Über ein Problem von Herrn Leja betreffend im Mittel monotone Folgen.

Von W. KNÖDEL und L. SCHMETTERER, in Wien.

§ 1.

Prof. LEJA hat folgenden Satz bewiesen[1]: (a_k) sei eine reelle Zahlenfolge, welche der Bedingung

$$\frac{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+p}}{p} \geqq a_{k+p+1}, \qquad p \geqq 2,\, k=0,1,\ldots \tag{1}$$

genüge. Solche Folgen sollen *monoton fallend im Mittel* heißen. Dann ist $\{a_k\}$ entweder eigentlich divergent gegen $-\infty$ oder konvergent. Ein sinngegemäß ähnliches Resultat gilt für im Mittel monoton wachsende Folgen, doch wollen wir solche Folgen und ihre Verallgemeinerungen ein für alle Mal aus dem Kreis unserer Betrachtungen ausschließen, um eine triviale Duplizität der Untersuchungen zu vermeiden.

Am Schluß der Arbeit[1]) stellt Herr LEJA das Problem[2]), diese Untersuchungen auf den Fall zu übertragen, daß an Stelle von (1) die Bedingung

$$\frac{a_{k+1}+\cdots+a_{k+p}}{p} \geqq \frac{a_{k+p+1}+\cdots+a_{k+p+q}}{q}, \qquad p \geqq 1,\, q \geqq 2,\, k=0,1,\ldots \tag{2}$$

tritt. Soviel wir wissen ist weder Herr LEJA, noch ein anderer jemals auf diese Frage zurückgekommen. Wir wollen nun eine umfassende Lösung geben, welche zeigt, daß die Untersuchungen von Herrn LEJA in gewissen Sinne einen Ausnahmefall behandeln. Zur Formulierung unserer Ergebnisse führen wir noch folgende Terminologie ein: Folgen, welche entweder gegen $-\infty$ divergieren oder konvergieren, sollen etwa als *links-regulär* bezeichnet werden. Es gelten nun die Sätze:

Satz 1: *Es können stets reelle Zahlenfolgen gefunden werden, welche der Bedingung* (2) *genügen, deren Limes inferior* $-\infty$ *ist, und welche in einem*

[1]) F. LEJA, Sur les suites monotones en moyenne, *Ann. de la Soc. Pol. Math.* **19** (1946), p. 133—139.

[2]) Siehe [1]) S. 139.

beliebigen endlichen (oder unendlichen) Intervall dort überall dichte Häufungsstellen besitzen. Eine Ausnahme bietet nur der Fall $q=1, p\geqq 2$, in welchem sich Folgen, welche (1) *genügen, stets links-regulär verhalten.*

Satz 2: *Zahlenfolgen $\{a_k\}$, welche* (2) *erfüllen, können nicht eigentlich gegen $+\infty$ divergieren. Allgemeiner: Falls*

$$\underline{\lim}\, a_k > -\infty \tag{3}$$

gilt, muß $\overline{\lim}\, a_k < +\infty$ sein.

Mit diesen beiden Sätzen ist zwar das Verhalten von Folgen, welche (2) erfüllen und die wir ebenfalls als monoton (fallend) im Mittel bezeichnen wollen, gekennzeichnet, doch ist speziell der Inhalt des Satzes 2 mehr oder weniger trivial, wie sich gleich herausstellen wird. Es gilt nämlich über diesen Satz hinaus

Satz 3: *Das Konvergenzverhalten der im Mittel monotonen Folgen, welche der Bedingung* (3) *genügen, hängt davon ab, ob $(p, q)=1$ oder $(p, q)=s>1$ ist. Im ersten Falle hat man stets Konvergenz, im zweiten lassen sich stets Beispiele (unbestimmter) Divergenz angeben.*

Der auf den Fall $(p, q)=s>1$ bezügliche Teil des Satzes 3 läßt sich noch ergänzen durch den

Satz 4: *Folgen, welche den Voraussetzungen des Satzes 3 und der Bedingung $(p, q)=s>1$ genügen, sind für alle $r>0$ (C, r)-summierbar.*

