Über relativ zyklische Körper vom Primzahlgrade.

Von PÉTER DÉNES in Budapest.

Es bezeichne k einen algebraischen Zahlkörper und K einen relativ zyklischen Körper in Bezug auf k vom Relativgrad l, wo l eine Primzahl ist. Die Substitutionen der zyklischen Relativgruppe sind $1, S, S^2, \ldots, S^{l-1}$. Die Substitutionen werden durch die KRONECKER-HILBERTsche symbolische Potenz[1]) bezeichnet. Eine von der Hauptklasse verschiedene Idealklasse des Körpers K wird ambig genannt, wenn ihre symbolische $(S-1)$-te Potenz die Hauptklasse ist. Bezüglich dieser Zahlkörper k, K gilt der folgende

Satz. *Ist die Klassenzahl des Körpers k zu l prim und gibt es keine ambige Idealklasse in K, so ist die Klassenzahl des Körpers K ebenfalls zu l prim.*

Zum Beweis[2]) betrachten wir eine Idealklasse A im Körper K, deren l-te Potenz die Hauptklasse ist:

(1) $$A^l = 1.$$

Es genügt zu zeigen, daß notwendig $A = 1$ gilt. Wir setzen

$$\varphi(S) = 1 + S + S^2 + \ldots + S^{l-1}.$$

Die symbolische Potenz $\varphi\, S$ eines Ideals von K ist seine Relativnorm bezüglich des Körpers k, folglich gilt

$$A^{\varphi(S)} = c,$$

wobei c eine Idealklasse im Körper k ist. Da zufolge (1)

$$A^{l \cdot \varphi(S)} = 1$$

gilt, ist

$$c^l = 1,$$

und da ferner die Klassenzahl von k zu l prim vorausgesetzt wurde, ist auch

$$c = 1,$$

---

[1]) D. HILBERT, Zahlbericht, 1897, S. 271.

[2]) Ich spreche Herrn Professor L. RÉDEI meinen besten Dank aus für seine wertvollen Bemerkungen, welche eine einfachere und kürzere Darstellung meines Beweises ermöglichten.

womit sich

$$A^{\varphi(S)} = 1 \tag{2}$$

ergibt.

Nun gilt

$$\varphi^{(S)} \equiv (S-1)^{l-1} \pmod{l}.$$

Hiernach folgt aus (1) und (2)

$$A^{(S-1)^{l-1}} = 1.$$

Da es aber in K keine ambige Klasse gibt, so ergibt sich nacheinander

$$A^{(S-1)^{l-2}} = 1, \ldots, A^{S-1} = 1, \; A = 1,$$

womit der Satz bewiesen ist.

(Eingegangen am 7. Dezember 1950.)