Translationsinvariante, additive und stetige Eibereichfunktionale.

Von H. HADWIGER in Bern.

Einleitung.

Das Ziel der vorliegenden Note besteht darin, eine vollständige Charakterisierung der translationsinvarianten, additiven und stetigen Funktionale über der Klasse der Eibereiche der euklidischen Ebene zu geben. Es wird sich zeigen, daß die Struktur dieser Funktionale durch die drei angeführten Eigenschaften bereits weitgehend vorbestimmt ist, und in der Darstellungsformel für das allgemeinste Funktional dieser Art läßt sich das Gemeinsame erkennen, das die verschiedenartigsten Spezialfälle miteinander verbindet. Das Hauptergebnis unserer Untersuchungen ermöglicht es, eine Reihe älterer und auch neuer Formeln der Maßgeometrie der Eibereiche in methodisch einheitlicher Weise zu gewinnen [1]; insbesondere lassen sich die wichtigsten Formeln und Sätze der ebenen auf die Translationsgruppe bezogenen Integralgeometrie konvexer Bereiche ableiten [2]. Die entsprechenden Ergebnisse der auf die Bewegungsgruppe bezogenen ebenen Integralgeometrie [3]) ergeben sich aus den vorstehend erwähnten durch eine weitere Drehintegration.

Unsere Entwicklung schließt direkt an eine Arbeit des Verf. [4]) an. Um das für Eipolygone dort gewonnene Ergebnis nach dem Approximationsverfahren auf beliebige Eibereiche übertragen zu können, ist es erforderlich, die Beschränktheit durch die Forderung der Stetigkeit zu ersetzen.

---

[1]) Um den Umfang der vorliegenden Abhandlung nicht durch an sich bekannte Formeln und Sätze zu vergrößern, wurde auf die Durchführung charakteristischer Anwendungen unserer Theoreme verzichtet.

[2]) Vgl. hierzu: W. BLASCHSKE, Integralgeometrie **21**. Über Schiebungen. *Math. Zeitschrift* **42** (1936), 399—410. — L. BERWALD und O. VARGA, Integralgeometrie **24**. Über die Schiebungen im Raum. *Math. Zeitschrift* **42** (1936), 710—736.

[3]) W. BLASCHKE, Vorlesungen über Integralgeometrie. 1. Heft, 2. Aufl. Leipzig und Berlin, 1936.

[4]) H. HADWIGER, Über beschränkte additive Funktionale konvexer Polygone. *Publ. Math. (Debrecen)* **1** (1949—50), 104—108.

§ 1. Problemlage.

Es sei $\varphi(A)$ ein für alle Eibereiche (beschränkte, abgeschlossene und konvexe Bereiche) A der Ebene eindeutig definiertes Funktional. Punkte und Strecken sind als uneigentliche Eibereiche in die Betrachtung miteingeschlossen. Die Funktionale, auf die sich unsere Untersuchung erstrecken soll, haben drei Forderungen zu erfüllen, nämlich:

$$\text{(I)} \qquad \varphi(A)=\varphi(A') \qquad \text{für } A \simeq A',$$

d. h. translationsgleiche Eibereiche A und A' (geschrieben $A \simeq A'$) weisen den nämlichen Funktionalwert auf. Ein solches Funktional nennen wir *translationsinvariant.*

$$\text{(II)} \qquad \varphi(A)+\varphi(B)=\varphi(A+B)+\varphi(AB),$$

falls der Eibereich $A+B$ durch eine Sehne $S=AB$ in die beiden Teileibereiche A und B zerlegt ist. Die Durchschnittsstrecke AB ist hierbei als uneigentlicher Eibereich aufzufassen. Ein solches Funktional heißt *additiv.*

$$\text{(III)} \qquad \varphi(A^n)\to\varphi(A) \quad \text{falls} \quad A^n \to A \qquad (n\to\infty).$$

Die Konvergenz einer Eibereichfolge A^n gegen einen Grenzeibereich A basiert auf der bekannten Metrik $d(A,B)=\inf\varrho \quad (A_\varrho \supseteq B, B_\varrho \supseteq A)$, wobei A_ϱ den äußeren Parallelbereich von A im Abstand ϱ bedeutet. Ein solches Funktional nennen wir *stetig.* Alle Funktionale, die in dieser Arbeit in Betracht gezogen werden, sollen die Postulate (I) und (II) erfüllen; es handelt sich somit ausschließlich um translationsinvariante und additive Funktionale. Um Wiederholungen zu vermeiden, wird dies indessen in der Regel nicht besonders gesagt. Dagegen sind an Stelle des Postulats (III) noch einige Varianten in Erwägung zu ziehen. So lassen sich auch beschränkte oder monotone Funktionale neben den stetigen unterscheiden. Einige gegenseitige Beziehungen werden noch einläßlicher untersucht. Das Hauptproblem aber, mit dem sich unsere Arbeit auseinandersetzen wird, bezieht sich auf die Frage nach dem allgemeinsten Funktional, das den Forderungen (I), (II) und (III) genügt. Die Funktionale dieser Art, also die translationsinvarianten, additiven und stetigen Funktionale, bilden offenbar eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$. Wie läßt sich nun $\mathfrak{M}$ charakterisieren? Gibt es eine einfache allgemeine Formel, welche alle zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Funktionale darzustellen vermag?

§ 2. Beschränkte Funktionale.

