Über das Newtonsche Verfahren zur Annäherung von Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Von BÉLA BARNA in Debrecen.

Einleitung.

Eine, auch praktisch wichtige Methode der Annäherung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung ist die NEWTONsche Methode Bekanntlich besteht sie darin, daß man ausgehend von dem Näherungswert x_1 der Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0$$

durch Anwendung der Funktion

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

die Folge

$$x_{n+1} = N(x_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

bildet. Wenn die Folge konvergiert, so hat sie als Grenzwert eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Beachtet man die Ergebnisse der Iterationstheorie, so kann man dies einfach ableiten. Wenn nämlich $f(x)$ wenigstens zweimal differenzierbar und $f''(x)$ stetig ist, so fällt jede Wurzel der Gleichung mit einem der „Fixpunkte" der Funktion $N(x)$ — der iterativen „Grundfunktion" — zusammen, wie dies aus der Gleichung

$$x - N(x = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

folgt, und jeder dieser Fixpunkte ist „anziehend" (attraktiv)[1]), weil

$$N'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$$

den Wert 0 hat, wenn $f(x) = 0$ ist. Es folgt also, daß der Grenzwert einer konvergenten Folge (x_n) mit einer der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ identisch ist, weiterhin, daß wir für einen angenäherten Wert einer gewissen

---

[1]) Die für uns nötigen Grundbegriffe der Iterationstheorie findet man z. B. in der Arbeit[2]) von A. RÉNYI.

Wurzel jede Zahl x_1 wählen können, die sich in einer Umgebung der betreffenden Wurzel befindet, wo $|N'(x)| < 1$ gilt.

Eine anregende Untersuchung des aus dem beliebigen Punkt x ausgehenden NEWTONschen Algorithmus, wo *auch der Fall der Divergenz in Betracht gezogen wird,* befindet sich in einer Arbeit[2]) von Herrn A. RÉNYI. Insbesondere wird in der erwähnten Arbeit der NEWTONsche Algorithmus für Polynome $f(x)$ mit genau drei reellen einfachen Nullstellen und monoton wachsendem $f''(x)$ ausführlich behandelt. Ein Anfangspunkt, dessen Iterationsfolge nicht zu einer Wurzel führt, wird von RÉNYI als ein *singulärer Punkt* bezeichnet. Über singuläre Punkte gewinnt RÉNYI folgenden merkwürdigen Satz: *Ist $\varkappa$ ein singulärer Punkt, so gilt enweder $\varkappa_m = \infty$ für eine natürliche Zahl m* (singulärer Punkt „erster Art"), *oder es ist $\varkappa = \varkappa_2$* (singulärer Punkt „zweiter Art"). *Es gibt immer genau zwei singuläre Punkte zweiter Art.* Die singulären Punkte erster Art bilden zwei beschränkte unendliche Punktfolgen, die zwei Häufungspunkte — die beiden singulären Punkte zweiter Art — haben. So ist die Menge der singulären Punkte *abzählbar unendlich.* Eine, aus einem nicht-singulären Punkte ausgehende Iterationsfolge führt immer zu einer Wurzel. Am Ende seiner Arbeit wirft RÉNYI zwei interessante Probleme auf:

1. Das beliebige Polynom $f(x)$ soll nur reelle Nullstellen haben; ist dann die Menge der singulären Punkte immer abzählbar?

2. Gibt es Polynome mit reellen Nullstellen, bei denen die Menge der singulären Punkte ein Intervall enthält?

Die folgenden Betrachtungen stehen mit diesen Fragen in engem Zusammenhang. Wir werden uns hier mit dem NEWTONschen Algorithmus in dem Fall gewisser Polynome vierten Grades beschäftigen.

§ 1.

Wir setzen im Folgenden voraus, daß $f(x)$ *ein reelles Polynom mit vier verschiedenen reellen Nullstellen ist.* Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Funktion $f(x)$ nur ein Maximum besitzt, das sie an der Stelle $x = b = 0$ annimmt. Die Nullstellen des Polynoms $f(x)$ seien $\bar{\xi} < \xi < \eta < \bar{\eta}$, die der Ableitung $a < b < c$.

Der aus dem beliebigen $x = x_0$ ausgehende Newtonsche Algorithmus besteht in der Iteration der Grundfunktion

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

[2]) A. RÉNYI, A Newton-féle gyökközelítő eljárásról. (On Newton's method of approximation.) *Mat. Lapok.* **1.** (1950), 278—293. — Wir erwähnen aus den Ergebnissen dieser Arbeit nur die einschlägigen Resultate; was die anderen, mit der Näherungsmethode verknüpften Fragen (z. B. Konvergenzkriterien) betrifft, weisen wir auf die Abhandlung selbst hin.

Die dadurch erhaltene Folge

$$x_{n+1} = N(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist die *Iterationsfolge* von x_0. Im Folgenden verwenden wir noch die gebräuchlichen Bezeichnungen

$$N_0(x) = x,\ N_1(x) = N(x), \ldots,\ N_{n+1}(x) = N[N_n(x)].$$

Diejenigen Wurzeln der Gleichung

$$N_k(x) - x = 0,$$

die keine der Gleichungen

$$N_l(x) - x = 0 \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

befriedigen, nennen wir *Fixpunkte k-ter Ordnung*. Die in der Einleitung erwähnten Fixpunkte sind in diesem Sinne *Fixpunkte erster Ordnung*. Wenn $\varkappa$ ein Fixpunkt k-ter Ordnung ist, dann sind $\varkappa_0 = \varkappa,\ \varkappa_1, \ldots,\ \varkappa_{k-1}$ k verschiedene Fixpunkte k-ter Ordnung und sie bestimmen einen *k-gliedrigen Zyklus*. Die zu demselben Zyklus gehörigen Fixpunkte nennen wir *konjugierte Fixpunkte*.

