Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen.

Von J. SZÉP in Szeged.

Bezeichne $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe mit dem Einselement E. Gilt für zwei echte Untergruppen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}, \tag{1}$$

so nennen wir (1) eine (echte) Faktorisation von $\mathfrak{G}$. Gibt es eine solche, so nennen wir selbst $\mathfrak{G}$ *faktorisierbar.* (1) soll bedeuten, daß die Produkte HK ($H \in \mathfrak{H}, K \in \mathfrak{K}$) alle Elemente von $\mathfrak{G}$ (mindestens einmal) darstellen. Dabei erscheint jedes Element von $\mathfrak{G}$ genau einmal als HK dann und nur dann, wenn $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} = E$ gilt, insbesondere also gewiß dann, wenn die Ordnungen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ relativ prim sind. Übrigens hat (1) bekanntlich stets $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}\mathfrak{H}$ zur Folge.

In einer anderen Arbeit[1]) haben wir bewiesen, daß die Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ nichteinfach ist, wenn $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ Abelsch sind; sind dabei die Ordnungen dieser beiden Gruppen zueinander prim, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ auflösbar.

In dieser Arbeit werden wir zunächts den folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Ist in einer echten Faktorisation* (1) $\mathfrak{H}$ *eine p-Gruppe und* $\mathfrak{K}$ *eine Gruppe mit Zentrum, so ist die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *nichteifach.*[2])

Mit Hilfe dieses Satzes beweisen wir dann als Hauptresultat dieser Arbeit den folgenden

Satz 2. *Ist in einer echten Faktorisation* (1) $\mathfrak{H}$ *eine p-Gruppe,* $\mathfrak{K}$ *eine Abelsche Gruppe, und sind die Ordnungen von* $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{K}$ *relativ prim, so ist* $\mathfrak{G}$ *auflösbar.*

Zum Beweis gebrauchen wir die folgenden Hilfsätze $a)-c)$:

$a)$ Bekanntlich ist ein Produkt $\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ zweier Untergruppen von $\mathfrak{G}$ dann und nur dann eine Gruppe, wenn $\mathfrak{H}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\mathfrak{H}$ gilt.

---

[1]) J. SZÉP: On factorisable, not simple groups. *Acta Sci. Math. (Szeged),* **13** (1950), 235—238.

[2]) Im Spezialfalle, daß zugleich auch $\mathfrak{K}$ eine Gruppe von Primzahlpotenzordnung ist, ist $\mathfrak{G}$ nach einem bekannten Satz von BURNSIDE sogar auflösbar. (Siehe: A. SPEISER, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, II. Auflage (1927), S. 191, satz 166.

b) Wenn in einer Faktorisation (1) die Ordnungen von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ relativ prim sind, so läßt sich jeder Normalteiler $\bar{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ in der Form $\bar{\mathfrak{G}}=\bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}}$ annehmen, wobei $\bar{\mathfrak{H}}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$ Normalteiler von $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{K}$ sind.[3])

c) Hat eine Klasse (von konjugierten Elementen) in einer endlichen Gruppe die Anzahl einer Primzahlpotenz ($\neq 1$), so ist die Gruppe nichteinfach.[4])

Beweis des Satzes 1. Ist $A\neq E$ ein Element des Zentrums von $\mathfrak{K}$, dann ist in $\mathfrak{G}$ die Anzahl der Elemente der Klasse von A eine Potenz ($\neq 1$) von p.[5]) Daher enthält die Gruppe $\mathfrak{G}$ nach *c*) einen Normalteiler.

Beweis des Satzes 2. Wir nehmen an daß Satz 2 für die Gruppen kleinerer Ordnung als $\mathfrak{G}$ schon bewiesen ist. Es genügt folgendes zu bewiesen:

A) *Die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *hat einen echten Normalteiler von Primzahlindex.*

Hieraus folgt nämlich Satz 2 nach *b*) sofort durch Induktion.

Bezeichne nunmehr $\bar{\mathfrak{G}}$ einen echten Normalteiler von $\mathfrak{G}$, dessen Existenz ja durch Satz 1 gesichert ist. *A*) folgt unmittelbar aus der Behauptung:

B) *Die Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\bar{\mathfrak{G}}$ *ist auflösbar.*

Setzen wir nach *b*) $\bar{\mathfrak{G}}=\bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}}$. Beim Beweis von *B*) unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle I, II:

Fall I: $\bar{\mathfrak{H}}\subset\mathfrak{H}$, $\bar{\mathfrak{K}}\subset\mathfrak{K}$.

Aus den Zerlegungen

$$\mathfrak{H}=\sum_i H_i\bar{\mathfrak{H}}.\quad \mathfrak{K}=\sum_j K_j\bar{\mathfrak{K}}$$

folgen durch Multiplikation mit $\bar{\mathfrak{K}}$ bzw. $\bar{\mathfrak{H}}$

$$\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{K}}=\sum_i H_i\bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}},\ \mathfrak{K}\bar{\mathfrak{H}}=\sum_j K_j\bar{\mathfrak{K}}\bar{\mathfrak{H}}. \tag{2}$$

Hiernach berechnet sich:

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\mathfrak{K}=\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{K}}\cdot\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{H}}=\sum_i H_i\bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}}\cdot\sum_j K_j\bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}}=\sum_{i,j}H_iK_j\bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}}, \tag{3}$$

wobei berücksichtigt wurde, daß $\bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}}=\bar{\mathfrak{G}}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Aus Anzahlbetrachtungen folgt auch, daß die Glieder der letzten Summe verschieden sind.