Für ein Eibereichfunktional $\varphi(A)$ gelte

$$\text{(IV)} \qquad |\varphi(A)| \leqq M \qquad (A \subseteq K),$$

wobei K einen festen Einheitskreisbereich, A einen beliebigen Teileibereich von K und M eine nur von φ, nicht aber von A abhängige positive Schrankzahl bedeute. Ein solches Funktional heißt *beschränkt.* Die Gesamtheit aller translationsinvarianten, additiven und beschränkten Funktionale, die also den Forderungen (I), (II) und (IV) genügen, bildet eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$. Offenbar ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{N}$, denn es gilt die folgende

1. Aussage: *Ein stetiges Funktional $\varphi(A)$ ist beschränkt.*

In der Tat: Wäre etwa $\varphi(A)$ ein stetiges nicht beschränktes Funktional, so könnte man eine unendliche Folge $\{A_n\}$ von Teileibereichen A_n des Einheitskreises K, also $A_n \subseteq K$ so angeben, daß $|\varphi(A_n)| > p_n$ ausfallen würde, wobei $p_n \to \infty$ gilt. Im Hinblick auf den bekannten Auswahlsatz bedeutet es keine Beschränkung, hierbei die Konvergenz $A_n \to A$ anzunehmen. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $\varphi(A)$ müßte aber jetzt $\varphi(A_n) \to \varphi(A)$ gelten; dies ist widerspruchsvoll, da nach Konstruktion ja $\varphi(A_n) \to \infty$ zu gelten hat.

Nachfolgend betrachten wir besonders Eipolygone P. Ein Eipolygon P kann (abgesehen von der translativen Lage in der Ebene) durch die Längen s_i der im positiven Umlaufssinn numerierten Randstrecken und die Winkel ξ_i, welche die in den entsprechenden Randstrecken nach außen hin errichteten Normalen mit der positiven x-Achse eines kartesischen Kreuzes bilden, eindeutig festgelegt werden. Im Sinne dieser Charakterisierung schreiben wir gelegentlich $P \equiv [s_1, \ldots, s_n; \xi_1, \ldots, \xi_n]$.

Nach dem Hauptergebnis der Arbeit [4]) gelangt man zu der folgenden

2. Aussage: *Ist $\varphi(A)$ ein beschränktes Funktional, so gilt für Eipolygone P eine Darstellung der Form*

$$\varphi(P) = \alpha + L_\beta(P) + \gamma F(P),$$

wobei α und γ zwei nicht von P abhängige Konstanten bedeuten, $L_\beta(P) = \sum_1^n s_i \beta(\xi_i)$ ist, wo $\beta(\xi)$ eine beschränkte periodische Winkelfunktion, die auch nicht von P abhängt, bezeichnet und endlich $F(P)$ den Flächeninhalt von P darstellt.

§ 3. Stetige Funktionale.

Es sei $\varphi(A)$ ein stetiges Funktional, das also die Forderung (III) erfüllt. Einen beliebigen Eibereich A können wir (abgesehen von der translativen Lage in der Ebene) durch die Angabe des Winkels ξ, den die nach außen hin errichtete Normale mit der positiven x-Achse einschließt (im positiven Sinn gemessen) charakterisieren, wobei wir uns ξ etwa als Funktion der Kurvenlänge s des Randes von A denken wollen. In diesem Sinne schreiben wir $A \equiv [\xi = \xi(s)]$. Die Kurvenlänge s ist im positiven Umlaufssinn von einem festen Ausgangspunkte an zu messen.

Das Hauptziel der vorliegenden Untersuchungen besteht, wie bereits in der Einleitung erwähnt, darin, für die stetigen translationsinvarianten und additiven Funktionale $\varphi(A)$ eine vollständige Charakterisierung zu geben. Dieses Ziel wird erreicht durch die folgende

3. Aussage: *$\varphi(A)$ ist dann und nur dann ein stetiges Funktional, wenn eine Darstellung der Form*

$$\varphi(A) = \alpha + L_\beta(A) + \gamma F(A)$$

gilt, wobei α und γ zwei nicht von A abhängige Konstanten bedeuten und $L_\beta(A) = \int \beta(\xi) ds$ ist, wo $\beta(\xi)$ eine stetige periodische Winkelfunktion bezeichnet, die ebenfalls nicht von A abhängt, und endlich $F(A)$ den Flächeninhalt von A darstellt. Die Integration erstreckt sich über den Rand von A.

Mit etwas anderen Worten läßt sich unser Ergebnis in der folgenden Weise zusammenfassen:

1. Charakterisierung. *Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ der translationsinvarianten, additiven und stetigen Eibereichfunktionale ist identisch mit der durch den Ansatz $\varphi(A) = \alpha + L_\beta(A) + \gamma F(A)$ gegebenen linearen Schar; α und γ bezeichnen zwei willkürliche Konstanten, β eine stetige periodische Winkelfunktion und $L_\beta(A)$ bedeutet das oben erwähnte Randintegral und $F(A)$ den Flächeninhalt von A.*

Wir beweisen jetzt die vorstehenden Behauptungen:

A) Es sei $\varphi(A) = \alpha + L_\beta(A) + \gamma F(A)$ und $\beta(\xi)$ eine stetige periodische Winkelfunktion, sodaß $\beta(\xi + 2\pi) = \beta(\xi)$ ist. Es ist zu zeigen, daß $\varphi(A)$ stetig ist (Behauptung „dann"). Translationsinvarianz und Additivität verifizieren sich auf triviale Weise.