Wir wollen jetzt den Begriff der *inversen Iteration* erklären. Bezeichne $N_{-1}(x)$ die (im allgemeinen mehrdeutige) inverse Funktion von $N(x)$. Dann sind die Punkte

$$x_{-n-1} = N_{-1}(x_{-n}) \qquad (n = 0, 1\ 2, \ldots)$$

die *invers-iterierten* Punkte von $x = x_0$. Im folgenden verstehen wir unter *Iteration* schlechthin immer die Iteration *mit positiven Indexen*. Diese, wie auch die inverse Iteration ist im Fall des NEWTONschen Verfahren sehr anschaulich (Figur 1):

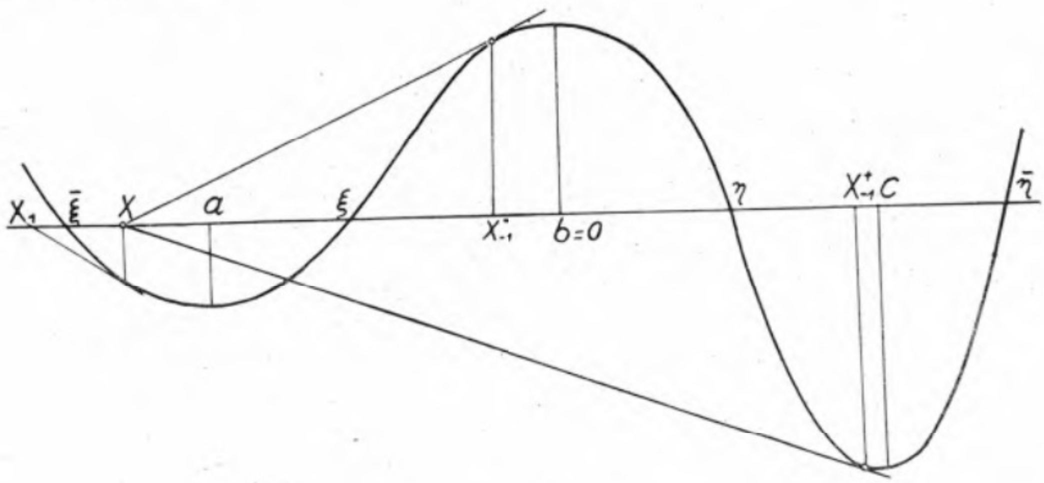

Fig. 1.

Bei der *Iteration* schneidet die Tangente der Kurve $f(x)$ mit dem Berührungspunkt $[x, f(x)]$ die x-Achse in dem Punkt x_1. Bei der *inversen*

Iteration ziehen wir aus dem Punkt x die Tangente an die Kurve $f(x)$: die Abszissen der Berührungspunkte sind die x_{-1}-Werte.

Wegen der Annahmen, die wir bezüglich der Funktion $f(x)$ gemacht haben, ist die Funktion $N_{-1}(x)$ wenigstens zweiwertig, stellenweise dreiwertig.[3]) Für $x < \bar{\xi}$ und $x > \bar{\eta}$ hat sie aber vier Werte. Die Funktion

$$N_{-2}(x) = N_{-1}[N_{-1}(x)]$$

ist also wenigstens vierwertig, u. s. w. Wenn der Punkt x in einem Intervall liegt, wo die Funktion $N_{-1}(x)$ zweideutig ist — *was in den späteren Betrachtungen immer zur Geltung kommen wird* — so haben die eindeutigen Zweige dieser Funktion, wegen $b = 0$, verschiedene Vorzeichen, und sie werden denselben entsprechend mit

$$x_{-1}^{+} = N_{-1}^{+}(x) \quad \text{und} \quad x_{-1}^{-} = N_{-1}^{-}(x)$$

bezeichnet. Die inverse Iterationsfolge (x_{-n}), bei der *nur eine der Funktionen* N_{-1}^{+} *und* N_{-1}^{-} *angewandt wird,* nennen wir *positive,* bzw. *negative* inverse Iterationsfolge.

Es werde ferner eine k-gliedrige Vorzeichenfolge $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ (ε_i bedeutet das Zeichen $+$ oder $-$) *Grundperiode* genannt, wenn sie nicht nur aus lauter $+$ oder $-$ besteht. Wenden wir nun bei dem m-ten inversen Iterationsschritt für $m = 1, 2, \ldots, k$ die Funktion $N_{-1}^{\varepsilon_m}(x)$ an, und widerholen wir nach dem k-ten inversen Iterationsschritt dieses Verfahren periodisch! Die so erhaltene Folge wird dann als *periodische inverse Iterationsfolge* bezeichnet.

Der Punkt x_0 ist ein *Konvergenzpunkt,* wenn ihre Iterationsfolge konvergiert; im entgegengesetzten Fall nennen wir ihn *Divergenzpunkt.* Die iterierten Punkte und die invers-iterierten Punkte eines Punktes x_0 haben offensichtlich denselben Konvergenzcharakter. *Konvergenz-* und *Divergenzintervalle* sind Intervalle, die nur Konvergenz-, bzw. Divergenzpunkte enthalten.

