}^{n-1} F(x_0, y_0) \neq 0$ *pour un* $\alpha_0 \geqq p$, *F est fraction rationnelle de x, le degré du dénominateur est n, celui du numérateur* $n + p - 1$ *au plus; les coefficients de ces deux polynomes sont des polynomes des quantités* $a_p(x_0, y)$ *en nombre fini.*

d) En réciproque de *b)*: *si l'on a* $X_0^\beta F(x, y) \equiv 0$ *pour* $\beta \geqq p_1$, *F est rationnelle de x et l'on a* $\max(m+1, n) \leqq p_1$.

e) Les fonctions $X_\alpha^\beta F(x, y)$, *analytiques dans D, y possèdent la propriété suivante pour* α *donné positif. Si pour* $\beta \geqq \beta_0$ *elles s'annulent toutes sur un plan analytique* $x = x_0$ *identiquement en y, elles s'annulent pour* $\beta \geqq \beta_0$ *identiquement dans D.*

Pour la démonstration considérons l'identité

$$\left[\sum a_p x^p\right] \left[\sum_{j=0}^{j=n} c_j x^j\right] = \sum_{s=0}^{s=m} b_s x^s$$

où les coefficients a_p, c_j, b_s dépendent de y; elle donne les équations

[2]) Voir L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, 1931, p. 321.

$$(15) \qquad E_s : \sum_{j=0}^{j=n} c_j(y) a_{s-j}(y) = b_s(y) \qquad s \leqq m$$

$$(16) \qquad E_s : \sum_{j=0}^{j=n} c_j(y) a_{s-j}(y) = 0 \qquad s > m.$$

La compatibilité de $E_{m+1+\lambda}, \ldots, E_{m+1+\lambda+n}$ donne en posant $m+1-n=p$:

$$X_{p+\lambda}^{n} F(0, y) = \| a_{p+\lambda+i+j} |^{(i,j)} = 0$$

quel que soit $\lambda \geqq 0$. On a donc $X_\alpha^\beta F(0, y) = 0$ pour $\alpha \geqq p$, $\beta \geqq n$, quel que soit y. De plus une translation $x = x_1 + x_0$ ne modifie pàs le résultat: *a)* est ainsi établi.

Si l'on a $p \leqq 0$, *b)* est établi car on peut prendre $\alpha = 0$ dans *a)*; on a alors $p_1 = n$. Si l'on a $p > 0$, on considère un déterminant $X_0^{\alpha+\beta+\lambda}$, avec $\lambda \geqq 0$, $\alpha \geqq p$, $\beta \geqq n$: les mineurs formés avec les β dernières lignes sont nuls; on a donc $X_0^\beta F(x, y) \equiv 0$ pour $\beta \geqq \max(m+1, n) = p_1$; *b)* est établi.

Pour établir *c)* on utilise l'identité entre déterminants:

$$(17) \qquad (X_{\alpha-1}^{n-1})(X_{\alpha+1}^{n-1}) - (X_{\alpha-1}^{n})(X_{\alpha+1}^{n-2}) = (X_\alpha^{n-1})^2$$

pour $\alpha = \alpha_0$. Des hypothèses *c)* on déduit

$$X_{\alpha_0-1}^{n-1} F(x_0, y_0) \neq 0, \quad X_{\alpha_0+1}^{n-1} F(x_0, y_0) \neq 0.$$

En tenant compte de $X_\alpha^n F(x_0, y_0) \equiv 0$ pour $\alpha \geqq p$, on a de proche en proche:

$$X_\alpha^{n-1} F(x_0, y_0) \neq 0$$

pour $\alpha \geqq p+1$. Dès lors les équations $E_{m+1}, \ldots, E_{m+1+n}$ déterminent les coefficients $c_j(y)$, $(0 \leqq j \leqq n)$, à un facteur près; on achève de les préciser en posant

$$c_0(y) = X_{p+1}^{n+1} F(x_0, y) \neq 0.$$

On détermine les coefficients $b_s(y)$ par les équations (15): on a ainsi F; numérateur et dénominateur étant ordonnés suivant les puissances de $x_1 = x - x_0$; *c)* est établi.