Es genügt offenbar, den spezielleren Fall $\varphi(A) = L_\beta(A)$ zu betrachten, da das konstante Funktional und der Flächeninhalt bereits stetig sind. Wir betrachten eine Eibereichfolge $\{A^n\}$, wobei $A^n \to A$ gelte. Es sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit läßt sich ein $\Delta > 0$ so angeben, daß $|\beta(\xi') - \beta(\xi'')| < \frac{\varepsilon}{2L}$ ausfällt, falls nur $|\xi' - \xi''| < \Delta$ ist. $L = L(A)$ bezeichnet hier die Randlänge von A. Auf dem Rande von A lassen sich im positiven Umlaufssinn numeriert $k+1$ nicht notwendig verschiedene Punkte $P_1, \ldots, P_{k+1}$ $(P_{k+1} = P_1)$ so wählen, daß diese erstens keiner Flachstelle angehören und daß zweitens für die Winkel ξ_i, welche die in P_i nach außen hin errichteten Normalen mit der positiven x-Achse bilden, die Bedingungen $|\xi_{i-1} - \xi_i| < \Delta$ erfüllt werden. Hierbei durchläuft i die Werte von 1 bis k, und man setze $\xi_{k+1} = \xi_1 + 2\pi$. Bei dieser Konstruktion ist besonders darauf Bedacht zu nehmen, daß wir unter einer äußeren Normalen in einem Randpunkt P_i von A jede Richtung zulassen, die auf einer durch P_i hindurchlaufenden Stützgeraden von A orthogonal steht und in die Halbebene weist, die A nicht enthält. Dementsprechend brauchen die Punkte P_i nicht verschieden zu sein, sondern ein singulärer Randpunkt von A kann in der Serie $\{P_i\}$ mehrmals gezählt sein, wobei ihm verschiedene Winkel ξ_i zukommen. Es sei nun Ω_i die Stützgerade von A, die dem Stützpunkt P_i und dem gewählten Winkel ξ_i entspricht; ferner bezeichne Ω_i^n die zu Ω_i parallele Stützgerade von A^n und entsprechend P_i^n einen möglichen Stützpunkt. Wenn Ω_i^n den Bereich A^n längs einer Flachstelle stützt, wird eine willkürliche Wahl getroffen. Endlich bezeichne l_i die Bogenlänge auf dem Rand von A von P_i biz P_{i+1} und entsprechend l_i^n diejenige auf dem Rand von A^n von P_i^n bis P_{i+k}^n. Einfache geometrische Erwägungen lehren, daß aus $A^n \to A$ zunächst $P_i^n \to P_i$ folgt, wobei wesentlich wird, daß P_i keiner Flachstelle von A angehört. Demzufolge gilt $l_i^n \to l_i$. Es läßt sich somit ein N so groß ermitteln, daß für alle $n > N$ und alle $i = 1, \ldots, k$ gilt: $|l_i^n - l_i| < \frac{\varepsilon}{2Ck}$. Hierbei sei C so gewählt, daß $|\beta(\xi)| < C$ für alle ξ ist. Nach dem Mittelwertssatz der Integralrechnung läßt sich nun folgendes schreiben:

$$\varphi(A) = \sum_1^k l_i \beta(\xi_i'), \quad \xi_i \leqq \xi_i' \leqq \xi_{i+1};$$

$$\varphi(A^n) = \sum_1^k l_i^n \beta(\xi_{i,n}''), \quad \xi_i \leqq \xi_{i,n}'' \leqq \xi_{i+1}.$$

Hieraus gewinnt man

$$\varphi(A) - \varphi(A^n) = \sum_1^k \{l_i \beta(\xi_i') - l_i^n \beta(\xi_{i,n}'')\}$$

oder

$$= \sum_1^k \{l_i [\beta(\xi_i') - \beta(\xi_{i,n}'')] + [l_i - l_i^n]\beta(\xi_{i,n}'')\}$$

und weiter die Abschätzung

$$|\varphi(A) - \varphi(A^n)| < \frac{\varepsilon}{2L} \sum_1^k l_i + kC \frac{\varepsilon}{2Ck} = \varepsilon,$$

die nach Konstruktion für alle $n > N$ zutrifft. Demnach gilt $\varphi(A^n) \to \varphi(A)$, w. z. b. w.

B) Es sei $\varphi(A)$ ein translationsinvariantes, additives und stetiges Funktional. Es ist zu zeigen, daß eine Darstellung $\varphi(A) = \alpha + L_\beta(A) + \gamma F(A)$ mit zwei passenden Konstanten α und γ und einer geeigneten stetigen periodischen Winkelfunktion $\beta(\xi)$ gilt. (Behauptung „nur dann".)

Nach der 1. Aussage ist $\varphi(A)$ ein beschränktes Funktional. Nach der 2. Aussage gilt somit für jedes Eipolygon P eine Darstellung der Form $\varphi(P) = \alpha + L_\beta(P) + \gamma F(P)$, wobei $\beta(\xi)$ eine beschränkte Winkelfunktion ist. Wir zeigen jetzt, daß $\beta(\xi)$ sogar stetig sein muß. In der Tat: Es soll ein sehr spezielles Eipolygon, nämlich das Dreieck

$$D_\Delta = \left[1, 2\sin\frac{\Delta}{2}, 1; \vartheta - \pi, \vartheta - \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta}{2}, \vartheta + \Delta\right]$$

betrachtet werden. Nach oben erwähntem Ansatz ergibt sich

$$\varphi(D_\Delta) = \alpha + \{\beta(\vartheta - \pi) + \beta(\{\vartheta + \Delta)\} + 2\sin\frac{\Delta}{2}\beta\left(\vartheta + \frac{\Delta - \pi}{2}\right) + \frac{\gamma}{2}\sin\Delta$$

