Über das Produkt fünf aufeinander folgender Zahlen in einer arithmetischen Reihe.

Von RICHARD OBLÁTH in Budapest.

§ 1. Einleitung.

Über die Frage, ob Produkte aufeinander folgender Glieder einer arithmetischen Reihe, deren Glieder ganze rationale Zahlen sind, volle Potenzen werden können, sind nur ganz spärliche Resultate bekannt[1]). Außer der seit sehr lange bekannten Tatsache, daß drei Quadratzahlen eine arithmetische Progression bilden können[2]), wissen wir nur, daß das Produkt drei konsekutiver Glieder einer arithmetischen Reihe mit teilerfremdem Anfangsglied und Differenz weder eine Kubikzahl[3]), noch ein Biquadrat oder eine fünfte Potenz darstellen vermag[4]), und daß das Produkt vier aufeinanderfolgender Glieder einer solchen arithmetischen Reihe kein Quadrat ist[5]), (ausgenommen die Reihe —3, —1, 1, 3). Außerdem sind ähnliche Ergebnisse über einige sehr spezielle arithmetische Reihen bekannt. Z. B. ist das Produkt aufeinanderfolgender ungeraden Zahlen keine volle Potenz;[6]) dasselbe gilt für das Produkt von höchstens 300 aufeinanderfolgenden Gliedern der Reihe $6x+1$ und für die beiden Produkte $\prod_{x=a+1}^{a+48}(4x\pm 1)$.[7]) Dieser Mangel an sichergestellten Ergebnissen

---

[1]) E. L. DICKSON, History of theory of numbers. II. The diophantine analysis, New York, 1934. S. 435 und 679.

[2]) Angeblich schon LEONARDO DA PISA (Fibonacci) und JORDANUS NEMORARIUS bekannt. Siehe: G. WERTHEIM, Anfangsgründe der Zahlenlehre, Braunschweig, 1902, S. 147 und [1]) S. 435.

[3]) M. P. A. GUIBERT, Remarques sur quelques produits dont les facteurs sont en progression arithmétique. *Nouv. Ann. de Math.* (1. ser.) **19** (1860), 213—215. — R. OBLÁTH, Über Produkte aufeinander folgender Zahlen. *Tôhoku Math. Journ.* **38** (1933), 73—92.

[4]) R. OBLÁTH, Une remarque sur la progression arithmétique. *Matematikai Lapok* **1** (1950), 138—139.

[5]) L EULER, De formulis concordibus et discordibus. *Comm. Arithm. Coll.* II. 1849, 406—413. Diese, in 1780 geschriebene Arbeit wurde erst 1818 gedruckt. — V. A. LEBESGUE, Sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées. *Nouv. Ann. de Math.* (II ser.) **2** (1863), 68—77.

[6]) R. OBLÁTH [3]) für höchstens 48 aufeinanderfolgende ungerade Zahlen. Den allgemeinen Satz findet man bei P. ERDŐS, Note on products of consecutive integers. *Journal of London Math. Soc.* **14** (1939), 194—198.

[7]) R. OBLÁTH [3]) S. 90.

hat seinen Grund wohl in der Spröde des Gegenstandes, denn die Methoden, welche man bei der einfachsten arithmetischen Reihe, nämlich bei der Folge der natürlichen Zahlen mit Erfolg anwendet, versagen hier. Man kann jeder vorgelegten arithmetischen Reihe eine andere zuordnen, bei der, falls $(n, k)=1$ ist, das Produkt von k konsekutiven Gliedern eine n-te Potenz wird. Wenn nämlich in der gegebenen arithmetischen Reihe

$$\prod_{x=0}^{k-1}(a+dx)=Ay^n$$

wäre, so kann man, wenn jedes Glied mit einer geeigneten Potenz von A multipliziert wird, erreichen, daß

$$\prod_{x=0}^{k-1} A^t(a+dx)=(A^v)^n y^n=B^n$$

wird, mit $kt=vn-1$. Arithmetische Reihen, deren Anfangsglied und Differenz einen gemeinsamen Teiler besitzen, können aber Schwierigkeiten bieten.