D'autre part si l'on a $X_0^\beta F(x, y) \equiv 0$ pour $\beta \geqq p_1$, d'après l'identité (17) appliquée avec $\alpha = 1$, $n-1 = \beta$, on a aussi $X_1^\beta F(x, y) \equiv 0$ pour $\beta \geqq p_1$ et de proche en proche $X_\alpha^\beta F(x, y) \equiv 0$ pour $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq p_1$: d'après *c)* F est rationnelle de x et l'on a $\max(m+1, n) \leqq p_1$; *d)* est établi.

Enfin *e)* résulte de *d)*, car si $X_0^\beta F(x_0, y_0) = 0$ quel que soit y pour $\beta \geqq \beta_0$, F est rationnelle en x avec $\max(m+1, n) \leqq \beta_0$; on en déduit $X_0^\beta F(x, y) \equiv 0$. Même raisonnement pour $X_\alpha^\beta F = X_0^\beta \left(\dfrac{\partial^\alpha F}{\partial x^\alpha} \right)$ avec $\alpha > 0$.

Indiquons quelques conséquences des énoncés précédents. Si F, analytique dans D, n'est pas rationnel en x, l'ensemble des valeurs y, soit $e_y^{(n)}$ pour lesquelles F est rationnel en x, de degré au plus n, est à chercher parmi les zéros de la fonction analytique $X_0^{n+1} F(x_0, y)$; les plans $y = \eta \in e_y^{(n)}$ n'ont pas de poin d'accumulation dans D

L'ensemble e_y des y qui peuvent rendre F rationnel en x soit $\sum_n e_y^{(n)} = e_y$ est ainsi dénombrable.

Remarquons encore: pour que F, analytique dans D, soit rationnel, il faut et il suffit que F soit rationnel de x et de y séparément.

En effet on a vu que si F est rationnel en x les équations (15) et (16) déterminent les coefficients $c_s(y)$, $b_j(y)$ comme fonctions rationnelles des $a_k(y)$ en nombre fini. Si F est rationnel en y, $a_k(y)$ déterminé par (14) est rationnel en y; F est ainsi exprimé rationnellement en fonction de x et de y.

Expression des $X_0^\beta F(x, y)$: Nous désignerons par V une variété à 2 dimensions enlacée simplement avec $T(0)$, par l un contour fermé entourant l'origine $\xi = 0$ dans le plan des ξ; on aura:

$$a_p(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_l F(x+\xi, y)\, \xi^{-p} (\xi^{-1}\, d\xi) \tag{18}$$

$$a_p(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_V F(x+\xi, y+\eta)\, \xi^{-p} (\xi^{-1}\, d\xi)\, (\eta^{-1} d\eta). \tag{19}$$

A partir de (18), on a

$$X_0^n F(x, y) = \| a_{i+j}(x, y) \|^{(i,j)}$$

ou:

$$X_0^n F(x,\ y) = (2i\pi)^{-(n+1)} \int_{l_0} \cdots \int_{l_n} \delta(\xi_0^{-1}, \ldots, \xi_n^{-1})\, \xi_1^{-1}, \ldots, \xi_n^{-n} \prod_{i=0}^{i=n} F(x+\xi_i, y)\, \xi_i^{-1}\, d\xi_i \tag{20}$$

$\xi_0 \cdots \xi_n$ sont $n+1$ variables d'intégration parcourant les contours l_i entourant $\xi_i = 0$. On a posé

$$\delta(\xi_0^{-1}, \ldots, \xi_n^{-1}) = \| \xi_i^{-j} \|^{(i,j)}, \quad 0 \leqq i \leqq n,\ 0 \leqq j \leqq n.$$

En envisageant les $(n+1)!$ permutations des lettres ξ_i, on a encore:

$$X_0^n F(x, y) = \frac{(2i\pi)^{-(n+1)}}{(n+1)!} \int_{l_0} \cdots \int_{l_n} \delta^2(\xi_0^{-1}, \ldots, \xi_n^{-1}) \prod_{i=0}^{i=n} F(x+\xi_i, y)\, \xi_i^{-1}\, d\xi_i \tag{21}$$

et on définira de même $Y_0^q F(x, y)$, l'opérateur portant sur la variable y.