und spezieller für das uneigentliche Dreieck D_0

$$\varphi(D_0) = \alpha + \{\beta(\vartheta - \pi) + \beta(\vartheta)\}.$$

Nach der vorausgesetzten Stetigkeit unseres Funktionals muß offenbar $\varphi(D_\Delta) \to \varphi(D_0)$ für $\Delta \to 0$ gelten. Die beiden vorausgehenden expliziten Darstellungen erlauben es nun, hieraus auf $\beta(\vartheta + \Delta) \to \beta(\vartheta)$ zu schließen, woraus sich die rechtsseitige Stetigkeit von $\beta(\xi)$ an der Stelle $\xi = \vartheta$ ergibt. Analog gewinnt man die linksseitige Stetigkeit und zusammengefaßt die gewöhnliche Stetigkeit von $\beta(\xi)$. Durch Ansatz $\varphi^*(A) = \alpha + L_\beta(A) + \gamma F(A)$, wobei wir die beiden Konstanten und die Winkelfunktion unverändert der oben für Eipolygone gültigen Darstellungsformel entnehmen, wird nach der ersten bereits oben mit **A)** bewiesenen Hälfte der 3. Aussage ein für alle Eibereiche A definiertes stetiges Funktional gegeben. Der gesetzte Stern $*$ soll daran erinnern, daß man noch nicht wissen kann, daß das so neu angesetzte Funktional mit dem ursprünglichen für alle Eibereiche übereinstimmt. Jedoch ist dies natürlich nun leicht zu schließen. In der Tat: Da sowohl $\varphi(A)$ als auch $\varphi^*(A)$ stetig sind, gilt für eine gegen A konvergente Eiponlygonfolge $\{P^n\}$ $\varphi(P^n) \to \varphi(A)$ und ebenso $\varphi^*(P^n) \to \varphi^*(A)$. Da nun aber für Eipolygone P nach Konstruktion $\varphi(P) = \varphi^*(P)$ gilt, folgt jetzt $\varphi(A) = \varphi^*(A)$. Damit gilt die Darstellungsformel, wie sie oben für $\varphi^*(A)$ angesetzt wurde, auch für $\varphi(A)$, w. z. b. w.

§ 4. Nullfunktionale.

Nach dem Hauptergebnis des vorstehenden Abschnitts läßt sich ein stetiges Funktional $\varphi(A)$ auf die Form

$$\varphi(A) = \alpha + L_\beta(A) + \gamma F(A)$$

bringen. Die Elemente dieser Darstellung sind jedoch nicht eindeutig bestimmt. Während sich die beiden Konstanten α und γ eindeutig aus dem Funktional ergeben, gibt es verschiedene stetige Winkelfunktionen $\beta(\xi)$, welche geeignet sind, ein und dasselbe Funktional $\varphi(A)$ zu erzeugen. Dies hängt mit der folgenden Tatsache zusammen: Es gibt nicht triviale stetige und periodische Winkelfunktionen $\beta_0(\xi) \not\equiv 0$, für die das durch

$$\varphi_0(A) = L_{\beta_0}(A) = \int \beta_0(\xi)\, ds = 0$$

dargestellte Eibereichfunktional identisch, d. h. für alle A verschwindet. Diese nur formal durch den oben stehenden Ansatz gebildeten identisch verschwindenden Funktionale sollen Nullfunktionale heißen; sie bilden in ihrer Gesamtheit eine lineare Mannigfaltigkeit bezüglich der linearen Kombination der ihnen zugehörenden Winkelfunktionen. Diese lassen sich vollständig charakterisieren. Es gilt nämlich die folgende

4. Aussage: *$\varphi_0(A) = L_{\beta_0}(A)$ ist dann und nur dann ein Nullfunktional, wenn die Winkelfunktion $\beta_0(\xi)$ die Form $\beta_0(\xi) = p \cos \xi + q \sin \xi$ aufweist, wo p und q zwei beliebige Konstanten sind.*

Wir beweisen nun diese Behauptungen:

A) Es sei $\beta_0(\xi) = p \cos \xi + q \sin \xi$. Es ist zu zeigen, daß $L_\beta(A)$ ein Nullfunktional ist (Behauptung „dann"). Es genügt zu zeigen, daß die beiden Relationen [5])

$$\int_0^L \cos \xi \, ds = 0, \int_0^L \sin \xi \, ds = 0$$

gelten. Hierbei hat man sich $\xi = \xi(s)$ als Funktion der Randlänge s zu denken. Als solche ist sie monoton zunehmend und wächst um 2π, wenn die Randlänge von 0 bis L zunimmt; L bezeichnet die totale Randlänge von A. Das Verschwinden des oben links stehenden Kosinusintegral ergibt sich mühelos auf Grund der folgenden Bemerkung: Bezeichnen etwa J_I und J_{II} die Integralwerte, die sich je bei Integration über die s-Bereiche $-\frac{\pi}{2} \leqq \xi < \frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{\pi}{2} \leqq \xi < \frac{3\pi}{2}$ ergeben, so ist, wie eine einfache geometrische Interpretation der Integrale ergibt, $J_I = b$ und $J_{II} = -b$, wobei b die Breite des Eibereichs A in Richtung der y-Achse unseres kartesischen Kreuzes bezeichnet. So ergibt sich für $J = J_I + J_{II} = 0$, w. z. b. w. Auf analoge Weise ergibt sich das Verschwinden des oben rechts stehenden Sinusintegrals.