Es ist uns nicht gelungen, das im Satz 3 formulierte Hauptergebnis für den Fall $(p, q)=1$ mit den dem Problem zweifellos angepaßten elementaren Methoden des Herrn Leja allgemein zu beweisen, sondern wir mußten auf die Theorie der linearen Differenzengleichungen zurückgreifen. Wir wollen aber wenigstens zunächst zeigen, daß man im Falle $p=3, q=2$ mit einer geringfügigen Modifizierung des Lejaschen Beweisansatzes durchkommt. (Wir können dies noch in den Fällen $p=2, q=3; p=1, q>1$).

Wir formulieren also den

Satz 3': *Jede reelle Zahlenfolge, welche* (2) *mit $p=3, q=2$ sowie* (3) *erfüllt, ist stets konvergent.*

Wir schicken dem Beweis einen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 1: *Aus* (2) *läßt sich mit der Bezeichnung*

$$B_m = \sum_{k=1}^{p} k\cdot q\cdot a_{m+k-1} + \sum_{l=1}^{q} (q-l)p\cdot a_{m+p+l}$$

die folgende Kette von Ungleichungen gewinnen:

$$B_m \geqq B_n \qquad \text{für alle } n \geqq m \geqq 1. \tag{4}$$

Beweis: Man addiere eine hinreichende Anzahl von Ungleichungen (2) und erhält nach leichter Umformung (4).

Beweis des Satzes 3′: Es sei

(5) $$\underline{\lim}\, a_n = \alpha, \quad \overline{\lim}\, a_n = \beta \qquad \alpha \leqq \beta,$$

Dann gibt es ein n_0, so daß für $n > n_0$

(6) $$\beta + \varepsilon > a_n > \alpha - \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0$$

gilt. Es existiert eine Teilfolge etwa mit den Indizes $n_k \to \infty$, $n_k > n_0$, so daß

(7) $$|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$$

für $n_k > n_1(\varepsilon)$.

Ferner sei

$$\underline{\lim}\, (a_{n_k-2} + a_{n_k-1}) = 2\gamma \qquad (\gamma \geqq \alpha).$$

Also kann man aus den a_{n_k} eine weitere Teilfolge a_{n_l} auswählen, so daß

(8) $$|a_{n_l-2} + a_{n_l-1} - 2\gamma| < 2\varepsilon \qquad \text{für } n_l > n_2(\varepsilon) > n_1(\varepsilon).$$

gilt.

Wir wollen γ nach oben abschätzen und leiten zu diesem Zweck aus $B_{n_l-1} \geqq B_{n_l'-4}$ (Hilfssatz 1) und $B_{n_l+1} \geqq B_{n_l'-3}$ die neue Ungleichung

(9) $$2a_{n_l-1} + 4a_{n_l} + 8a_{n_l+1} + 7a_{n_l+2} + 6a_{n_l+3} + 3a_{n_l+4} \geqq$$
$$\geqq 2a_{n_l'-4} + 6a_{n_l'-3} + 10a_{n_l'-2} + 9a_{n_l-1} + 3a_{n_l'}$$

mit

$$n_l' > n_l$$

her.

Für die linke Seite von (9) gilt zuerst nach (7)

(10) $$\alpha + \varepsilon > a_{n_l},$$

Ferner folgt aus (8)

$$2\gamma + 2\varepsilon > a_{n_l-2} + a_{n_l-1},$$

somit wegen (2) und (10)

(11) $$\frac{2}{3}(\alpha + 2\gamma) + 2\varepsilon > \frac{2}{3}(a_{n_l-2} + a_{n_l-1} + a_{n_l}) \geqq a_{n_l+1} + a_{n_l+2}.$$

Weiter schließt man aus (10) und (11)

(12) $$\frac{2}{9}(5\alpha + 4\gamma) + 2\varepsilon > \frac{2}{3}(a_{n_l} + a_{n_l+1} + a_{n_l+2}) \geqq a_{n_l+3} + a_{n_l+4}.$$

Und schließlich folgt aus (6)