Der Zweck der vorliegenden Mitteilung ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz. *Das Produkt von fünf aufeinander folgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe, deren Anfangsglied und Differenz teilerfremd sind, ist kein volles Quadrat.*

Es ist wohl anzunehmen, daß der Satz auch für manche arithmetische Progression gilt, deren Glieder einen gemeinsamen Teiler besitzen, und zwar für solche Reihen, wo der gemeinsame Teiler bloß aus Primteiler $<k$ (die Anzahl der betrachteten Glieder; in unserem Falle also $=5$) zusammengesetzt is. Der allgemeine Beweis dieser Behauptung ist mir aber nicht gelungen. Auf Grund ziemlich mühsamer Rechnungen bin ich bloß zu folgendem Ergebnis gekommen: *Das Produkt von fünf aufeinander folgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe, deren Differenz* $\leqq 10000$ *ist und mit den Gliedern nur den gemeinsamen Teiler* 2, 3 *oder* 6 *hat, kann kein volles Quadrat sein.* Auf den Beweis dieser Behauptung gehe ich hier nicht ein.

In diesem Zusammenhang stellt P. Erdős die beiden Fragen:[8])

1) *Gibt es eine absolute Konstante C, so daß mit* $k>C$ *und* $(a, d)=1$ *das Produkt* $a(a+d)\ldots(a+(k-1)d)$ *kein Quadrat ist?*

2) *Läßt sich zu jedem gegebenem* ε *eine Zahl* $k=k(\varepsilon)$ *bestimmen, so daß es in der Folge*

$$a, a+d, \ldots, a+(k-1)d$$

höchstens εk *Quadrate gibt?*

Die Antwort ist für beide Fragen unbekannt.

[8]) Briefliche Mitteilung vom 22. Juni 1950.

§ 2. Beweis des Satzes.

Unsere Aufgabe ist die Unmöglichkeit der diophantischen Gleichung

(I) $$(x^2-4d^2)(x^2-d^2)x=y^2$$

mit

(1) $$(x, d)=1$$

in nicht verschwindenden ganzen Zahlen zu zeigen. Die fünf fortlaufenden Glieder der arithmetischen Progression sind

(2) $$x-2d\ x-d, x, x+d, x+2d.$$

Die größten quadratischen Faktoren der einzelnen Glieder (der eventuell $=1$ sein kann) bezeichnen wir der Reihe nach mit

(3) $$u^2, v^2, \xi^2, u_1^2, v_1^2.$$

Der Beweis gründet sich auf die Bemerkung, daß bei Bestehen der Gleichung (I) das Produkt der quadratfreien Kerne der fünf Zahlen (2) selbst ein Quadrat ist. Gemeinsame Teiler der einzelnen Glieder der Folge (2) können nur die Zahlen 2, 3 oder 4 sein. Die quadratfreien Kerne der Zahlen in (2) sind also Produkte von Potenzen der Primzahlen 2 und 3. Dabei müssen die Summen der Exponenten beider Primzahlen gerade Zahlen sein. Daraus ergibt sich eine Kette von Bedingungen in der Form von diophantischen Gleichungen, unter denen wir unmögliche finden werden. Ferner bedienen wir uns als Beweismittel des bereits erwähnten EULER—V. A. LEBESGUEschen Satzes[5]) daß das Produkt von vier aufeinander folgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe kein Quadrat ist.

Wir haben also die Verteilung der Folge (2) mod 2·3 zu betrachten. (Manchmal wird es zweckmäßig sein auch 6^2 und 6^3 als Modul zu wählen.)

A) Zuerst sei $x\equiv 0 \pmod 6$. Dann gilt wegen (1) $d=6q\pm 1$. Folglich sind $x-d$ und $x+d$ zu einander und den drei übrigen Gliedern in (2) teilerfremd, mithin sind sie volle Quadrate. Es gelten also $v^2\equiv -d \pmod 6$ und $u_1^2\equiv d \pmod 6$. Die erste Kongruenz ist aber für $d\equiv 1 \pmod 6$, die zweite für $d\equiv -1 \pmod 6$ unmöglich.

B) Nun sei $d\equiv 0 \pmod 6$ Dann sind sämtliche Glieder der Folge (2 paarweise teilerfremd, also volle Quadrate. Fünf Quadrate können aber nicht aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Progression sein.

C) Im dritten Falle $x\equiv\pm 1 \pmod 6$ sei zunächst $d\equiv\pm 1 \pmod 6$) Dann sind die Reste der Folge (2) mod 6 in den vier Fällen:

$$\begin{array}{rrrrrcrrrrr} -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & \quad & -3, & -2, & -1, & 0, & 1 \\ 3, & 2, & 1, & 0, & -1, & \quad & 1, & 0, & -1, & -2, & -3. \end{array}$$

Die (mittleren) Glieder mit den Resten $+1$, -1 sind zu den übrigen teilerfremd; sie müssen also volle Quadrate sein. Dies ist aber nach den Obigen unmöglich.