B) Es sei jetzt $L_{\beta_0}(A)$ ein Nullfunktional. Es ist zu zeigen, daß mit zwei geeigneten Konstanten p und q eine Identität $\beta_0(\xi) = p \cos \xi + q \sin \xi$ besteht (Behauptung „nur dann"). Wir betrachten das Dreieck

$$D = \left[\sin \xi, 1, \cos \xi; \frac{3\pi}{2} + \eta, \xi + \eta, \pi + \eta\right]$$

und haben zunächst

$$L_{\beta_0}(D) = \beta_0\left(\frac{3\pi}{2} + \eta\right) \sin \xi + \beta_0(\xi + \eta) + \beta_0(\pi + \eta) \cos \xi.$$

Mit $L_{\beta_0}(D) = 0$ erzielt man nun die Funktionalgleichung

$$\beta_0(\xi + \eta) = -\beta_0(\pi + \eta) \cos \xi - \beta_0\left(\frac{3\pi}{2} + \eta\right) \sin \xi.$$

Mit Rücksicht auf die geometrische Realisierung von D ist die Einschränkung $0 \leqq \xi \leqq \frac{\pi}{2}$ verbindlich, während η frei wählbar ist. Eine einfache Diskussion der oben stehenden Funktionalgleichung führt zu der Identität

$$\beta_0(\xi) \equiv p \cos \xi + q \sin \xi,$$

wobei $p = -\beta_0(\pi)$ und $q = -\beta_0\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ist, w. z. b. w.

[5]) Es handelt sich hierbei um die beiden wesentlichen charakteristischen Bedingungen dafür, daß eine Funktion $\xi = \xi(s)$ unter den im Text nachfolgend kurz gestreiften Nebenbedingungen durch einen Eibereich der Randlänge L realisierbar ist. Diese Fragestellung soll hier nicht weiter verfolgt werden.

Wir sind in diesem Abschnitt von der Bemerkung ausgegangen, daß die Winkelfunktion in der Darstellung eines stetigen Funktionals nicht eindeutig bestimmt ist. Nach dem Ergebnis, das soeben erzielt worden ist, überblicken wir die Mehrdeutigkeit vollkommen. Die am Anfang des Abschnitts angeschriebene besondere Darstellung kann jetzt durch die allgemeinste ersetzt werden. Diese lautet wohl:

$$\varphi(A) = \alpha + L_{\beta+\beta_0}(A) + \gamma F(A),$$

wobei $\beta_0(\xi) \doteq p \cos\xi + q \sin\xi$ ist. Die Freiheit in der Wahl der Konstanten p und q kann beispielsweise dazu benutzt werden, um für die wirkende Winkelfunktion $\bar{\beta}(\xi) = \beta(\xi) + \beta_0(\xi)$ gewisse Nebenbeding$\left(\frac{\pi}{2}\right) = \bar{\beta}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$illen. So kann etwa verlangt werden, daß $\bar{\beta}(0) = \bar{\beta}(\pi)$ und $\bar{\beta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ausfällt.

§ 5. Monotone Funktionale.

Für ein Eibereichfunktional $\varphi(A)$ gelte

$$\text{(V)} \qquad \varphi(A) \leqq \varphi(B) \qquad (A \subseteq B).$$

Ein solches Funktional heißt *monoton*. Eine Umkehrung der Orientierung bringt für die Theorie der monotonen Funktionale nichts wesentlich Neues, da eine solche durch einen einfachen Zeichenwechsel beim Funktional hervorgebracht werden kann; ohne Einschränkung darf also die in (V) vorgesehene Orientierung postuliert werden. Die Gesamtheit der translationsinvarianten additiven und monotonen Funktionale, die also den Forderungen (I), (II) und (V) genügen, bilden eine Klasse $\mathfrak{T}$; diese ist indessen keine lineare Mannigfaltigkeit, da eine Linearkombination die Monotonie im allgemeinen zerstört.

Man kann nun zeigen, daß $\mathfrak{T}$ eine Teilklasse der linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ist, denn es gilt die folgende

5. Aussage: *Ein monotones Funktional $\varphi(A)$ ist stetig.*

Vergleichen wir noch die 1. Aussage, so ergibt sich, daß ein monotones Funktional auch beschränkt ist, doch liegt diese Feststellung im Gegensatz zu der soeben durch die 5. Aussage formulierten Behauptung ganz an der Oberfläche. In der Tat folgt aus der Monotonie für einen Eibereich A, der den Punkt P enthält und andererseits im Einheitskreis K enthalten ist, die Einschränkung $\varphi(P) \leqq \varphi(A) \leqq \varphi(K)$ und hieraus schließt man $|\varphi(A)| \leqq M$, wobei $M = \operatorname{Max}\{|\varphi(P)|, |\varphi(K)|\}$ gesetzt wird.

Die mit der 5. Aussage ausgedrückte Festellung ist für die verschiedenen Anwendungen unserer Theoreme besonders wichtig, da sie gestattet, die mit der 3. Aussage erzielte Chrakterisierung auch auf monotone Funktionale auszudehnen.

Wir beweisen jetzt diese Behauptung: Wir haben oben kurz gezeigt, daß das monotone Funktional $\varphi(A)$ auch beschränkt ist. Es gilt also

$|\varphi(A)| \leqq M$ falls $A \subseteq K$. Nach der 2. Aussage ist $f(\lambda) = \varphi(\lambda P)$ für ein festes Eipolygon P bei veränderlichem $0 \leqq \lambda < \infty$ ein Polynom 2. ten Grades in λ, wobei λP das durch Dilatation (vom Ursprung 0 aus) aus P hervorgehende homothetische Eipolygon und λ den Koeffizienten der ähnlichen Vergrößerung bezeichnet. Denken wir uns das Zentrum des oben zitierten Einheitskreises K im Ursprung, so hat man nach der Beschränktheitsbedingung zunächst $|f(\lambda)| \leqq M$ für $0 \leqq \lambda \leqq 1$ und für ein $k \geqq 1$ durch eine einfache Rechnung $|f(\lambda)| \leqq 2k^2 M$ für $0 \leqq \lambda \leqq k$.