Wir wissen schon, daß jede genügend kleine Umgebung der Wurzeln ein Konvergenzintervall ist. Unser nächstes Ziel ist zu untersuchen, wieweit diese Intervalle verlängert werden können.

Es ist leicht einzusehen, daß die Endpunkte der Konvergenzintervallen in den Umgebungen der Wurzeln $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ die Punkte $-\infty$, a, bzw. b, $+\infty$ sind.

Die Untersuchung der Konvergenzintervalle der beiden anderen Wurzeln ξ und η kann wie folgt geschehen. Wir wählen einen beliebigen Punkt x in der Umgebung von ξ, für den $|N'(x)| < 1$ ist, und der nicht auf derselben Seite von ξ liegt, wie die Abszisse i des Inflexionspunktes. Bilden wir die

---

[3]) Dies trifft in genügend kleinen einseitigen Umgebungen der Wurseln ξ und η zu, wenn diese keine Inflexionspunkte sind. (Z. B. in der Figur 1 rechts von ξ bis zum Schnittpunkt der Inflexionstangente und der x-Achse.)

negative inverse Iterationsfolge von x, dann befinden sich

$$x, x_{-2}, x_{-4}, \ldots \quad \text{bzw.} \quad x_{-1}, x_{-3}, x_{-5}, \ldots$$

auf entgegengesetzten Seiten des Punktes ξ, und bilden je eine von ξ sich monoton entfernende[4]) Punktfolge zwischen a und b. (Figur 2.) Die Grenzwerte seien α und β, mit $\alpha < \xi < \beta$. Man sieht leicht, daß α und β von der Wahl von x unabhängig und jeder Punkt zwischen α und β ein Konver-

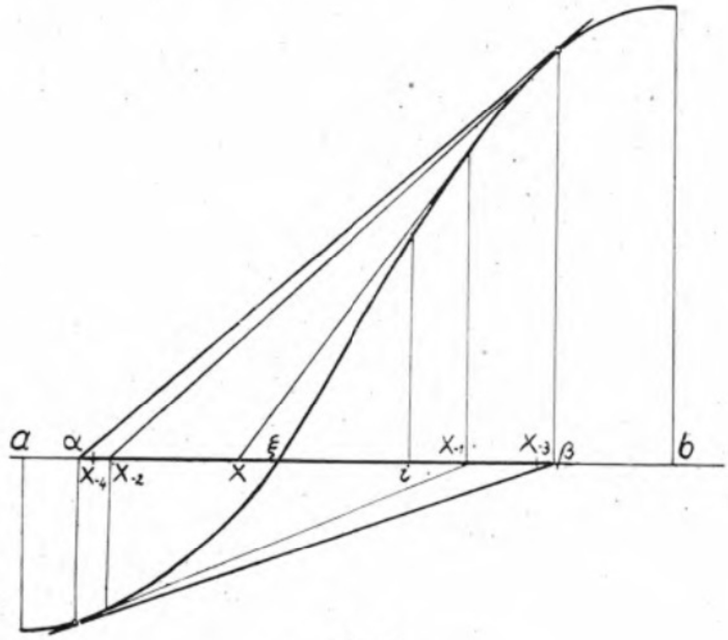

Fig. 2.

genzpunkt ist. Aus der Stetigkeit der Funktion $N(x)$ in dem Intervall (α, β) folgert man weiterhin durch die Gleichungen

$$\lim_{n \to \infty} x_{-2n+2} = \lim N(x_{-2n+1}) = N(\lim x_{-2n+1}),$$

daß *α und β konjugierte Fixpunkte zweiter Ordnung sind.* Wir gewinnen durch ein ähnliches Verfahren die Endpunkte γ und δ des Konvergenzintervalls der Wurzel η, die gleichfalls konjugiert sind. (Figur 3.)

Die so entstehenden vier Intervalle $(-\infty, a)$, (α, β), (γ, δ), und $(c, +\infty)$ bezeichnen wir als *die unmittelbaren Konvergenzintervalle*. Die Endpunkte dieser Intervalle sind natürlich Divergenzpunkte.

§ 2.

Wir können noch *weitere Divergenzpunkte* durch das folgende Verfahren erhalten. Wir gehen von den Punkten a und c aus, und bilden wir die invers-iterierten Folgen mit den Grundperioden $(-+)$ bzw. $(+-)$. Es gilt

[4]) Dies folgt aus der Monotonität der Funktion in den Intervallen (a, ξ) und (i, b).

dann für die gewonnenen Punkte die Anordnung:

$$a < c_{-1} < a_{-2} < c_{-3} < \ldots < \xi,$$
$$c > a_{-1} > c_{-2} > a_{-3} > \ldots > \eta,$$

woraus die Existenz der Grenzwerte

$$\lim a_{-2n} = \lim c_{-2n+1} = \lambda \text{ und } \lim a_{-2n-1} = \lim c_{-2n} = \mu$$

folgt. Es ist leicht zu beweisen, daß $\lambda_1 = \mu$, $\mu_1 = \lambda$ ist und daß die offenen Intervalle

$$(a, c_{-1}),\ (c_{-1}, a_{-2}),\ (a_{-2}, c_{-3}), \ldots,$$
$$(c, a_{-1})\ (a_{-1}, c_{-2}),\ (c_{-2}, a_{-3}), \ldots$$

Konvergenzintervalle sind; man kommt nämlich aus jedem dieser Intervalle durch Iteration in das unmittelbare Konvergenzintervall von $\bar{\xi}$ oder $\bar{\eta}$. Es sind also in den Intervallen (a, λ) und (μ, c) alle Divergenzpunkte gewisse invers-iterierte Punkte von a und c, die gemeinsamen Endpunkte von Konvergenzintervallen, also *isolierte* Divergenzpunkte sind. Diese Punkte bilden zwei abzählbare Mengen in den Intervallen (a, λ) und (μ, c), weshalb die beiden Intervalle *punktierte Konvergenzintervalle* genannt werden können.