Les fonctions $X_0^n F(x, y)$ étant analytiques dans D, on peut leur appliquer l'opérateur Y_0^q et considérer les fonctions $Y_0^q X_0^n F(x, y)$ analytiques dans D. Nous allons établir:

Proposition 7. *Les hypothèses du théorème 1 entraînent*

$$\chi_{q,n} = Y_0^q X_0^n F(0, 0) = 0 \quad pour \quad n^2 + q > m_0,$$

m_0 étant un entier fini.

Tout d'abord $Y_0^q X_0^n F(0, 0)$ s'exprime en fonction des coefficients $a_{p,q}$ donnés par (3) et est entier avec eux. Il suffit donc d'établir:

$$|\chi_{q,n}| = |Y_0^q X_0^n F(0, 0)| < 1 \qquad \text{pour} \quad n^2 + q > m_0.$$

Ici intervient l'hypothèse du théorème 1 concernant W; on a $W=\sum_y [y\in C,\ x\in \Gamma(y)]$ et il existe une suite P_s de polynomes avec, sur W:

$$\log\left|P_s\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)\right|\leqq n_s\gamma+\log A \tag{22}$$

A constante finie, $\gamma<0$.

Pour y fixé, $x=0$, nous calculerons $X_0^n F^x(0,y)$ par (21) en prenant pour contours l_i le contour $\Gamma(y)$. Dans la suite (21), nous considérons les polynomes correspondant à $s=[n,0]$, $P_n(x,y)=x^n+\sum_{i=0}^{i=n-1}\lambda_i^{(n)}(y)\,x^i$; $\lambda_i^{(k)}(y)$ es un polynome de degré $k-1$ en y; on a $\lambda_k^{(k)}=1$, $\lambda_i^{(k)}=0$ pour $i>(k)$, de sorte que:

$$\|\lambda_i^{(j)}(y)\|^{(i,j)}=1$$

et

$$\delta(\xi_0^{-1},\ldots,\xi_n^{-1})=\delta(\xi_0^{-1},\ldots,\xi_n^{-1})\,\|\lambda_i^{(j)}\|^{(i,j)}=\|P_i(\xi_j^{-1},y^{-1})\|^{(i,j)}. \tag{23}$$

En utilisant alors la majoration (22) des polynomes sur $\Gamma(y)$, on obtient une majoration du déterminant (23) suivant le procédé de Hadamard:

$$|\delta(\xi_0^{-1},\ldots,\xi_n^{-1})|^2\leqq A^{2(n+1)}(n+1)^{n+1}e^{n(n+1)\gamma} \tag{24}$$

D'après (21), on a alors pour $y\in C$:

$$|X_0^n F(0,y)|\leqq\left(\frac{M}{2\pi}\right)^{n+1}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}S^{n+1}A^{2(n+1)}e^{n(n+1)\gamma},$$

où $M=\max|F(x,y)|$ sur W, et S est une borne supérieure de $\int|\xi_i^{-1}d\xi_i|$ sur $\Gamma(y)$. Finalement il existe un nombre $K_1>1$ indépendant de n et de y tel que

$$|X_0^n F(0,y)|\leqq K_1^{n+1}e^{n(n+1)\gamma} \qquad \text{pour}\quad y\in C. \tag{25}$$

A partir de (25) majorons

$$\begin{aligned}\chi_{q,n}&=Y_0^q X_0^n F(0,0)=\\&=\frac{(2i\pi)^{-(q+1)}}{(q+1)!}\int_c\cdots\int_c\delta^2(\eta_0^{-1},\ldots,\eta_q^{-1})\prod_0^q X_0^n F(0,\eta_i)\,\eta_i^{-1}d\eta_i.\end{aligned} \tag{26}$$

En considérant dans la suite (22) les polynomes P_m obtenus pour $s=[0,m]$, on aura $\left|P_m\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)\right|<Be^{n\gamma}$, pour $y\in C$, $x\in\Gamma(y)$. Formons

$$Q_m\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(y)}P_m\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)\frac{dx}{x}.$$