Nehmen wir jetzt P bis auf die Bedingung $P \subseteq K$ veränderlich an, so ist nach bekannten Sätzen der Analysis die Familie der quadratischen Funktionen $f_P(\lambda)$ im Hinblick auf die oben festgelegte gleichmäßige Beschränktheit im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq k$ dort gleichgradig stetig. Drücken wir diesen Sachverhalt wieder durch die Funktionale aus, so gilt also: Zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ läßt sich ein $\vartheta(k) > 0$ angeben, sodass für ein beliebiges Eipolygon $P \subseteq K$ und ein beliebiges Koeffizientenpaar λ, λ', das den Bedingungen $0 \leqq \lambda < \lambda' \leqq k$ und $\lambda' - \lambda < \vartheta(k)$ genügt, stets $|\varphi(\lambda' P) - \varphi(\lambda P)| < \varepsilon$ gilt.

Es bezeichne jetzt A einen beliebigen Eibereich und $\{A^n\}$ eine Eibereichfolge mit $A^n \to A$. Nun werde $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es läßt sich ein genügend großes $k \geqq 1$ so wählen, daß man A durch Eipolygone λP von außen und innen beliebig approximieren kann, wobei $P \subseteq K$ und $0 \leqq \lambda \leqq k$ gelten soll. Es läßt sich dann ein passendes Eipolygon $P \subseteq K$ so finden, daß noch für ein ausreichend klein gewähltes $\Delta > 0$ die Relationen $\lambda' P \supseteq A_\Delta$, $A \supseteq (\lambda P)_\Delta$, $0 \leqq \lambda < \lambda' \leqq k$ und $0 < \lambda' - \lambda < \vartheta(k)$ gelten. A_Δ bedeutet hier den äußeren Parallelbereich im Abstand Δ.

Wegen $A^n \to A$ läßt sich ein N so angeben, daß für alle $n > N$ simultan $A^n_\Delta \supseteq A$ und $A_\Delta \supseteq A$ gilt. Hieraus zieht man die Folgerung $\lambda' P \supseteq A^n \supseteq \lambda P$, und so folgt nach der Monotonie des Funktionals

$$\varphi(\lambda' P) \geqq \varphi(A^n) \geqq \varphi(\lambda P),$$

und ebenso

$$\varphi(\lambda' P) \geqq \varphi(A) \geqq \varphi(\lambda P).$$

Nach der vorstehenden Konstruktion ist aber $\varphi(\lambda' P) - \varphi(\lambda P) < \varepsilon$, sodaß sich offenbar $|\varphi(A^n) - \varphi(A)| < \varepsilon$ für alle $n > N$ ergibt, und so $\varphi(A^n) \to \varphi(A)$, w. z. b. w.

§ 6. Basisfunktionale.

Ein stetiges Funktional $\varphi(A)$ ist nach dem durch die 3. Aussage gegebenen Hauptergebnis stets in der Form

$$\varphi(A) = \alpha + L_\beta(A) + \gamma F(A)$$

darstellbar. Ein solches ist also durch drei Elemente vollständig charakterisiert, nämlich durch die beiden Konstanten α und γ und durch die stetige periodische Winkelfunktion $\beta(\xi)$. Ist nun ein Funktional $\varphi(A)$ auf eine von dieser Darstellung unabhängige Weise definiert, eine Sachlage, welche natürlich die Regel bildet, so kann man fragen, auf welche Weise sich nun die durch das Funktional im wesentlichen eindeutig bestimmten Elemente α, β, γ ermitteln lassen. Es ist durchaus klar, daß die Funktionalwerte, welche durch eine passend eingeschränkte Klasse einfach gestalteter Eibereiche geliefert werden, bereits ausreichen, um diese Ermitlung in die Wege zu leiten. Im engen Zusammenhang mit der Frage einer möglichst rationellen Auswertung kann der Begriff eines Basissystems aufgestellt werden. Unter einem Basissystem wollen wir eine Menge von Eibereichen verstehen, für die alle Funktionalwerte etwa bis auf unwesentliche Stetigkeits- und Nebenbedingungen willkürlich vorgeschrieben werden können, daß aber andererseits durch diese Vorgabe das Funktional eindeutig bestimmt wird. Offenbar gibt es beliebig viele Lösungen für dieses Problem. Nachfolgend greifen wir eine an sich naheliegende einfache Lösung heraus: Das Basissystem bestehe aus

a) einem Punkt P,

b) einem achsenorientierten Einheitsquadrat E,

c) der einparametrigen periodischen Schar der rechtwinkligen Dreiecke D_τ mit achsenparallelen Katheten, für welche die nach außen errichtete Hypotenusennormale mit der positiven x-Achse den Winkel τ einschließt. Die Hypotenusenlänge sei 1.

Die den Eibereichen dieses Systems zugehörenden Funktionale

a) $\varphi(P) = U$,

b) $\varphi(E) = V$,

c) $\varphi(D_\tau) = W(\tau)$

wollen wir Basisfunktionale nennen. Es gilt nun die folgende

6. Aussage: *Zwei Zahlwerte U und V und eine periodische Funktion $W(\tau)$ bilden dann und nur dann die Basisfunktionale eines stetigen Funktionals $\varphi(A)$, das im übrigen durch diese Vorgabe eindeutig bestimmt ist, falls $W(\tau)$ stetig ist und die beiden Nebenbedingungen $W(0) = W(\pi)$ und $W\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{3\pi}{2}\right)$ erfüllt.*