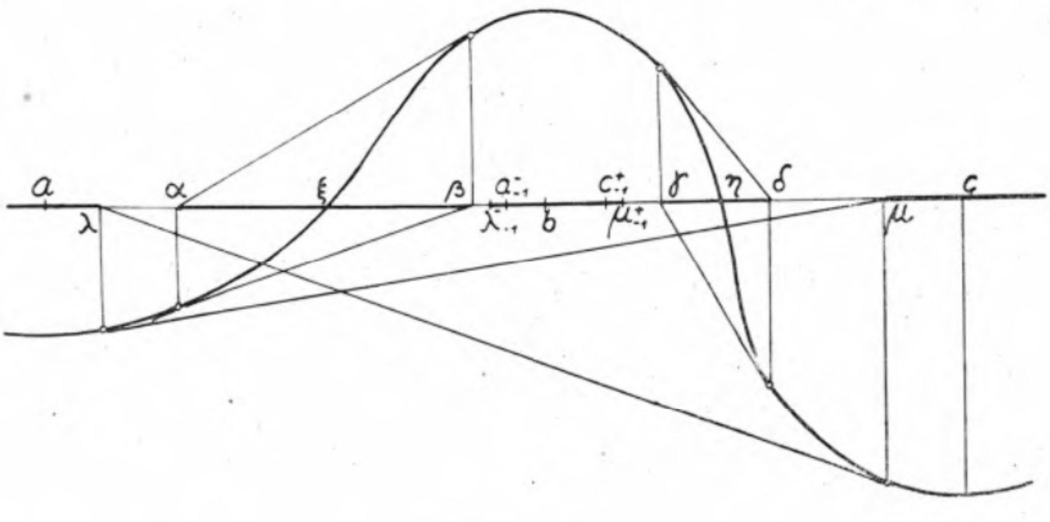

Fig. 3.

Wir werden unter dem *iterierten Intervall* eines beliebigen Intervalls dasjenige zwischen den iterierten Punkten der Endpunkte verstehen; in ähnlichem Sinne sprechen wir über das *inverse Iterieren von Interva len*, wobei die invers-iterierten Punkte der beiden Endpunkte *nach derselben Vorschrift* gebildet werden. Man gewinnt damit eine Methode zum Aufsuchen neuerer punktierten Konvergenzintervallen. So ergeben sich unmittelbar durch die *negati e* und *positive* inverse Iteration der Intervalle (a, λ), bzw. $(\mu, c$ die punktierten Konvergenzintervalle $(\lambda^{-}_{-1}, a^{-}_{-1})$ und $(c^{+}_{-1}, \mu^{+}_{-1})$. Die dazwischenliegenden Intervalle (a_{-1}^{-}, b) und $(b, c_{-1}^{\pm})$ sind Konvergenzintervalle, weil die ersten iterierten Intervalle $(-\infty, a)$, bzw. $(c, +\infty)$ sind. Der Punkt b ist also auch ein isolierter Divergenzpunkt. Die isolierte Divergenzpunkte werden wir *Divergenzpunkte erster Art* nennen.

Durch die angegebenen Verfahren ist der größte Teil der x-Achse ermittelt; es bleiben noch die vier Intervalle (λ, α), $(\beta, \lambda_{-1}^{-})$, $(\mu_{-1}^{\pm}, \gamma)$ und (δ, μ) übrig, die wir als *Ergänzungsintervalle* bezeichnen. Zum Aufsuchen der Konvergenzpunkte in diesen Intervallen besitzen wir eine verläßliche Methode. Es gibt nämlich für jedes Konvergenzintervall Δx einen Iterationsindex l so, daß $(\Delta x)_l$ mit einem der unmittelbaren Konvergenzintervalle identisch ist. Umgekehrt, *erhalten wir durch inverse Iteration der unmittelbaren Konvergenzintervalle auch alle übrigen Konvergenzintervalle.* Vor der Ausführung dieses Verfahrens müssen wir eine später zur Anwendung kommende Eigenschaft der Grundfunktion kennen lernen.

§ 3.

Wir beweisen nun den folgenden

Satz: *Für jeden, außerhalb der unmittelbaren Konvergenzintervalle liegenden Punkt x gilt* $|N'(x)| > 1$.

Zum Beweis benötigen wir drei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es sei $F(u)$ ein reelles Polynom vierten Grades mit den Eigenschaften:*

B_1. $F(\infty) = +\infty$.

B_2. $F(0) = 1$, $F(-1) = -p$, $p > 0$; $F'(0) = 1$, $F'(-1) = p$.

B_3. *Es gibt zwei Zahlen, σ und $\bar{\sigma}$, für die $F(\sigma) = F(\bar{\sigma}) = 0$, $0 < \sigma < \bar{\sigma}$ gelten.*

Dann sind die vier Nullstellen des Polynoms

$$G(u) = (2u + 1)F'(u) - F(u)$$

reell, und drei von ihnen liegen in dem Intervall $-1 \leq u \leq 0$.