On a

$$\left|Q_m\left(\frac{1}{y}\right)\right|<B'e^{n\gamma} \tag{27}$$

pour $y \in C$ et Q_m est de la forme

$$Q_m(y) = y^m + \sum_{i=0}^{i=m-1} \mu_i^{(m)} y^i.$$

En opérant comme plus haut, on a alors

$$\delta(\eta_0^{-1}, \ldots, \eta_q^{-1}) = \| Q_i(\eta_j^{-1}) \|^{(i,j)}$$

et

$$|\delta^2(\eta_0^{-1}, \ldots, \eta_q^{-1})| \leq B'^{2(q+1)} (q+1)^{q+1} e^{q(q+1)}$$

Finalement, il existe un nombre $K_2 > 1$ indépendant de q et n tel que l'on ait:

(28) $\qquad \log|\chi_{p,n}| \leq (q+1)[\log K_2 + (n+1)\log K_1 + (q+n(n+1)))\gamma].$

On a donc $\chi_{p,n} = 0$ dès que:

$$[n(n+1)+q]\gamma + (n+1)\log K_1 + \log K_2 < 0$$

ou

$$(n^2+q)\gamma + \sqrt{n^2+q}\log K_1 + \log K_2 < 0.$$

On a donc $\chi_{q,n} = 0$ dès que n^2+q surpasse un certain nombre fini m_0, ce qui démontre la Proposition 7.

On a pour $q > m_0$, $Y_0^q X_0^n F(0,0) = 0$, quel que soit n; donc $X_0^n F(0,y)$ est, quel que soit n, une fraction rationnelle de degré au plus m_0+1 d'après la proposition 6.

D'autre part considérons les valeurs n telles que $n^2 > m_0$; on a $Y_0^q X_0^n F(0,0) = 0$ quel que soit q. Posons $X_0^n F(0,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^{(n)} y^i$. Pour $q=0$, on obtient $X_0^n F(0,0) = \alpha_i^{(n)} = 0$. Ensuite $Y_0 X_0^n F(0,0) = 0$ donne, en tenant compte de $\alpha_i^{(n)} = 0$, l'égalité $\alpha_1^{(n)} = 0$. De proche en proche on démontre $\alpha_0^{(n)} = 0$ quel que soit i; comme $X_0^n F(0,y)$ est une fraction rationnelle de degré au plus m_0+1, on en déduit

$$X_0^n F(0,y) \equiv 0 \qquad\qquad \text{pour} \quad n^2 > m_0.$$

Il en résulte que F est rationnelle en x, de degré n_0 au plus, n_0 étant le premier entier tel que $n_0^2 > m_0$. On a vu plus haut que F est alors le quotient de deux polynomes en x dont les coefficients $c_j(y)$, $b_s(y)$ sont des expressions rationnelles des $a_k(y)$ en nombre fini; or les $a_k(y)$ sont des fractions rationnelles de y car $a_k(y)$ a un développement de Taylor à coefficients entiers à l'origine et est analytique à l'intérieur de C, sur lequel existe la suite de polynomes $Q_m\left(\frac{1}{y}\right)$ avec la condition (27). Ainsi $F(x,y)$ est une fraction rationnelle, ce qui établit le théorème 1.

Les hypothèses du théorème 1 s'appliquent aisément aux domaines de la forme $D = \sum_y [y \in d_0, x \in d(y)]$. Appelons c_0 le diamètre transfini du transformé par $y' = y^{-1}$ du complémentaire de d_0; désignons de même par $c(y)$ le diamètre transfini du transformé par $x' = x^{-1}$ du complémentaire de $d(y)$.

On vérifie facilement que les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées si l'on a $c(y) \leqq c_1 < 1$ pour $y \in d_0$, et $c_0 < 1$. L'exemple des domaines de Hartogs montre que ces conditions sont bien nécessaires pour que la classe $E(D)$ soit rationnelle. Remarquons encore que si D est un domaine produit topologique $[x \in d_0,\ y \in d_1]$, pour que $E(D)$ soit une classe rationnelle, il faut et il suffit que les classes $E(d_0)$, $E(d_1)$ de fonctions d'une variable le soient; la condition nécessaire est évidente; la condition suffisante résulte du théorème 1.

(Reçu le 22 juillet 1950.)