

Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen.

Von J. SZÉP in Szeged.

Bezeichne \mathfrak{G} eine endliche Gruppe mit dem Einselement E . Gilt für zwei echte Untergruppen $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$

$$(1) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K},$$

so nennen wir (1) eine (echte) Faktorisierung von \mathfrak{G} . Gibt es eine solche, so nennen wir selbst \mathfrak{G} faktorisierbar. (1) soll bedeuten, daß die Produkte HK ($H \in \mathfrak{H}, K \in \mathfrak{K}$) alle Elemente von \mathfrak{G} (mindestens einmal) darstellen. Dabei erscheint jedes Element von \mathfrak{G} genau einmal als HK dann und nur dann, wenn $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} = E$ gilt, insbesondere also gewiß dann, wenn die Ordnungen von \mathfrak{H} und \mathfrak{K} relativ prim sind. Übrigens hat (1) bekanntlich stets $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}\mathfrak{H}$ zur Folge.

In einer anderen Arbeit¹⁾ haben wir bewiesen, daß die Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ nichteinfach ist, wenn \mathfrak{H} und \mathfrak{K} Abelsch sind; sind dabei die Ordnungen dieser beiden Gruppen zueinander prim, so ist die Gruppe \mathfrak{G} auflösbar.

In dieser Arbeit werden wir zunächst den folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Ist in einer echten Faktorisierung (1) \mathfrak{H} eine p -Gruppe und \mathfrak{K} eine Gruppe mit Zentrum, so ist die Gruppe \mathfrak{G} nichteinfach.²⁾*

Mit Hilfe dieses Satzes beweisen wir dann als Hauptresultat dieser Arbeit den folgenden

Satz 2. *Ist in einer echten Faktorisierung (1) \mathfrak{H} eine p -Gruppe, \mathfrak{K} eine Abelsche Gruppe, und sind die Ordnungen von \mathfrak{H} und \mathfrak{K} relativ prim, so ist \mathfrak{G} auflösbar.*

Zum Beweis gebrauchen wir die folgenden Hilfsätze a) – c):

a) Bekanntlich ist ein Produkt $\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ zweier Untergruppen von \mathfrak{G} dann und nur dann eine Gruppe, wenn $\mathfrak{H}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\mathfrak{H}$ gilt.

¹⁾ J. SZÉP: On factorisable, not simple groups. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **13** (1950), 235–238.

²⁾ Im Spezialfalle, daß zugleich auch \mathfrak{K} eine Gruppe von Primzahlpotenzordnung ist, ist \mathfrak{G} nach einem bekannten Satz von BURNSIDE sogar auflösbar. (Siehe: A. SPEISER, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, II. Auflage (1927), S. 191, Satz 166.)

b) Wenn in einer Faktorisation (1) die Ordnungen von \mathfrak{H} , \mathfrak{K} relativ prim sind, so läßt sich jeder Normalteiler \bar{G} von G in der Form $\bar{G} = \bar{H}\bar{K}$ annehmen, wobei \bar{H} und \bar{K} Normalteiler von \mathfrak{H} bzw. \mathfrak{K} sind.³⁾

c) Hat eine Klasse (von konjugierten Elementen) in einer endlichen Gruppe die Anzahl einer Primzahlpotenz ($\neq 1$), so ist die Gruppe nichteinfach.⁴⁾

Beweis des Satzes 1. Ist $A \neq E$ ein Element des Zentrums von \mathfrak{K} , dann ist in G die Anzahl der Elemente der Klasse von A eine Potenz ($\neq 1$) von p .⁵⁾ Daher enthält die Gruppe G nach c) einen Normalteiler.

Beweis des Satzes 2. Wir nehmen an daß Satz 2 für die Gruppen kleinerer Ordnung als G schon bewiesen ist. Es genügt folgendes zu beweisen:

A) *Die Gruppe G hat einen echten Normalteiler von Primzahlindex.*

Hieraus folgt nämlich Satz 2 nach b) sofort durch Induktion.

Bezeichne nunmehr \bar{G} einen echten Normalteiler von G , dessen Existenz ja durch Satz 1 gesichert ist. A) folgt unmittelbar aus der Behauptung:

B) *Die Faktorgruppe G/\bar{G} ist auflösbar.*

Setzen wir nach b) $\bar{G} = \bar{H}\bar{K}$. Beim Beweis von B) unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle I, II:

Fall I: $\bar{H} \subset \mathfrak{H}$, $\bar{K} \subset \mathfrak{K}$.

Aus den Zerlegungen

$$\mathfrak{H} = \sum_i H_i \bar{H}, \quad \mathfrak{K} = \sum_j K_j \bar{K}$$

folgen durch Multiplikation mit \bar{K} bzw. \bar{H}

$$(2) \quad \mathfrak{H}\bar{K} = \sum_i H_i \bar{H}\bar{K}, \quad \mathfrak{K}\bar{H} = \sum_j K_j \bar{K}\bar{H}.$$

Hiernach berechnet sich:

$$(3) \quad G = \mathfrak{H}\mathfrak{K} = \mathfrak{H}\bar{K}\cdot\mathfrak{K}\bar{H} = \sum_i H_i \bar{H}\bar{K} \cdot \sum_j K_j \bar{K}\bar{H} = \sum_{i,j} H_i K_j \bar{H}\bar{K},$$

wobei berücksichtigt wurde, daß $\bar{H}\bar{K} = \bar{G}$ ein Normalteiler von G ist. Aus Anzahlbetrachtungen folgt auch, daß die Glieder der letzten Summe verschieden sind.

Auf Grund von

$$\mathfrak{H}\bar{K} = \sum_i H_i \bar{H}\bar{K} = \sum_i \bar{H}\bar{K} H_i = \sum_i \bar{K}\bar{H} H_i = \bar{K}\bar{H}$$

³⁾ J. SZÉP: On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12A** (1950), 57–61.

⁴⁾ Das ist ein anderer wohlbekannter Satz von BURNSIDE. Siehe: Speiser²⁾ S. 190, Satz 165.

⁵⁾ Diese Anzahl ist nur dann gleich 1, wenn A ein Element des Zentrums von \mathfrak{K} ist. Dann aber bedürft Satz 1 keines Beweises.

ist $\bar{H}\bar{K}$ nach a) eine Gruppe. Ebenso ist auch $\bar{K}\bar{H}$ eine Gruppe. Hieraus und aus (2) und (3) folgt dann, daß die Faktorgruppe $\mathbb{G}/\bar{\mathbb{G}}$ das Produkt der beiden Faktorgruppen $\bar{K}\bar{H}/\bar{\mathbb{G}}, \bar{H}\bar{K}/\bar{\mathbb{G}}$ ist. Von diesen beiden Faktorgruppen ist die erste (zusammen mit \bar{K}) Abelsch, die zweite (zusammen mit \bar{H}) eine p -Gruppe. Auch sind die Ordnungen zueinander prim. Demnach folgt die Richtigkeit von B) in diesem Fall aus unserer Induktionsannahme.

Fall II: $\bar{H} = \mathbb{H}, \bar{K} \subset \mathbb{K}$ oder $\bar{H} \subset \mathbb{H}, \bar{K} = \mathbb{K}$.

Jetzt ist die Faktorgruppe $\mathbb{G}/\bar{H}\bar{K}$ Abelsch bzw. eine p -Gruppe, also in beiden Fällen auflösbar, womit der Beweis von B) und zugleich auch der von Satz 2 beendet ist.

(Eingegangen am 27. November 1950.)