Auf Grund von

$$\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{K}}=\sum_i H_i\bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}}=\sum_i\bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}}H_i=\sum_i\bar{\mathfrak{K}}\bar{\mathfrak{H}}H_i=\bar{\mathfrak{K}}\mathfrak{H}$$

---

[3]) J. Szép: On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups, *Acta Sci. Math. Szeged,* **12A** (1950), 57—61.

[4]) Das ist ein anderer wohlbekannter Satz von Burnside. Siehe: Speiser[2]) S. 190, Satz 165.

[5]) Diese Anzahl ist nur dann gleich 1, wenn A ein Element des Zentrums *von* $\mathfrak{G}$ ist. Dann aber bedürft Satz 1 keines Beweises.

ist $\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{K}}$ nach *a*) eine Gruppe. Ebenso ist auch $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{H}}$ eine Gruppe. Hieraus und aus (2) und (3) folgt dann, daß die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\bar{\mathfrak{G}}$ das Produkt der beiden Faktorgruppen $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{H}}/\bar{\mathfrak{G}}, \mathfrak{H}\bar{\mathfrak{K}}/\bar{\mathfrak{G}}$ ist. Von diesen beiden Faktorgruppen ist die erste (zusammen mit $\mathfrak{K}$) Abelsch, die zweite (zusammen mit $\mathfrak{H}$) eine p-Gruppe. Auch sind die Ordnungen zueinander prim. Demnach folgt die Richtigkeit von *B*) in diesem Fall aus unserer Induktionsannahme.

Fall II: $\bar{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}, \bar{\mathfrak{K}} \subset \mathfrak{K}$ oder $\bar{\mathfrak{H}} \subset \mathfrak{H}, \bar{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}$.

Jetzt ist die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}}$ Abelsch bzw. eine p-Gruppe, also in beiden Fällen auflösbar, womit der Beweis von *B* und zugleich auch der von Satz 2 beendet ist.

(Eingegangen am 27. November 1950.)

On positive definite quadratic forms.

By L. S. GODDARD Aberdeen (Scotland).

The well known necessary and sufficient condition for a quadratic form to be positive definite has been proved recently by three authors, Á. CSÁSZÁR [1], T. SZELE [2] and E. EGERVÁRY [3]. In this note another proof is given. This involves only the elementary theory of matrices, and is the shortest of all four proofs.

Consider the quadratic form, $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$, where $\mathbf{x}$ is the column-vector $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathbf{x}'$ is the transpose of $\mathbf{x}$, that is the row vector $(x_1, \ldots, x_n)$, and A is a symmetric matrix of order n over the real field. Denote by A_r the matrix consisting of the elements of A in the first r rows and first r columns, $(A_0 = 1)$, and by $|A|$ the determinant of A.

Lemma 1: *If $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$ is positive definite, the matrix A is non-singular.*

This follows from the fact that if A is singular there exists a non-zero vector, $\mathbf{c}$, such that $A\mathbf{c} = 0$. Then $\mathbf{c}'A\mathbf{c} = 0$, and $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$ is therefore not positive definite.

Lemma 2: *If $|A_i| \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ there exists a unit lower triangular matrix, L, of the form*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \ldots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

such that

$$A = L'DL,$$

where

$$D = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_n \end{pmatrix}$$

and $\delta_i = |A_i| / |A_{i-1}|$.

This lemma may be verified by direct computation. A proof has been outlined by TURING [4], p. 289.

We now have the

Theorem: *The necessary and sufficient condition that* $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$ *be positive definite is that*

$$|A_i| > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Proof: *Sufficiency.* Since $|A_i| > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ we have, by lemma 2,

$$A = L'DL.$$

Now

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x} = (\mathbf{x}'L')\,D(L\mathbf{x}) = \mathbf{y}'D\mathbf{y} = \delta_1 y_1^2 + \delta_2 y_2^2 + \cdots + \delta_n y_n^2,$$

where

$$\mathbf{y} = L\mathbf{x} = \{y_1, \ldots, y_n\}.$$

Since $\delta_1, \ldots, \delta_n$ are all positive, $\mathbf{y}'D\mathbf{y}$ and therefore $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$ is positive definite,

Necessity. Let $\mathbf{x}_r = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Since $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$ is positive definite it follows, by considering the vector $\{x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0\}$, that $\mathbf{x}_r'A_r\mathbf{x}_r$ is positive definite. Hence, by lemma 1, $|A_r| \neq 0$. This is true for $r = 1, \ldots, n$. Thus, by lemma 2. $A = L'DL$, and, as before,

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x} = \delta_1 y_1^2 + \cdots + \delta_n y_n^2 = \mathbf{y}'D\mathbf{y},$$

where $\mathbf{y} = L\mathbf{x}$. But $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$, and hence $\mathbf{y}'D\mathbf{y}$, is positive definite. Hence $\delta_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. and thus

$$|A_i| > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

References.

[1] Á. Császár, Sur les formes quadratiques positives, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **1** (1950), 186—188.

[2] T. Szele, Über die Klassifikation der quadratischen Formen, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **1** (1950), 189—192.

[3] E. Egerváry, Eine Bemerkung über definite quadratische Formen, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **1** (1950), 193—195.

[4] A. M. Turing, Rounding- off erros in matrix processes, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **1** (1948), 287—308.

(Received January 2, 1951.)