Über einparametrige Transformationen.

Von J. ACZÉL in Miskolc (Ungarn).

1. Unser Ziel ist zu untersuchen, welche Scharen von einparametrigen Transformationen die Eigenschaft haben, daß das Produkt zweier Transformationen der Schar wieder eine Transformation der Schar ist.

Ein Hilfssatz, der schon an anderer Stelle[1]) bewiesen wurde, besagt, daß jede eingliedrige streng monotone kontinuierliche Halbgruppe (mit oder ohne Einselement) isomorph zu einer additiven Halbgruppe der reellen Zahlen ist.

Daraus wird hier gefolgert werden, daß sich jede stetige, monotone, einparametrige Transformationsschar auf einen additiven Parameter beziehen läßt. Durch Einführung einer neuen Veränderlichen kann dann die auf einen additiven Parameter bezogene Transformationsschar einer Veränderlichen in eine Translationsschar überführt werden. (Übergang zur äquivalenten Halbgruppe.)[2])

Wir bezeichnen die Veränderliche, auf die sich die Transformationen der Schar beziehen, mit x, den Parameter hingegen mit u. Dann wird die einparametrige Transformationsschar durch eine Funktion $T(x,u)$ zweier Veränderlichen dargestellt. Unser Problem ist offenbar äquivalent mit der Frage nach den Lösungsfunktionen T und O der Funktionalgleichung

$$T[T(x,u_1),u_2] = T[x,O(u_1,u_2)]. \tag{1}$$

Wir setzen ein für allemal folgendes voraus:

1) Der Definitionsbereich von $T(x,u)$ ist ein Rechteck: $x \in (a,b), u \in (c,d)$.

2) Damit die Funktionalgleichung (1) immer einen Sinn hat, soll $T(x,u) \in (a,b)$ und $O(u_1,u_2) \in (c,a)$ gelten für jedes x,u,u_1,u_2.

3) $T(x,u)$ ist streng monoton in beiden Veränderlichen; der Einfachheit halber kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß sie streng monoton *wächst*.

---

[1]) J. ACZÉL, Sur les opérations définies pour nombres réels. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **76** (1948), 59—64. Vgl. auch L. E. J. BROUWER, Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie, *Math. Annalen* **67** (1909), 246—267.

[2]) Vgl. G. VRANCEANU, *Lecons de géometrie différentielle I.* (*Bucarest*, 1947), S. 77.

4) $T(x,u)$ ist stetig in der Veränderlichen x.

5) $O(u_1, u_2)$ ist stetig und streng monoton (wachsend) in beiden Veränderlichen.

2. Ich beweise den folgenden

Satz: *Die allgemeinste Lösung der Funktionalgleichung* (1) *wird bei den Bedingungen* 1)—5) *durch das Funktionenpaar*

$$O(u_1, u_2) = g^{-1}[g(u_1) + g(u_2)] \tag{2}$$

$$T(x, u) = f^{-1}[f(x) + g(u)] \tag{3}$$

angegeben, wo $f(x)$ und $g(u)$ zwei beliebige, stetige und streng monotone Funktionen sind, und f^{-1}, g^{-1} ihre inversen Funktionen bezeichnen.

Dies ist eben äquivalent mit den Behauptungen vom Abschnitt **1** über Transformationen.

Beweis: *a*) $O(u_1, u_2)$ muß assoziativ sein, d. h.

$$O[O(u_1, u_2), u_3] = O[u_1, O(u_2, u_3)]. \tag{4}$$

Da nämlich aus (1)

$$T\{x, O[u_1, O(u_2, u_3)]\} = T[T(x, u_1), O(u_2, u_3)] = \{T[T(x, u_1), u_2]\, u_3\} = \\ = T\{x\; O[O(u_1, u_2), u_3]\}$$

folgt, und da T laut 3) streng monoton ist, ergibt sich daraus die Assoziativität von $O(u_1, u_2)$.

b) Die ausführliche Formulierung des eingangs erwähnten Hilfssatzes[1]) ist:

