Bemerkung zu einer Arbeit von L. Kalmár.

Von OTTÓ STEINFELD in Szeged.

Herr Professor L. KALMÁR hat mir im Zusammenhang mit einer neulich erschienenen Arbeit[1]) vom Ihm eine Vermutung (s. unten) mitgeteilt, die ich hier beweisen werde.

Gegeben sei ein archimedisch angeordneter Körper K. Bezeichne $\mathbf{B}$ den Ring der beschränkten (unendlichen) Folgen, $\mathbf{C}$ den der Cauchyschen Folgen[2]) und $\mathbf{N}$ den der Nullfolgen mit Elementen aus K. Summe und Produkt zweier Folgen werden in gewöhnlicher Weise (durch gliedweise Addieren und Multiplizieren) definiert. Bekanntlich ist $\mathbf{N}$ ein Ideal in $\mathbf{B}$ und zugleich ein maximales Ideal in $\mathbf{C}$.

Die erwähnte Vermutung lautet: $\mathbf{C}$ ist ein maximaler Ring in $\mathbf{B}$[3]) mit der Eigenschaft, daß $\mathbf{N}$ ein maximales Ideal in ihm ist. Dies kommt nach bekanntem Satz darauf hinaus, daß der Ring $\mathbf{B}/\mathbf{N}$ keine echte Körpererweiterung des Körpers $\mathbf{C}/\mathbf{N}$ enthält. Die Vermutung bestätigen wir durch den Beweis vom folgenden

Satz: *Ist* $\mathbf{D}$ *ein Ring mit* $\mathbf{C}\subset\mathbf{D}\subseteqq\mathbf{B}$, *so ist* $\mathbf{D}/\mathbf{N}$ *kein Körper*[4]).

Dem Beweis schicken wir folgende triviale Bemerkung voraus: Ist $\mathbf{e}=(e_1, e_2, \dots)\,\overline{\in}\,\mathbf{C}$, so ist auch $(\overbrace{e_1,\dots,e_1}^{l_1}, \overbrace{e_2,\dots,e_2}^{l_2},\dots)\in\mathbf{C}$, wobei l_i $(i=1,2,\dots)$ beliebige natürliche Zahlen sind.

Wir brauchen nur zu zeigen, daß der Ring $\mathbf{D}$ eine Folge $\mathbf{d}\,\overline{\in}\,\mathbf{N}$ mit unendlich vielen verschwindenden Gliedern enthält. Dann hat nämlich jede

---

1) L. KALMÁR, Über die Cantorsche Theorie der reellen Zahlen, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **1** (1950), 150–159.

2) Vgl. die zwei äquivalenten Definitionen der Cauchyschen Fo'gen in 1) und in der Arbeit von L. KALMÁR, On Chauchy's convergence test, *Acta Math. Hung.* **1** (1950), 109–112.

3) Ein Beispiel für Ringe zwischen $\mathbf{C}$ und $\mathbf{B}$ liefert der Unterring von $\mathbf{B}$ bestehend aus den beschränkten Folgen mit endlich vielen Häufungspunkten.

4) Insbesondere für $\mathbf{D}=\mathbf{B}$ folgt das schon aus der Tatsache, daß die die Folgen $\mathbf{e}'=(1,0,1,0,\dots)$, $\mathbf{e}''=(0,1,0,1,\dots)$ enthaltenden Restklassen mod $\mathbf{N}$ zwei komplementäre Nullteiler in $\mathbf{B}/\mathbf{N}$ sind.

Produktfolge $\mathbf{dx}\,(\mathbf{x} \in \mathbf{D})$ auch unendlich viele verschwindende Glieder, folglich ist die Kongruenz $\mathbf{dx} \equiv \mathbf{e} = (1, 1, 1, \ldots) \pmod{\mathbf{N}}$ unlösbar, also $\mathbf{D}/\mathbf{N}$ in der Tat kein Körper.

Bezeichne $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots) \bar{\in} \mathbf{C}$ eine Folge in $\mathbf{D}$. Nach dem Satz von BOLZANO—WEIERSTRASS (der offenbar in allen archimedisch angeordneten Körpern gültig ist) gibt es eine Teilfolge $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots)$ von $\mathbf{a}$, die eine Cauchysche Folge ist. Nach obiger Bemerkung läßt sich dann leicht eine Cauchysche Folge $\mathbf{a}'$ von der Eigenschaft angeben, daß $\mathbf{a}'$ mit $\mathbf{a}$ in unendlich vielen Stellen übereinstimmt. Die Folge $\mathbf{a}'$ besteht aus den Gliedern:

$$a_m = a_{i_j} \quad \text{für} \quad i_{j-1} < m \leq i_j; \quad j = 1, 2, \ldots; \; i_0 = 0$$

Wir setzen $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{a}'$. Dann ist $\mathbf{d}$ wegen $\mathbf{a} \in \mathbf{D}$, $\mathbf{a}' \in \mathbf{C}\,(\subset \mathbf{D})$ eine Folge in $\mathbf{D}$. Andererseits liegt $\mathbf{d}$ wegen $\mathbf{a} \bar{\in} \mathbf{C}$, $\mathbf{a}' \in \mathbf{C}$ außerhalb des Ringes $\mathbf{C}$, also erst recht außerhalb des Ringes $\mathbf{N}$. Dabei hat $\mathbf{d}$ nach obigem unendlich viele verschwindende Glieder. Das beendet den Beweis des Satzes.

Für die gefällige Hilfe in der Abfassung dieser Arbeit spreche ich meinen Dank Herrn Professor L. Rédei aus.

(Eingegangen am 3. Januar 1951.)