(13) $$\beta + \varepsilon > a_{n_l-1},$$

(14) $$\beta + \varepsilon > a_{n_l+1},$$

(15) $$\beta + \varepsilon > a_{n_l+3}.$$

Bildet man nun die Summe

$$4.(10) + 7(11) + 3(12) + 2(13) + 1(14) + 3(15),$$

so kommt

(16) $$12\alpha + 6\beta + 12\gamma + 30\varepsilon >$$
$$> 2a_{n_l-1} + 4a_{n_l} + 8a_{n_l+1} + 7a_{n_l+2} + 6a_{n_l+3} + 3a_{n_l+4}.$$

In ähnlicher Weise behandeln wir die rechte Seite von (9). Aus (7) folgt wieder

$$a_{n_l'} > \alpha - \varepsilon \tag{17}$$

Ferner erhält man aus (8)

$$a_{n_l'-2} + a_{n_l'-1} > 2\gamma - 2\varepsilon. \tag{18}$$

Außerdem gilt wegen (2), (18) und (6)

$$a_{n_l'-4} + a_{n_l'-3} \geqq \frac{3}{2}(a_{n_l'-2} + a_{n_l'-1}) - a_{n_l'-5} > 3\gamma - \beta - 4\varepsilon. \tag{19}$$

Ebenso folgt aus (18)

$$a_{n_l'-2} \geqq 2\gamma - 2\varepsilon - a_{n_l'-1} > 2\gamma - \beta - 3\varepsilon. \tag{20}$$

Zuletzt gilt noch wegen (7)

$$a_{n_l'-3} > \alpha - \varepsilon. \tag{21}$$

Bildet man die Summe

$$3(17) + 9(18) + 2(19) + 1.(20) + 4(21),$$

dann erhält man

$$2a_{n_l'-4} + 6a_{n_l'-3} + 10a_{n_l'-2} + 9a_{n_l'-1} + 3a_{n_l'} > 7\alpha - 3\beta + 26\gamma - 36\varepsilon. \tag{22}$$

Zusammen mit (9) und (16) gibt das die gewünschte Abschätzung für γ

$$14\gamma < 5\alpha + 9\beta + 66\varepsilon. \tag{23}$$

Ähnlich wie (9) läßt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned} 2a_{n_l-1} + 4a_{n_l} + 8a_{n_l+1} + 7a_{n_l+2} + 6a_{n_l+3} + 3a_{n_l+4} \geqq \\ \geqq 2(2a_{n_t-2} + 4a_{n_t-1} + 6a_{n_t} + 3a_{n_t+1}) \end{aligned} \tag{24}$$

für $n_t > n_l$ herleiten, wo die n_t eine unendliche Teilfolge der n bedeuten, für die

$$|a_{n_t} - \beta| < \varepsilon \tag{25}$$

wird. Die linke Seite von (24) schätzt man mit (16) und (23) zu

$$\frac{114\alpha + 96\beta + 606\varepsilon}{7} > 2a_{n_l-1} + 4a_{n_l} + 8a_{n_l+1} + 7a_{n_l+2} + 6a_{n_l+3} + 3a_{n_l+4} \tag{26}$$

ab. Für die rechte Seite von (24) gilt nach (25)

$$a_{n_t} > \beta - \varepsilon. \tag{27}$$

Aus (6) folgt

$$a_{n_t+1} > \alpha - \varepsilon. \tag{28}$$

Ferner hat man wegen (6)

$$a_{n_t-2} + a_{n_t-1} \geqq \frac{3}{2}(a_{n_t} + a_{n_t+1}) - a_{n_t-3} > (3\alpha + \beta)\frac{1}{2} - 4\varepsilon. \tag{29}$$

Zum Schluß kommt noch

$$a_{n_t+1} > \alpha - \varepsilon. \tag{30}$$

Jetzt bildet man

$$2[6(27)+3(28)+2(29)+2(30)].$$

Das liefert

(31) $$2[2a_{n_t-2}+4a_{n_t-1}+6a_{n_t}+3a_{n_t+1}] \geqq 16\alpha+14\beta-38\varepsilon.$$

Kombiniert man (26) und (31), dann resultiert die Gleichung

$$\alpha+436\varepsilon>\beta,$$

die für jedes $\varepsilon>0$ gelten muß und daher im Verein mit (5)

$$\alpha=\beta$$

liefert, so daß Satz 3' bewiesen ist.