Sei jetzt $d \equiv \pm 2 \pmod 6$. Dann sind die Reste der Folge (2) mod 6

$$\begin{array}{lll} 3, -1, 1, 3, -1, & & 1, -3, -1, 1, 3 \\ -1, 3, 1, -1, 3, & & 3, 1, -1, -3, 1. \end{array}$$

In jedem Falle ist das erste oder letzte Glied $\equiv \pm 1 \pmod 6$, mithin muß es ein Quadrat sein. Dann ist aber das Produkt der übrigen vier Glieder ein volles Quadrat, was unmöglich ist.

Wir haben nur noch den Fall $d \equiv 3 \pmod 6$ zu untersuchen. Dann sind die Reste der Folge mod 6

$$1, -2, 1, -2, 1 \quad \text{bzw.} \quad -1, 2, -1, 2, -1.$$

Daraus folgt aber wie vorher eine Unmöglichkeit.

D) Im Falle $x \equiv 2 \pmod 6$ ist d nach (1) eine ungerade Zahl. Sei zuerst $d \equiv \pm 1 \pmod 6$. Dann sind die Reste der Folge (2) (mod 6):

$$0, 1, 2, 3, 4 \quad \text{bzw.} \quad 4, 3, 2, 1, 0.$$

Offenbar genügt es die erste Folge zu betrachten. Hier ist das letzte Glied ($\equiv 4 \bmod 6$) kein volles Quadrat, denn sonst müßte das Produkt der übrigen vier Glieder ein Quadrat sein. Folglich geht im letzten Gliede 2 mit einer ungeraden Multiplizität auf. Ist also diese Multiplizität > 1, so hat die Folge (2) die Form $3u^2, v^2, 2\xi^2, 3u_1^2, 2(2v_1)^2$. Daraus folgt die Gleichung $3u_1^2 + d = 8v_1^2$, was aber wegen $d \equiv 1 \pmod 3$ unmöglich ist. Ist andererseits das letzte Glied unserer Folge *genau* durch 2 teilbar, so muß das mittlere Glied $x = \xi^2$ eine Quadratzahl sein, was wegen $\xi^2 \not\equiv 2 \pmod 6$ unmöglich ist.

Sei nun $d \equiv 3 \pmod 6$: Dann ist die Folge der Reste:

$$2, -1, 2, -1, 2.$$

Die Unmöglichkeit dieses Falles folgt einfach daraus, daß das Produkt der fünf Glieder $\equiv 2 \pmod 6$ ist, und 2 kein quadratischer Rest mod 6 ist.

E) Im Falle $x \equiv 3 \pmod 6$ sei zuerst $d \equiv \pm 1 \pmod 6$. In den Restfolgen

$$1, 2, 3, -2, -1 \quad \text{bzw.} \quad -1, -2, 3, 2, 1$$

ist je ein äußeres Glied ein volles Quadrat, woraus durch die schon wiederholt benützte Schlußweise die Unmöglichkeit folgt. Der Fall $d \equiv \pm 2 \pmod 6$ mit den Restfolgen

$$-1, 1, 3, -1, 1 \quad \text{bzw.} \quad 1, -1, 3, 1, -1$$

läßt sich ebenso erledigen.

F) In den Fällen $x \equiv -2 \pmod 6$, $d \equiv \pm 1 \pmod 6$ sind die Restfolgen

$$2, 3, -2, -1, 0 \quad \text{bzw.} \quad 0, -1, -2, 3, 2.$$

Beide Fälle sind unmöglich, da -1 kein quadratischer Rest mod 6 ist.

Ist endlich $x \equiv -2 \pmod 6$, $d \equiv 3 \pmod 6$, so ergibt sich die Restfolge

$$-2,\ 1,\ -2,\ 1,\ -2.$$

Dann muß sowohl das erste als auch das letzte Glied das Doppelte einer Quadratzahl sein. Die Kongruenz

$$2x^2 \equiv -2 \pmod 6$$

ist aber offenbar unmöglich.

Damit sind alle Fälle erschöpft und Satz 1 bewiesen.

(Eingegangen am 31. Juli 1950.)