Hilfssatz 1: *Ist die Funktion $O(u_1, u_2)$ stetig und streng monoton (wachsend) in beiden Veränderlichen und ist sie auch assoziativ d. h. sie genügt der Funktionalgleichung* (4), *so gibt es immer eine streng monotone Funktion $g(u)$ derart, daß* (2) *gilt. — Dabei ist der Wertevorrat von $g(u)$ entweder durch $(-\infty, +\infty)$ oder durch (C, ∞) mit $C \geqq O$ bestimmt.*

Dies bedeutet, daß die allgemeinste stetige, streng monotone Lösung der Funktionalgleichung (4) von der Form (2) ist

c) Setzt man $g(u) = U$ und $T[x, g^{-1}(U)] = t(x, U)$, so folgt aus (1) laut *a*) und *b*):

$$t[t(x, U_1), U_2] = t(x_1, U_1 + U_2). \tag{5}$$

Damit wurde die Transformationsschar auf einen additiven Parameter bezogen.

Zusammen mit T genügt auch t den Forderungen 1)—4), wobei jetzt sinngemäß das Intervall (c, d) für u durch $(-\infty, \infty)$ oder (C, ∞), für U und $O(u_1, u_2)$ durch $U_1 + U_2$ zu ersetzen ist.

d) Es gilt der

Hilfssatz 2: *Genügt die Funktion $t(x, U)$ den Bedingungen* 1)—4) *und der Funktionalgleichung* (5) (*Translationsgleichung*), *so gibt es eine stetige und streng monotone* (*wachsende*) *Funktion $f(x)$ derart, daß*

$$t(x, U) = f^{-1}[f(x) + U] \tag{6}$$

ist, d h. alle stetigen und streng monotonen Lösungen von (5) *sind von der Form* (6). (Übergang zur äquivalenten Translationsschar).

Da $T(x,u)=t[x,g(u)]$ ist, folgt aus (6) die Gleichung (3), womit der Beweis des Satzes vollendet ist.

3. Es bleibt nur noch der Beweis der beiden Hilfssätze übrig.

Für den Beweis des Hilfssatzes 1 verweise ich auf meine, in Fußnote[1]) angeführte Arbeit.

Beweis von Hilfssatz 2.

A) Ist $(-\infty,+\infty)$ der Definitionsbereich für U, so definieren wir die Funktion $f^{-1}(v)$ für $-\infty<v<+\infty$ durch

$$f^{-1}(v)=t(x_0,v), \tag{7}$$

wobei x_0 beliebig in (a,b) wählbar ist.

Laut 3) ist $f^{-1}(v)$ streng monoton; wir zeigen, daß diese Funktion auch stetig ist. Wäre sie nämlich z. B für $v=v_0$ unstetig, d. h. gebe es eine von ε unabhängige Zahl P derart, daß

$$f^{-1}(v_0-\varepsilon)<P<f^{-1}(v_0+\varepsilon)$$

wäre für jedes $\varepsilon>0$, dann gälte für jeden Wert von u wegen der strengen Monotonie von t

$$f^{-1}(v_0+u-\varepsilon)=t[f^{-1}(v_0-\varepsilon),u]<t(P,u)=Q<t[f^{-1}(v_0+\varepsilon),u]=f^{-1}(v_0+u+\varepsilon).$$

$f^{-1}(v_0+u-\varepsilon)<Q<f^{-1}(v_0+u+\varepsilon)$ würde aber bedeuten, daß $f^{-1}(v)$ nicht nur im Punkte $v=v_0$, sondern auch in jedem Punkte $v=v_0+u$ (mit beliebigem u) unstetig ist, was dem wohlbekannten Satz, daß eine monotone Funktion höchstens in abzählbar unendlich vielen Punkten unstetig sein kann, widerspricht. Damit ist die Stetigkeit von $f^{-1}(v)$ bewiesen.