Beweis: Nach B_2 ist

$$G(0) = F'(0) - F(0) = 0, \quad G(-1) = -F'(-1) - F(-1) = 0.$$

Es gibt aber auch eine dritte reelle Nullstelle. Wegen B_1 und B_3 gelten nämlich die Ungleichungen

$$F(\sigma) < 0, \quad F'(\bar{\sigma}) > 0,$$

sodaß

$$G(\sigma) = (2\sigma + 1)F'(\sigma) < 0, \quad G(\bar{\sigma}) = (2\bar{\sigma} + 1)F'(\bar{\sigma}) > 0$$

bestehen. Folglich hat das Polynom $G(u)$ in dem Intervall $(\sigma, \bar{\sigma})$ eine reelle Nullstelle von ungerader Ordnung. Diese kann aber nur einfache Nullstelle sein, und so folgt die Existenz der vierten reellen Nullstelle.

Wir wollen noch zeigen, daß diese sich in dem Intervall $-1 < u < 0$ befindet.

Es folgt aus den Bedingungen B_1-B_3, daß $F(u)$ die Form

$$F(u) = Au^4 + (2A - p - 1)u^3 + (A - 2p - 1)u^2 + u + 1$$

hat, wo $A > 0$, $p > 0$ gilt, und daher

$$G(u) = 7Au^4 + (14A - 5p - 5)u^3 + (9A - 9p - 6)u^2 + (2A - 4p - 1)u$$

ist. Hier ist $G'(-1) = -(2A + p + 4) < 0$, woraus folgt, daß die vierte Wurzel nicht links von -1 liegen kann. Es ist weiter $G'(0) = 2A - 4p - 1$. Ist $G'(0) \leqq 0$, so gibt es nur eine positive Wurzel, also liegt die vierte Wurzel in dem Intervall $(-1, 0)$. Wäre noch $G'(0) > 0$, d. h. $A > 2p + \frac{1}{2}$, so würden für $u > 0$ die Relationen

$$F(u) > \left(2p + \frac{1}{2}\right)u^4 + 3pu^3 - \frac{1}{2}u^2 + u + 1 >$$

$$> \frac{1}{2}u^4 - \frac{1}{2}u^2 + u + 1 = (u+1)\left(1 + \frac{1}{2}(u-1)u^2\right)$$

gelten, also wäre $F(u) > 0$, was den Voraussetzungen widerspricht. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Transformieren wir jetzt unser ursprüngliches Polynom $f(x)$ durch die Substitution

$$x = (\beta - \alpha)u + \beta,$$

und sei

$$F(u) = \frac{f(x)}{f(\beta)}.$$

Diese Funktion genügt den Bedingungen B_1-B_3 im Hilfssatz 1. Es gilt nämlich $F(\infty) = f(\infty) = +\infty$. Weiterhin sind

$$F(0) = 1,\ F(-1) = \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = -p,\ p > 0,$$

und durch Differenzieren von $F(u)$ folgen aus

$$F'(u) = \frac{1}{f(\beta)} \cdot \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = \frac{f'(x)}{f(\beta)}(\beta - \alpha)$$

wegen

$$\alpha = \beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \text{ und } \beta = \alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

die Gleichungen

$$F'(0) = \frac{f'(\beta)}{f(\beta)}(\beta - \alpha) = 1,\ F'(-1) = \frac{f'(\alpha)}{f(\beta)}(\beta - \alpha) = -\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = p.$$

Schließlich ist

$$F\left(\frac{\eta - \beta}{\beta - \alpha}\right) = \frac{f(\eta)}{f(\beta)} = 0,\ F\left(\frac{\bar{\eta} - \beta}{\beta - \alpha}\right) = \frac{f(\bar{\eta})}{f(\beta)} = 0,$$

d. h. gilt wegen $0<\beta-\alpha$ und $0<\eta-\beta<\bar{\eta}-\beta$ auch B_3 mit

$$0<\sigma=\frac{\eta-\beta}{\beta-\alpha}<\frac{\bar{\eta}-\beta}{\beta-\alpha}=\bar{\sigma}.$$

Auf Grund von Hilssatz 1 folgt jetzt, daß die Gleichung

$$(2x-\alpha-\beta)f'(x)-f(x)=0$$

vier verschiedene reelle Wurzeln hat, und drei von diesen in dem Intervall $\alpha\leqq x\leqq\beta$ liegen. Durch Anwendung der Transformation

$$-x=(\gamma-\delta)u+\gamma$$

stellt man in ähnlicher Weise fest, daß sich Hilfssatz 1 auch auf das Polynom $F(u)=\frac{f(-x)}{f(\gamma)}$ anwenden läßt, und so folgt, daß drei der vier reellen Wurzel der Gleichung

$$(2x-\gamma-\delta)f'(x)-f(x=0$$

in dem Intervall $\gamma\leqq x\leqq\delta$ liegen.

