Kurzer Beweis eines Satzes über die obere Schranke der absoluten Beträge von mehreren Nullstellen eines Polynoms.

Von GYULA SZ.-NAGY in Szeged.

Es gilt der

Satz 1. *Ist $q = n - p + 1$ und bezeichnet r_1 bzw. r_2 die positive Nullstelle des Polynoms*

(1) $$F_1(x) = |a_p|x^p - \binom{q}{1}|a_{p-1}|x^{p-1} - \binom{q+1}{2}|a_{p-2}|x^{p-2} - \ldots - \binom{n}{p}|a_0| \quad (a_0 a_p \neq 0)$$

bzw.

(2) $$F_2(x) = |a_n|x^n - |a_{p-1}|x^{p-1} - \binom{q}{1}|a_{p-2}| - \ldots - \binom{n-1}{p-1}\, a_0| \quad (a_0 a_n \neq 0),$$

so hat das Polynom

(3) $$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{p-1}z^{p-1} + a_p z^p + \ldots + a_n z^n$$

mindestens p Nullstellen im Kreise $|z| \leq r_1$ bzw. $|z| \leq r_2$.

Der erste bzw. zweite Teil dieses Satzes (bezüglich des Kreises vom Halbmesser r_1 und r_2) wurde zum erstenmal von E. B. VAN VLECK[1]) bzw. von P. MONTEL[2]) bewiesen. Beide Teile wurden auch von P. MONTEL[3]), R. BALLIEU, D. MARKOVIC und TH. ANGHELUTZA[4]) bewiesen. Der Satz 1 wurde von den letzten drei Verfassern[5]) für den Fall verallgemeinert, daß die $p+1$ Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ und a_{p+m} $(0 < m \leq n-p)$ gegebene Größen und die übrigen Koeffizienten von $f(z)$ Parameter sind. Diese Verallgemeinerung hat aber keine Anwendung gefunden. Aus dem Satz 1 haben MONTEL[5]) und MARKOVIC[6])

---

[1]) E. B. VAN VLECK, On limits of the obsolute values of the roots of a polynomial, *Bull. de la Soc. Math. de France* **53** (1925), 105–125.

[2]) P. MONTEL, Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynomes, *Commentarii Math. Helv.* **7** (1934–35), 178 - 200.

[3]) A a. O.

[4]) R. BALLIEU, Limitations en module et locations des zéros des polynomes, *Mémoires de la Soc. Royale des sciences de Liège* (4) **1** (1936), 85–182.

D. MARKOVIĆ, Sur la limite supérieure des modules des zéros des polynomes, *Publ. Math. Univ. Belgrade* **67** (1938), 36–47.

TH. ANGHELUTZA, Sur une limite pour les modules des zéros des polynomes, *Bull. de la Soc. Math. de France* **67** (1939), 120–131.

[5]) A. a. O.

[6]) D. MARKOVIĆ, Sur quelques limites supérieures des modules des zéros d'un polynome, *Mathematica* (Cluj) **15** (1939), 36—47.

einfachere Formeln für die obere Schranke der absoluten Beträge von p Nullstellen des Polynoms $f(z)$ abgeleitet.

Der erste Teil des Satzes 1 folgt unmittelbar aus dem

Satz 2. *Das Polynom*

$$g(z)=z^n f\left(\frac{1}{z}\right)=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\ldots+a_p z^p+\ldots+a_n \qquad (a_0 a_p \neq 0) \tag{4}$$

hat höchstens $n-p$ Nullstellen im Kreise $|z|<\varrho_1=\frac{1}{r_1}$.

Zum Beweis dieses Satzes nehmen wir an, daß die Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_{n-p}$ des Polynoms $g(z)$ im Kreise $|z| \leqq \varrho_1$ liegen und wir werden zeigen, daß das Polynom

$$\begin{aligned} G(z)=g(z):\prod_{k=1}^{n-p}(z-z_k) &\equiv a_0 z^p+b_1 z^{p-1}+b_2 z^{p-2}+\ldots+b_p= \\ &=(a_0 z^p+a_1 z^{p-1}+\ldots+a_p+a_{p+1} z^{-1}+\ldots+a_n z^{-n+p}) \cdot \prod_{k=1}^{n-p}\left(1-\frac{z_k}{z}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{5}$$

im Innern des Kreises $|z|=\varrho_1$ nicht verschwinden kann.