Wir behaupten, daß der Wertevorrat der streng monotonen und stetigen Funktion $f^{-1}(v)$ durch das offene Intervall $(a\ b)$ bestimmt ist. Es gilt nämlich:

$$\lim_{v\to\infty} t(x,v)=b$$

Denn wäre dies falsch, dann müßte die wachsende und beschränkte Funktion $t(x,v)$ einen Grenzwert $B<b$ für $v\to\infty$ besitzen. Nun folgt aber für ein beliebiges $V>O$:

$$t(B,U+V)=t[\lim_{v\to\infty}(x,v),U+V]=\lim_{v\to\infty}t[t(x,v)\ U+V]=\lim_{v\to\infty}t[t(x,V+v),U]=$$
$$=t[\lim_{v\to\infty}t(x,V+v),U]=t(B,U),$$

im Gegensatz zu 3). — Entsprechend kann auch

$$\lim_{v\to-\infty}t(x,v)=a$$

bewiesen werden.

Daraus folgt nun, daß es für die Funktion (7) zu jedem x aus (a,b) ein v mit der Eigenschaft

$$x=f^{-1}(v) \qquad \text{d. h.} \qquad v=f(x)$$

gibt. Deshalb ist:

$$t(x, U) = t[f^{-1}(v), U] = t[t(x_0, v), U] = t(x_0\, v + U) = f^{-1}(v + U) =$$
$$= f^{-1}[f\, x) + U]$$

Damit ist der Fall $U \in (-\infty, \infty)$ erledigt [8])

B) Ist $U \in (C, \infty)$ mit $C \geqq O$ und ist der Intervall (a, b) (vgl. 1)) von unten geschlossen, so definieren wir für $v > C$ wieder

$$f^{-1}(v) = t(a\; v).$$

Dabei ist $f^{-1}(v)$ streng monoton und stetig und nimmt jeden Wert zwischen $\lim\limits_{v \to C} t(a, v) = A$ und $b = \lim\limits_{v \to \infty} t(a, v)$ an (vgl. *A*)). $f^{-1}(v)$ besitzt also eine stetige, streng monotone, für jedes x zwischen A und b definierte inverse Funktion $v = f(x)$. Daher gilt für jedes solche x

$$t(x, U) = t[f^{-1}(v), U] = t[t(a, v), U] = t(a, v + U) = f^{-1}[f(x) + U],$$

womit (6) für $v > C$ bewiesen ist.

Für $O \leqq v \leqq C$ definieren wir $f^{-1}(v) = x$ durch

$$t(x, 2C) = f^{-1}(v + 2C) \qquad \text{d. h.} \qquad t(x, 2C) = t(a, v + 2C).$$

Diese Definition hat immer einen Sinn und ist eindeutig, denn es gilt

$$t(a, 2C) = f^{-1}(2C) \leqq f^{-1}(2C + v) < f^{-1}(4C) = t[f^{-1}(2C), 2C],$$

und so gibt es notwendigerweise zwischen a und $f^{-1}(2C)$ (da t stetig in x ist) einen und (da t streng monoton ist) nur einen Wert x, für welchen $t(x, 2C) = f^{-1}(v + 2C)$ gilt.

Aus der Definition, sowie aus der Stetigkeit und strengen Monotonie von $f^{-1}(v)$ für $v > C$ folgt auch, daß $f^{-1}(v)$ auch für $v \leqq C$ stetig und streng monoton bleibt, also auch eine inverse Funktion der gleichen Art besitzt. — Offenbar ist $f^{-1}(0) = a$, $f^{-1}(C) = \lim\limits_{v \to C} T(a, v) = A$ und hireaus folgt, daß $f^{-1}(v)$ für $0 \leqq v \leqq C$ jeden Wert zwischen a und A durchläuft, d. h. die stetige und streng monotone Funktion $f(x)$ hat für jedes $a \leqq x \leqq A$ einen Sinn.