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$N(x)+x-(\gamma+\delta)=0$$

und bemerkt man, daß die hier auf der linken Seite stehende Funktion im Intervall (γ,δ) differenzierbar ist, so folgt, daß $N'(x)$ zwischen α und β zweimal den Wert -1 annimmt; dasselbe gilt auch in dem Intervall (γ, δ). Diese Ergebnisse fassen wir zusammen im

Hilfssatz 2. *Die Ableitung der Grundfunktion $N(x)$ nimmt den Wert -1 in den Intervallen (α, β) und (γ, δ) je zweimal an.*

Wir benötigen noch den

Hilfssatz 3. *Die Ableitung der Grundfunktion nimmt den Wert -1 in den Intervallen (a,ξ), (ξ, b), (b,η) und (η, c) je einmal an*

Beweis: Das Polynom 7-ter Ordnung $f(x).f'(x)$ hat die Nullstellen $\bar{\xi}, a, \xi, b, \eta, c, \bar{\eta}$, und zwischen zwei aufeinanderfolgenden dieser Punkte besitzt es genau ein Extremum. Es hat also in jedem der genannten Intervalle die Gleichung.

$$[f(x).f'(x)]'=0$$

eine und nur eine Wurzel, woraus auf Grund der Identität

$$[f(x).f'(x)]'=f(x).f''(x)+f'^2(x)=f'^2(x)[N'(x)+1]$$

die Richtigkeit des Hilfssatzes 3 folgt, wenn man noch bemerkt, daß im Inneren dieser Intervalle $f'(x)\neq 0$ gilt.

Die Gleichung $N'(x)=-1$ hat nach diesem Hilfssatz zwischen b und c zwei verschiedene Wurzeln, die aber zufolge des Hilfssatzes 2 in dem Teil (γ,δ) des Intervalls (b, c) liegen. In den Intervallen (b,γ) und (δ, c) kann also die Funktion $N'(x)$ den Wert -1 nicht annehmen. Dies ist, wegen der Stetigkeit der Funktion und

$$\lim_{x \to b+0} N'(x) = \lim_{x \to c-0} N'(x) = -\infty$$

gleichbedeutend damit, daß in den beiden Intervallen $N'(x) < -1$ ist. Dieselbe Ungleichung gilt auch in den Intervallen (a, α) und (β, b). Wir haben damit den Beweis unseres Satzes beendet.

§ 4.

Mann kann nach diesen Resultaten einfach beweisen, daß *es nur die bekannten drei Zyklen von zweiter Ordnung gibt.*

Wenn nämlich z. B. zwischen den Punkten λ und α der Punkt $\varkappa$ ein Fixpunkt zweiter Ordnung wäre, so könnte sich $\varkappa_1$ nicht im Intervall $(\lambda_{-1}^{-}, \mu_{-1}^{+})$ befinden, weil hier, mit Ausnahme des Punktes b, nur solche Divergenzpunkte liegen, welche aus a und c durch inverse Iteration entstanden sind, also keine Fixpunkte sein können. Der Punkt $\varkappa_1$ aber kann auch nicht im Intervall (μ_{-1}^{+}, γ) liegen, denn sonst wäre $\varkappa_2 > \delta > \varkappa$ im Gegensatz zur Annahme $\varkappa = \varkappa_2$. Es kann also $\varkappa_1$ nur in einem der beiden Intervalle $(\beta, \lambda_{-1}^{-})$ und (δ, μ) liegen. Iterieren wir entsprechend den zwei Fällen das Intervall $(\varkappa, \alpha)$, bzw. $(\lambda, \varkappa)$, so müßte das zweite iterierte Intervall mit dem Anfangsintervall identisch sein. Dies ist aber unmöglich, weil in den iterierten Intervallen unser Satz (§ 3) gilt, und so (nach dem LAGRANGEschen Mittelwertsatz) die Intervalle bei der Iteration verlängert werden könnten.

Mit gleicher Methode beweisen wir jetzt, daß *es kein Divergenzintervall gibt.*

Wäre nämlich ein solches Intervall Δx vorhanden, so könnte dies zusammen mit seinen iterierten Intervallen $(\Delta x)_n$ nur in den Ergänzungsintervallen liegen. Hier gilt aber nach unserem Satz die Ungleichung $|N'(x)| > 1$ und die Funktion $N'(x)$ ist in diesen abgeschlossenen Intervallen stetig. Es gibt also eine Zahl q mit

$$|N'(x)| \geqq q > 1.$$

Somit ergäbe sich für die Länge der iterierten Intervalle

$$|(\Delta x)_n| \geqq q^n |\Delta x|$$

d. h. $|(\Delta x)_n| \to \infty$, was unmöglich ist.

Wir wollen jetzt noch die Ergänzungsintervalle untersuchen. Bemerken wir zuerst, daß *die Endpunkte dieser Intervalle keine isolierten Divergenzpunkte sind.* Für λ und μ folgt dies aus dem Verfahren, wodurch diese Punkte bestimmt wurden: λ und μ sind nämlich *Häufungspunkte von Divergenzpunkten* erster Art. Die Behauptung ist aber auch für die anderen Fixpunkte zweiter Ordnung leicht beweisbar. Wenn wir z. B. die invers-iterierten Punkte von b mit der Funktion N_{-1}^{-} bilden, so hat diese Punktfolge die Häufungspunkte α und β. Ferner kann man leicht sehen, daß *jeder invers-*

iterierte Punkt eines nicht-isolierten Divergenzpunktes auch ein Punkt solcher Art ist.