Zusatz: *Die Elemente α, β, γ zur Darstellung des Funktionals $\varphi(A)$ lassen sich aus den Basisfunktionalen U, V, W gemäß der unten folgenden Tafel berechnen:*

$$\alpha = U,$$
$$\beta(\tau) = W(\tau) + \overline{W} p(\tau) + \overline{\overline{W}} q(\tau) - U r(\tau) - V s(\tau),$$
$$\gamma = U + V - \overline{W} - \overline{\overline{W}},$$

wobei abkürzend

$$\overline{W} = W(0) = W(\pi); \quad \overline{\overline{W}} = W\left(\frac{\pi}{2}\right) = W\left(\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$p(\tau) = \frac{|\sin 2\tau| - 2|\cos\tau|}{4},$$

$$q(\tau) = \frac{|\sin 2\tau| - 2|\sin\tau|}{4},$$

$$r(\tau) = \frac{|\sin 2\tau| - 2|\cos\tau| - 2|\sin\tau| + 4}{4},$$

$$s(\tau) = \frac{|\sin 2\tau|}{4}$$

gesetzt wurde.

Dieser Zusatz beantwortet auch die erste, zu Beginn dieses Abschnitts aufgeworfene Frage.

Wie wir früher gesehen haben, ist die Winkelfunktion $\beta(\tau)$ durch das Funktional nicht eindeutig bestimmt. Die Berechnung nach der obigen Tafel liefert indessen, wie man leicht verifiziert, diejenige nunmehr eindeutig bestimmte Winkelfunktion, für welche noch die beiden Nebenbedingungen $\beta(0) = \beta(\pi)$ und $\beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ erfüllt werden (vgl. die Bemerkung am Ende des 4. Abschnittes).

Wir beweisen jetzt die vorangehenden Behauptungen:

A) Es seien U und V zwei beliebige Zahlwerte und $W(\tau)$ eine stetige periodische Funktion und $\overline{W} = W(0) = W(\pi)$ sowie $\overline{\overline{W}} = W\left(\frac{\pi}{2}\right) = W\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. Nun berechne man $\alpha, \beta(\tau)$ und γ nach den in der Tafel gegeben Ansätzen. So wird $\beta(\tau)$ eine stetige periodische Winkelfunktion. Mit diesen Elementen läßt sich nach der 3. Aussage ein stetiges Funktional $\varphi(A) = \alpha + L_\beta(A) + \gamma F(A)$ konstruieren. Nun läßt sich direkt verifizieren, daß *a)* $\varphi(P) = U$, *b)* $\varphi(E) = V$ und *c)* $\varphi(D_\tau) = W(\tau)$ ist. Die etwas umständliche Rechnung muß hier dem Leser überlassen bleiben. Damit ist der erste Teil (Behauptung „dann") bewiesen.

B) Es sei $\varphi(A)$ ein stetiges Funktional und man setze $\varphi(D_\tau) = W(\tau)$. Daraus folgt unmittelbar, daß $W(\tau)$ eine stetige periodische Funktion ist, und wegen $D_0 \equiv D_\pi$ und $D_{\frac{\pi}{2}} \equiv D_{\frac{3\pi}{2}}$ schließt man noch auf $W(0) = W(\pi)$ und $W\left(\frac{\pi}{2}\right) = W\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. Damit ist der zweite Teil (Behauptung „nur dann") bewiesen.

Ergänzend ist noch die in der 6. Aussage eingeschlossene Behauptung zu begründen, daß das Funktional durch die Vorgabe von U, V, W eindeutig bestimmt ist. Es gibt sicher Funktionale, welche U, V, W als Basisfunktionale aufweisen, nämlich jedenfalls das unter **A)** speziell konstruierte. Es sei nun $\bar{\varphi}(A)$ irgend ein solches Funktional mit den Elementen $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$. Man darf noch verlangen, daß die Nebenbedingungen $\bar{\beta}(0) = \bar{\beta}(\pi)$ und $\bar{\beta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \bar{\beta}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ erfüllt sind. Die sich für U, V, W ergebenden drei Darstellungsformeln lassen sich jetzt durch einige Umrechnungen, die wir erneut dem Leser überlassen müssen, nach $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ auflösen. Hierbei ergeben sich aber die für α, β, γ stehenden Ausdrücke der Tafel, womit dargetan ist, daß $\bar{\alpha} = \alpha$, $\bar{\beta} = \beta$ und $\bar{\gamma} = \gamma$ ist, w. z. b. w.

§ 7. Bewegungsinvariante Funktionale.

Besonders ausgezeichnete und wichtige translationsinvariante Funktionale sind solche, welche sogar bewegungsinvariant sind. An Stelle von Forderung (I) tritt die stärkere Bedingung

$$(\bar{\mathrm{I}}) \qquad \varphi(A) = \varphi(A') \quad \text{für} \quad A \simeq A',$$

d. h. bewegungsgleiche oder kongruente Eibereiche A und A' (geschrieben $A \simeq A'$) weisen den nämlichen Funktionalwert auf. Es sei $\overline{\mathfrak{M}}$ die lineare Mannigfaltigkeit der bewegungsinvarianten, additiven und stetigen Funktionale. Natürlich ist $\overline{\mathfrak{M}}$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}$. Analog lassen sich die Teilmannigfaltigkeiten $\overline{\mathfrak{N}}$ und $\overline{\mathfrak{T}}$ von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T}$ betrachten. Aus dem durch die 3. Aussage erzielten Funktionalsatz läßt sich nun auf einfachste Weise eine vollständige Charakterisierung der linearen Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}$ ableiten. Es gilt die

2. Charakterisierung: *Die Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}$ der bewegungsinvarianten, additiven und stetigen Eibereichfunktionale ist identisch mit der durch den Ansatz $\varphi(A) = \alpha + \beta L(A) + \gamma F(A)$ gegebenen linearen Schar; α, β und γ bezeichnen drei willkürliche Konstanten und $L(A)$ und $F(A)$ bedeuten Randlänge und Flächeninhalt von A.*

Der damit ausgedrückte Sachverhalt ist bekannt. Er läßt sich für Eipolygone auf Grund einfacher elementargeometrischer Überlegungen gewinnen und ergibt sich dann für Eibereiche durch Grenzübergang.