Schließlich wird auch für $x \leqq A$, $v \leqq C$ $(U > C)$:

$$t[t(x, U), 2C] = t(x\; U + 2C) = t[t(x\; 2C), U] = t\{f^{-1}[f(x) + 2C], U\} =$$
$$= t[f^{-1}(v + 2C), U] = f^{-1}[U + v + 2C] = t[f^{-1}(v + U), 2C] =$$
$$= t\{f^{-1}[f(x) + U], 2C\},$$

(6) gilt also auch für $0 \leqq v \leqq C$

C) Ist nebst $U \in (C, \infty)$ das Intervall (a, b) von unten offen, so wiederholen wir das obige Verfahren mit a_n statt a, wobei a_n eine beliebige monoton abnehmende Folge mit dem Grenzwert a ist. Wir definieren also

$$f_n^{-1}(v) = t(a_n, v)$$

[8]) In einer demnächst (in der *Studia Mathematica*) erscheinenden Arbeit zeigen L. Kalmár, J. Mikusinski und Verf, daß sich in diesem Spezialfalle die Forderung 4) erübrigt.

Falls in einem Intervall einerseits $t(x, U) = f^{-1}[f(x) + U]$, andererseits $t(x, U) = F^{-1}[F(x) + U]$ gelten, so gibt es notwendigerweise eine Konstante D derart, daß $F(x) = f(x) + D$ ist. Denn es folgt aus $f^{-1}[f(x) + U] = F^{-1}[F(x) + U]$ die Gleichung

$$F[f^{-1}(v + U)] = F[f^{-1}(v)] + U \qquad (v = f(x)).$$

Setz man $v = 2C$, $U = V - 2C$, so ergibt sich

$$F[f^{-1}(V)] = F[f^{-1}(2C)] + V - 2C = D + V$$

d. h.

$$F(x) = f(x) + D \qquad (x = f^{-1}(V)).$$

Dies besagt, daß die Funktion $f(x)$ durch $t(x, U)$ bis auf eine additive Konstante bestimmt ist und daher durch Angabe ihres Wertes in irgendeinem Punkte völlig eindeutig wird.

Nun definieren wir $F_n(x)$ folgenderweise:

$$F_1(x) = f_1(x) \text{ und } F_n(x) = f_n(x) - f_n(a_{n-1}) + F_{n-1}(a_{n-1})$$

(woraus $F_n(a_{n-1}) = F_{n-1}(a_{n-1})$ folgt) und setzen $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} F_n(x)$. Dann gilt (o) für jedes $x \in (a, b)$.

Hiermit ist der Beweis des Hilfssatzes 2 erbracht, wodurch der Beweis des ursprünglichen Satzes vollendet ist. — Daß die Lösungen (2), (3) bzw. (6) den Gleichungen (1) bzw. (5) in der Tat genügen, ist offenbar.

4. Wir bemerken, daß der bewiesene Satz eine Zusammenfassung und weitgehende Verallgemeinerung der beiden Hilfssätze ist, die im Satz als Spezialfälle $O = T$ bzw. $O(U_1, U_2) = U_1 + U_2$ enthalten sind.

Unser Satz kann auch derart gedeutet werden, daß die Funktionalgleichung (1) bei gegebener O betrachtet dann und nur dann eine Lösung für T zuläßt, wenn O assoziativ ist, und die allgemeine Lösung von (1) bei den gegebenen Bedingungen

$$T(x, u) = F^{-1}\{O[F(x), U]\}$$

ist. Als Beispiel betrachten wir die Funktionalgleichung[4])

$$T[T(x, u_1), u_2] = T(x, u_1 u_2).$$

Da $O(u_1, u_2) = u_1 u_2$ assoziativ ist, ergibt sich die allgemeine Lösung dieser Funktionalgleichung in der Form:

$$T(x, u) = f^{-1}[u f(x)].$$

(Eingegangen am 12. Juli 1950.)

---

[4]) Vgl. St. Gołab, Über eine Funktionalgleichung der Theorie der geometrischen Objekte, *Wiadomisci Matematyczne* (Warszawa) **45** (1938), 97–137.