Bezeichnen wir einfachheitshalber die Intervalle (α, β) und (γ, δ) mit $\Delta\xi$ bzw. $\Delta\eta$ und das Intervall $(\lambda_{-1}^{-}, \mu_{-1}^{+})$ mit Δb. Die Endpunkte sind nicht zu den Intervallpunkten zu zählen. Bilden wir jetzt die invers-iterierten Intervalle von $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$, so bekommen wir nur zwei neue Konvergenzintervalle, weil

$$(\Delta\xi)_{-1}^{-} \equiv \Delta\xi, \quad (\Delta\eta)_{-1}^{+} \equiv \Delta\eta$$

gelten. Durch die inverse Iteration der Intervalle $(\Delta\xi)_{-1}^{+}$ und $(\Delta\eta)_{-1}^{-}$ erhalten wir aber vier verschiedene neue Konvergenzintervalle, und die Anzahl der neuen Konvergenzintervalle wächst mit dieser Multiplizität weiter. Die so erhaltenen Intervalle $(\Delta\xi)_{-n}$ und $(\Delta\eta)_{-n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ liegen in den Ergänzungsintervallen, und haben die Eigenschaft alle Konvergenzpunkte zu enthalten, deren Iterationsfolge zu der Wurzel ξ oder η führt. Mit dem Herausnehmen dieser Intervalle aus den Ergänzungsintervallen nimmt man also alle, zu diesen Punkten führende Konvergenzpunkte heraus. Ebenso verfahren wir mit den Intervallen $(\Delta b)_{-n}$: nimmt man diese heraus, so fallen dadurch die zu den Wurzeln ξ und η führenden Konvergenzpunkte und alle isolierten Divergenzpunkte aus den Ergänzungsintervallen heraus. Die in dem ganzen Intervall (λ, μ) zurückbleibenden Divergenzpunkte bilden also einen Teil der Menge der Divergenzpunkte, welcher keinen Divergenzpunkt erster Art enthält.

Die Prüfung dieser Menge wird durch die folgenden Betrachtungen vorbereitet.

Es ist zu bemerken, daß die Intervalle $(\Delta\xi)_{-n}$, $(\Delta\eta)_{-n}$ und $(\Delta b)_{-n}$ keinen gemeinsamen inneren Punkt haben. Aus der entgegengesetzten Annahme folgt nämlich, daß im Inneren eines (eventuell punktierten) Konvergenzintervalls wenigstens eine der Endpunkte eines anderen solchen Intervalls fallen würde. Dies ist aber unmöglich, weil die Endpunkte keine Konvergenzpunkte, oder isolierte Divergenzpunkte sind, wie wir soeben gesehen haben. Die Unmöglichkeit des Zusammenfallens zweier solcher Intervalle folgt weiter daraus, daß die herausgenommenen Intervalle keine gemeinsame Endpunkte haben können. Bezeichnen wir mit $R(x)$ die Menge aller invers-iterierten Punkte von x. So sind die Elemente von $R(\alpha_{-1}^{+})$ voneinander und von α verschieden. Die beiden ersten invers iterierten Punkte von α_{-1}^{+} sind voneinander verschieden; sie haben nämlich entgegengesetzte Vorzeichen. Nehmen wir nun an, daß die Punkte $(\alpha_{-1}^{+})_{-n}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ verschieden sind. Wir zeigen, daß das mit den Punkten $(\alpha_{-1}^{+})_{-k}$ erweiterte System nur voneinander verschiedene Elemente enthält. Hätte nämlich die Folge der k-ten invers-iterierten Punkte zwei identische Punkte, wäre also z. B.

$$(\alpha_{-1}^{+})_{-k} = (\alpha_{-1}^{+})'_{-k}$$

so folgt durch Iterieren

$$(\alpha_{-1}^{+})_{-k+1} = (\alpha_{-1}^{+})'_{-k+1},$$

im Gegensatz mit der Annahme. Bestände ferner

$$(\alpha_{-1}^{+})_{-k} = (\alpha_{-1}^{+})_{-k+l}$$

für eine Zahl l der Folge $1, 2, 3, \ldots, k-1$, so ergäbe sich hieraus durch k-maliges Iterieren

$$\alpha_{-1}^{+} = (\alpha_{-1}^{+})_l.$$

Folglich wäre α_{-1}^{+} ein Fixpunkt l-ter Ordnung. Das ist aber wegen

$$(\alpha_{-1}^{+})_l = \begin{cases} \alpha \text{ für ungerades } l, \\ \beta \text{ für gerades } l \end{cases}$$

unmöglich Die Anwendung der vollständigen Induktion führt jetzt auf die Behauptung, daß die Menge $R(\alpha_{-1}^{+})$ nur voneinander verschiedene Elemente besitzt. Ergäbe sich noch ein invers-iterierter Punkt, für den

$$(\alpha_{-1}^{+})_{-k} = \alpha$$

gilt, so hätten wir die Gleichung $\alpha_{-1}^{+} = \alpha_k$, deren Unmöglichkeit wir soeben festgestellt haben. Derselbe Gedankengang läßt sich auch auf die Mengen $R(\beta_{-1}^{+})$, $R(\gamma_{-1}^{-})$, u. s. w. anwenden. Daß $R(\alpha_{-1}^{+})$ und $R(\beta_{-1}^{+})$ fremde Mengen sind, ist auch einfach zu beweisen: aus einer Gleichung

$$(\beta_{-1}^{+})_{-k-l} = (\alpha_{-1}^{+})_{-k}$$

folgt durch Iteration

$$(\beta_{-1}^{+}) = (\alpha_{-1}^{+})_l = \begin{cases} \alpha_{-1}^{+} & \text{für } l = 0 \\ \alpha & \text{für ungerades } l, \\ \beta & \text{für gerades } l > 0, \end{cases}$$

wo aber, wegen

$$\alpha < \beta < 0 < \beta_{-1}^{+} < \alpha_{-1}^{+}$$

alle drei Fälle unmöglich sind. Wir können auch leicht beweisen, daß die invers-iterierten Punkte der nicht-konjugierten Fixpunkte auch voneinander verschiedene Zahlen representieren.