§ 2.

Wir führen nun den Beweis der Sätze 1—4. Hiefür benötigen wir noch eine Reihe weiterer Hilfssätze. Zunächst den

Hilfssatz 2: *Es gibt eine Anordnung der Gesamtheit der natürlichen Zahlen in einer Matrix mit unendlich vielen Zeilen und Spalten, so daß jede natürliche Zahl genau einmal auftritt.*

Beweis: Dieser einfache Sachverhalt ist längst bekannt. [3])

Mit der Bezeichnung des Hilfssatzes 1 gilt auch der

Hilfssatz 3: *Die Folge B_m, $m=1,2,\dots$ ist unter der Voraussetzung* (3) *stets konvergent. Setzt man etwa $B_m-B_{m+1}=\varepsilon_m\geqq 0$, dann ist also $\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon_m$ konvergent.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus Hilfssatz 1.

Hilfssatz 4: *Das Polynom*

(32) $$q\sum_{k=1}^{p}x^{k-1}-p\sum_{k=1}^{q}x^{p+k-1}$$

besitzt die reelle Nullstelle 1 *und sonst keine positive Wurzel. Im Intervall $-\frac{1}{2}<x<1$ ist es stets positiv.*

Beweis: Die Behauptung über die positiven Nullstellen ist trivial, da nach Division durch $-(x-1)$ das Polynom

(33) $$q\sum_{k=1}^{p}k\cdot x^{k-1}+p\sum_{k=1}^{q}(q-k)x^{p+k-1}$$

entsteht. Für das Maximum zweier aufeinanderfolgender Koeffizienten von

[3]) Man vergleiche etwa das Schema bei Steinhaus und Kaczmarz (Theorie der Otrhogonalreihen, Warszawa—Lwow, 1935, S. 135), welches wir uns stets zu Grunde gelegt denken wollen.

(33) erhält man 2, für das Minimum $\frac{1}{2}$, so daß nach dem Satz von KAKEYA alles gezeigt ist. (Für $p=2, q=1$ ist $-\frac{1}{2}$ Wurzel von (33)).

Hilfssatz 5: *Falls* $(p, q)=1$ *ist, besitzt das Polynom* (32) *abgesehen von konjugierten Nullstellen nicht zwei Wurzeln von gleichem Betrag und sämtliche Wurzeln sind einfach.*

Beweis: (Die nachfolgende elegante Beweisidee hat uns Herr DR. PRACHAR mitgeteilt und uns in liebenswürdiger Weise gestattet, ihn an Stelle unserer schwerfälligen Überlegungen hier wiederzugeben.) Wir bezeichnen das mit -1 multiplizierte Polynom (32) mit $P(x)$. Dann ist

$$P(x)(x-1)=px^{p+q}-(p+q)x^p+q=px^p(x^q-1)-q(x^p-1). \tag{34}$$

Also

$$\frac{d}{dx}(P(x)(x-1))=p(p+q)x^{p-1}(x^q-1). \tag{35}$$

Somit kann aber $P(x)(x-1)$ keine von $+1$ verschiedene Doppelwurzel besitzen, da (35) nur für $x=0$ und $x=e^{2\pi i h/q}$ verschwindet, aber wegen $(p, q)=1$ keine q-te Einheitswurzel Nullstelle von $P(x)(x-1)$ sein kann, insofern sie $\neq 1$ ist.