Ist $|z|>\varrho_1$, so gilt die konvergente Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} G(\cdot)&(a_0 z^p+a_1 z^{p-1}+\ldots+a_p+a_{p+1} z^{-1}+\ldots+a_n z^{-n+p}) \cdot \prod_{k=1}^{n-p}(1+z_k z^{-1}+z_k z^{-2}+\ldots) \\ &=(a_0 z^p+a_1 z^{p-1}+\ldots+a_p+a_{p+1} z^{-1}+\ldots+a_n z^{-n+p})(1+C_1 z^{-1}+C_2 z^{-2}+\ldots), \end{aligned} \tag{6}$$

weil $|z_k z^{-1}|<1$ ist. Dabei sind

$$\begin{gathered} C_k=\sum z_1^{h_1} z_2^{h_2} \ldots z_{n-p}^{h_{n-p}}, \\ (h_1+h_2+\ldots+h_{n-p}=k; h_j=0,1,\ldots,k; j=1,2,\ldots,n-p). \end{gathered} \tag{7}$$

Die Summe C_k besteht also aus $\binom{n-p+k-1}{k}=\binom{q+k-2}{k}$ Gliedern.

Aus (5) und (6) folgen die Identitäten

$$\begin{gathered} b_k=a_0 C_k+a_1 C_{k-1}+\ldots+a_{k-1} C_1+a_k C_0, \\ (C_0=1; k=1,2,\ldots; b_{p+1}=b_{p+2}=\ldots=0). \end{gathered} \tag{8}$$

Führt man die Bezeichnung

$$\begin{gathered} H_k(z)=C_0 z^k+C_1 z^{k-1}+\ldots+C_{k-1} z+C_k, \\ (k=1,2,\ldots,p; C_0=H_0=1) \end{gathered} \tag{9}$$

ein, so ist

$$\begin{aligned} G(z)&=a_0 H_p(z)+a_1 H_{p-1}(z)+\ldots+a_p H_0 \\ &=z[a_0 H_{p-1}(z)+a_1 H_{p-2}(z)+\ldots+a_{p-1} H_0]+b_p. \end{aligned} \tag{10}$$

$H_k(z)$ ist offenbar die Summe der Produkte, deren Faktoren je eine Kombination der q Elemente $z, z_1, \ldots, z_{n-p}$ k-ter Klasse mit Wiederholung bilden. Ist also $|z|<\varrho_1$, so gilt

$$|H_k(z)|<\binom{q+k-1}{k} \varrho_1^k \qquad (k=1,2,\ldots,p), \tag{11}$$

und deshalb

$$|G(z)| \geqq |a_p| - [|a_0 H_p(z)| + |a_1 H_{p-1}(z)| + \ldots + |a_{p-1} H_1(z)|] >$$
$$> |a_p| - \left[\binom{n}{p} |a_0| \varrho_1^p + \binom{n-1}{p-1} |a_1| \varrho_1^{p-1} + \ldots + |a_{p-1}| \varrho_1\right] \equiv - \varrho_1^p F_1(r_1) = 0.$$

Damit ist Satz 2 und folglich der erste Teil des Satzes 1 bewiesen.

Um auch den zweiten Teil des Satzes 1 zu beweisen, bemerken wir, daß aus (5) und (10)

$$G(z) = [a_0 H_{p-1}(z) + a_1 H_{p-2}(z) + \ldots + a_{p-1} H_0] + \frac{(-1)^{n-p} a_n}{z_1 z_2 \ldots z_{n-p}}$$

folgt. Liegen nun die Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_{n-p}$ des Polynoms $g(z)$ im Kreise $|z| \leqq \varrho_2 = \dfrac{1}{r_2}$ und ist $|z| < \varrho_2$, so gilt die Ungleichung

$$|G(z)| > \frac{|a_n|}{\varrho_2^{n-p}} - \varrho_2 \left[\binom{n-1}{p-1} |a_0| \varrho_2^{p-1} + \binom{n-2}{p-2} |a_1| \varrho_2^{p-2} + \ldots + \binom{q}{1} |a_{p-2}| \varrho_2 + |a_{p-1}|\right] \equiv$$
$$\equiv \varrho_2^p F_2(r_2) = 0.$$

Daraus folgt die Richtigkeit des zweiten Teiles vom Satz 2.

(Eingegangen am 4. September 1950.)