Wir wollen jetzt alle diese Teilergebnisse folgendermaßen zusammenfassen und weiterführen: Die Intervalle $(\Delta\xi)_{-n}$, $(\Delta\eta)_{-n}$ und $(\Delta b)_{-n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sind offene Intervalle, die getrennt liegen und auch paarweise ohne gemeinsame Endpunkte sind. Wenn also diese Intervalle aus dem abgeschlossenen Intervall (λ, μ) herausgenommen werden, so ist die Restmenge perfekt. Damit ist gezeigt, daß *die Menge der Divergenzpunkte nicht abzählbar unendlich ist.*

§ 5.

Wir sind nunmehr in der Lage die Divergenzpunkte auf Grund ihren Iterationsfolgen klassifizieren zu können.

I. Die Iterationsfolgen von Divergenzpunkten erster Art enthalten — wie wir gesehen haben — nur endlich viele Punkte.

II. Eine andere Art von Divergenzpunkten bilden die Fixpunkte zweiter Ordnung und alle ihre invers-iterierten Punkte. Diese Punkte haben die Eigenschaft, daß jede ihrer Iterationsfolgen beschränkt ist und nur endlich viele verschiedene Elemente hat. *Es gibt aber noch andere Punkte mit dieser Eigenschaft.* Wir zeigen nämlich, daß *Fixpunkte jeder beliebigen Ordnung k existieren.* Bilden wir die invers-iterierten Intervalle z. B. des Intervalls (δ, μ) mit der k-gliedrigen Grundperiode $(- - \cdots - +)$. So ist es leicht zu beweisen, daß die Intervalle $(\delta, \mu)_{-nk}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ in dem Anfangsintervall (δ, μ) liegen, und daß der (einzige) Häufungspunkt der Punkten δ_{-nk} und μ_{-nk} ein Fixpunkt k-ter Ordnung ist.

Durch eine, auf die k-gliedrigen Grundperioden bezogene kombinatorische Methode kann man die Anzahl der Zyklen k-ter Ordnung bestimmen[5]).

Wir nennen die Fixpunkte höherer Ordnung und deren invers-iterierte Punkte *Divergenzpunkte zweiter Art.* Die Menge aller diesen Punkte ist abzählbar unendlich, denn jeder Fixpunkt ist eine Wurzel irgendeiner Gleichung $N_k(x) \doteq x$ und besitzt nur eine abzählbare Menge von invers-iterierten Pukten.

III. Die Menge der Divergenzpunkte erster und zweiter Art ist also abzählbar unendlich, und so gibt es gemäß dem Ergebniß des vorigen § *Divergenzpunkte, die nicht Elemente dieser Menge sind.* Diese Punkte sollen als *Divergenzpunkte dritter Art* bezeichnet werden. Sie haben beschränkte Iterationsfolgen, die unendlich viele verschiedene Elemente enthalten. Wir können aber noch mehr behaupten: *Die Iterationsfolge eines jeden Divergenzpunktes dritter Art hat unendlich viele Häufungspunkte.* Es kann nämlich einfach bewiesen werden, daß, falls eine solche Iterationsfolge nur endlieh viele, etwa k Häufungspunkte hätte, so wären diese Häufungspunkte anziehende oder indifferente Fixpunkte k-ter Ordnung. In den Ergänzungsintervallen — wo diese Punkte liegen können — gibt es aber, wegen des Satzes in § 3., nur „abstossende“ (repulsive) Fixpunkte. Die Häufungspunkte der von einem beliebigen Divergenzpunkt ausgehenden, nicht-periodischen inversen Iterationsfolge sind offensichtlich Divergenzpunkte dritter Art.

Es ist uns bisher nicht gelungen, die Frage zu entscheiden, ob die Menge der Divergenzpunkte eine Nullmenge ist, oder nicht.

---

[5]) Eine solche Schlußfolge führt z. B. darauf, daß sich für die Anzahl der Zyklen 3-ter Ordnung 2, die der 4-ter, 5-ter und 6-ter Ordnung der Reihe nach 3, 6, bzw. 9 ergibt. Ist k eine ungerade Primzahl, so ist die Anzahl der Zyklen k-ter Ordnung $(2^k-2)/k$. Im Fall einer zusammengesetzten Ordnungszahl gibt eine verwickeltere rekursive Formel die Anzahl der Zyklen.

Endlich wollen wir noch auf die von Herrn Rényi gestellten zwei Fragen zurückkommen. Auf die erste Frage können wir eine bestimmte Antwort geben: *im Falle von Polynomen vierten Grades, die vier verschiedene reelle Nullstellen haben, ist die Menge der Punkte, deren Iterationsfolge nicht zu einer Nullstelle führt, nicht abzählbar unendlich.* Zur zweiten Frage können wir nur soviel sagen, daß *es in dem erwähnten Fall kein Divergenzintervall gibt*[6]).

Es ist noch bemerkenswert, daß es doch Gleichungen $f(x)=0$ mit Divergenzintervall gibt, *wenn man von dem Polynomcharakter der Funktion* $f(x)$ *absieht*. Eine solche Gleichung ist z. B.

$$\sqrt{|x|}=0.$$

Hier ist — den Nullpunkt ausgenommen — jeder Punkt ein Fixpunkt zweiter Ordnung, denn es gilt $N(x)=-x$.

(Eingegangen am 22. November 1950.)

[6]) Wir vermuten, daß auch im Fal'e eines *beliebegen* reellen Polynoms *kein* Divergenzintervall existiert.