Den Beweis, daß (34) nur Wurzeln von gleichem Betrag haben kann, wenn sie konjugiert komplex sind, führen wir indirekt. Wir nehmen an, es gibt zwei nicht konjugierte Wurzeln $r.e^{i\varphi}$ und $r.e^{i\psi}$. Einsetzen in (34) ergibt

$$p.r^{p+q}e^{i\varphi(p+q)}-(p+q).r^p.e^{i\varphi p}+q=0,$$
$$p.r^{p+q}e^{i\psi(p+q)}-(p+q).r^p.e^{i\psi p}+q=0.$$

Nach elementaren Umformungen erhält man daraus das neue Gleichungspaar

$$p.r^q[e^{i\varphi(p+q)}-e^{i\psi(p+q)}]=(p+q)[e^{i\varphi p}-e^{i\psi p}],$$
$$q[e^{i\varphi(p+q)}-e^{i\psi(p+q)}]=(p+q).r^p[e^{i\varphi(p+q)+i\psi p}-e^{i\varphi p+i\psi(p+q)}].$$

Insbesondere müssen also links und rechts die komplexen Zahlen in der eckigen Klammer dasselbe Argument besitzen, das heißt

$$-\operatorname{cotg}\frac{\varphi(p+q)+\psi(p+q)}{2}=-\operatorname{cotg}\frac{\varphi p+\psi p}{2},$$

$$-\operatorname{cotg}\frac{\varphi(p+q)+\psi(p+q)}{2}=-\operatorname{cotg}\frac{\varphi(p+q)+\psi p+\varphi p+\psi(p+q)}{2},$$

oder

$$q.(\varphi+\psi)=2k\pi,$$
$$p.(\varphi+\psi)=2n\pi.$$

Nach Voraussetzung ist $\varphi+\psi\neq 0$. Außerdem kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0<\varphi+\psi=2\pi\alpha<2\pi$ annehmen. Damit kommt $k=\alpha q$,

$n = \alpha p$ mit $0 < \alpha < 1$. Dann ist α ein echter Bruch $\frac{t}{s}$ mit $(t, s) = 1$ und aus $sk = tq$ $sn = tp$ folgt der Widerspruch $(p, q) = s > 1$.

Beweis des Satzes 1: Der zweite Teil des Satzes ist das Ergebnis von Herrn LEJA. Für die erste Behauptung beschränken wir uns der Einfachheit halber auf ein endliches Intervall (a, b), und zählen die darin enthaltenen rationalen Zahlen ab: $r_1, r_2, \ldots$. Nun streiche man aus dem im Hilfssatz 2 erwähnten Matrizenschema [3]) die Zahlen $p + kq$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und bezeichne die Zeilen der so erhaltenen Matrix mit $Z_1, Z_2, \ldots$ [4]) Wir definieren nun eine Folge a_n folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= r_l \quad \text{für} \quad n \in Z_l \quad (n \neq p + kq) \\ a_n &= -C_k(a, b, p, q) \,.\, 2^{2^k} \quad \text{für} \quad n = p + kq \end{aligned}\right\} \quad (l = 1, 2, \ldots;\quad k = 1, 2, \ldots).$$

Hierbei sind die C_k passend gewählte Konstante, welche man von einem Index $k = k(a, b, p, q)$ an z. B. stets gleich 1 wählen kann. Ist nämlich $p = s \,.\, q + t$ $(s = 1, 2, \ldots, 0 \leqq t < q)$, dann wird von einem passenden k an

$$2^{2^k} - \sum_{\varrho=1}^{s} 2^{2^{k-\varrho}} > 2^{2^k} - s\, 2^{2^{k-1}}$$

beliebig groß, so daß schließlich (2) für $C_k = 1$ stets erfült ist. (Für $s = 0$, d. h. $p < q$ ist der Schluß noch einfacher).

Wenn (a, b) ein unendliches Intervall ist, sind triviale Modifikationen nötig.

Beweis des Satzes 2: Die Behauptung dieses Satzes ist eine unmittelbare Folgerung aus Hilfssatz 1. Wäre nämlich $\overline{\lim}\, a_k = \infty$, dann könnte wegen (3) die rechte Seite der Ungleichung (4) für eine passende Indizesfolge $n_1, n_2, \ldots$ beliebig groß gemacht werden, während die linke Seite z. B. für $m = 1$ sicherlich beschränkt ist.