Im Zuge der hier entwickelten Theorie erzielt man dieses Resultat etwa so: Es sei $\varphi(A)$ ein translationsinvariantes Funktional. Es ist dann nach der 1. Charakterisierung

$$\varphi(A) = \alpha + \int \beta(\xi)\, ds + \gamma F(A).$$

Bezeichnet A^{ϑ} den durch eine Drehung im positiven Sinn um den Winkel ϑ um den Ursprung aus A hervorgehenden Bereich, so erhält man

$$\varphi(A^{\vartheta}) = \alpha + \int \beta(\xi + \vartheta)\, ds + \gamma F(A).$$

Nun bilden wir das über alle Drehlagen erstreckte Integralmittel und erhalten

$$\frac{1}{2\pi}\int \varphi(A^{\vartheta})\,d\vartheta = \alpha + \beta L(A) + \gamma F(A),$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{2\pi}\int \beta(\xi+\vartheta)\,d\vartheta$$

ist. Ist jetzt $\varphi(A)$ sogar bewegungsinvariant, so ist natürlich

$$\frac{1}{2\pi}\int \varphi(A^{\vartheta})\,d\vartheta = \varphi(A).$$

In Zusammenwirkung mit der trivialen Bemerkung, daß die drei Funktionale $\varphi(A) = C(A) = 1$; $\varphi(A) = L(A)$; $\varphi(A) = F(A)$ bewegungsinvariante, additive und stetige Funktionale sind, schließt sich der Beweis.

Wir wollen noch auf einen wichtigen Unterschied zwischen den Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ aufmerksam machen. Während $\mathfrak{M}$ beliebig viele linear unabhängige Funktionale enthält, gibt es in $\overline{\mathfrak{M}}$ nur drei linear unabhängige. Hier ist die Ermittlung der Darstellungselemente α, β, γ im Falle eines auf andere Art definierten Funktionals bedeutend einfacher. So bilden beispielsweise die drei Kreise K_0, K_1 uud K_2 mit den Radien 0, 1 und 2 bereits ein Basissystem (vgl. die Erklärungen im vorausgehenden Abschnitt). Die drei Elemente α, β, γ lassen sich aus den drei Basisfunktionalen $\varphi(K_i) = Z_i$ $(i = 0, 1, 2)$ gemäß der unten stehenden Tafel berechnen:

$$\alpha = Z_0,$$

$$\beta = \frac{-3Z_0 + 4Z_1 - Z_2}{4\pi},$$

$$\gamma = \frac{Z_0 - 2Z_1 + Z_2}{2\pi}.$$

§ 8. Schlußbemerkungen.

In der vorliegenden Studie zur Theorie der Eibereichfunktionale haben wir insgesamt sechs Mannigfaltigkeiten erwähnt, nämlich $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{T}$ und $\overline{\mathfrak{N}}$, $\overline{\mathfrak{M}}$, $\overline{\mathfrak{T}}$.

In der unten folgenden Tabelle sind die Funktionaleigenschaften, welche die verschiedenen Mannigfaltigkeiten charakterisieren, durch angebrachte Sterne gekennzeichnet. Hierbei ist zu beachten, daß neben den Eigenschaften, durch die wir die betreffenden Mannigfaltigkeiten definierten, auch diejenigen eingetragen sind, welche wir gefolgert haben.

	$\mathfrak{M}$	$\overline{\mathfrak{M}}$	$\mathfrak{N}$	$\overline{\mathfrak{N}}$	$\mathfrak{T}$	$\overline{\mathfrak{T}}$
translationsinvariant	*	*	*	*	*	*
bewegungsinvariant		*		*		*
stetig	*	*			*	*
beschränkt	*	*	*	*	*	*
monoton					*	*

Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\mathfrak{T} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}, \quad \overline{\mathfrak{T}} \subset \overline{\mathfrak{M}} \subset \overline{\mathfrak{N}}; \quad \overline{\mathfrak{T}} \subset \mathfrak{T}, \quad \overline{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}, \quad \overline{\mathfrak{N}} \subset \mathfrak{N}.$$

Diese ergaben sich im Laufe unserer Entwicklung und sie lassen sich auch aus der obenstehenden Tabelle aus logischen Gründen ablesen. Diese Zusammenstellung ergibt ein übersichtliches Bild über den Stand unserer Theorie. So fällt jetzt auf, daß wir durch die 1. und 2. Charakterisierung nur die Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ vollständig beherrschen; dies entspricht auch dem von uns gesteckten Ziel. Unabgeklärt bleibt vor allem die vollständige Struktur von $\mathfrak{N}$ und $\overline{\mathfrak{N}}$, insbesondere sieht Verf. zunächst keine Möglichkeit, auf eine eventuell gültige Identität $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ und $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{N}}$ zu schließen. Weniger schwierig, aber unseres Wissens ebenfalls noch nicht durchgeführt, sind die vollständigen Charakterisierungen von $\mathfrak{T}$ und $\overline{\mathfrak{T}}$. Hier muß es sich darum handeln, die für die Monotonie der Funktionale notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Darstellungselemente α, β, γ aufzuzeigen, eine Aufgabe, welche vor allem im bewegungsinvarianten Fall recht einfach sein dürfte.

(Eingegangen am 2. Januar 1951.)