Beweis des Satzes 3: Wir erledigen zunächst die einfachere auf den Fall

$$(p, q) = s > 1 \tag{36}$$

bezügliche Behauptung. Zu diesem Zwecke definieren wir eine Klasse von Folgen $\{a_m\}$ dieser: Art Es sei

$$a_{k+ls} = k + a^{k+ls} \qquad (k = 1, \ldots, s;\ l = 0, 1, \ldots,\ 0 \leqq a < 1).$$

Für $a = 0$ ist offenbar (2) stets mit dem Gleichheitszeichen erfüllt, für $a > 0$ gilt dort stets das Größerzeichen wie man dem Hilfssatz 4 sofort entnimmt. [5]) Offensichtlich besitzen die so definierten Folgen die Häufungsstellen $1, 2, \ldots, s$.

[4]) Offensichtlich enthält jede Zeile der in [3]) erwähnten Matrix nur endlich viele Zahlen der Form $p + kq$.

[5]) Der Hilfssatz 4 besagt mehr als hier gebraucht wird. Man erhält aber, falls man a im Intervall $-\frac{1}{2} < a < 0$ wählt, analog Beispiele oszillierender Folgen $\{a_k\}$, welche an Stelle von (2) mit $(p, q) = s > 1$ einer Kette von Ungleichhungen genügen, in der abwechselnd $\geqq$ und $\leqq$ steht. Übrigens gibt es in diesem Fall auch schon für $p = 1, q = 1$ triviale Beispiele von unbestimmter Divergenz. Wir gehen aber im weiteren nicht mehr darauf ein.

Im Fall $(p, q) = 1$ nehmen wir zuerst in $B_m - B_{m+1} = \varepsilon_m$ alle $\varepsilon_m = 0$ an. Dann gehorcht a_n der linearen Differenzengleichung

$$q \cdot \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} - p \sum_{k=1}^{q} a_{n+p+k} = 0. \tag{37}$$

Die charakteristische Gleichung von (37) lautet nach Division durch den trivialen Faktor $(x-1)$

$$q \sum_{k=1}^{p} k \cdot x^{k-1} + p \sum_{k=1}^{q} (q-k) x^{p+k-1} = 0 \tag{38}$$

mit den Nullstellen t_j $(j = 1, 2, \ldots, p+q-2)$.
Nach Hilfssatz 5 gilt $|t_j| \neq 1$ und $|t_j| \neq |t_k|$ für $j \neq k$, es sei denn $t_j = \bar{t}_k$.
Die allgemeine Lösung von (37) lautet somit

$$a_n = \sum_{j=0}^{p+q-2} c_j t_j^n \qquad (t_0 = 1) \tag{39}$$

mit willkürlichen c_j. Notwendig und hinreichend für die Konvergenz von a_n ist $c_j = 0$ für $|t_j| > 1$. Wegen (3) muß dies stets erfüllt sein.

Es sei nun in $B_m - B_{m+1} = \varepsilon_m$ eines der ε, etwa $\varepsilon_i \neq 0$, jedoch alle andern ε aber gleich Null. An Stelle von (37) tritt also die inhomogene Gleichung

$$q \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} - p \sum_{k=1}^{q} a_{n+p+k} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq i, \\ \varepsilon_i & \text{für } n = i. \end{cases} \tag{40}$$

Wir haben eine partikuläre Lösung $a_m(\varepsilon_i)$ dieser Gleichung zu finden. Dazu setzen wir

$$a_m = 0 \text{ für } m < i + q + p - 1 \tag{41}$$

und

$$-p \cdot a_{i+p+q} = \varepsilon_i.$$

Ab $n = i + 1$ gilt wieder die Differenzengleichung (37) mit der Lösung (39), die wir so schreiben wollen

$$a_n = \sum_{j=0}^{p+q-2} (c_j t_j^{i+1}) \cdot t_j^{n-i-1} = \sum_{j=0}^{p+q-2} d_{ij} t_j^{n-i-1},$$

und die d_{ij} bestimmen sich aus der Anfangsbedingung

$$a_{i+1} = a_{i+2} = \cdots = a_{i+p+q-1} = 0,$$

$$a_{i+p+q} = -\frac{\varepsilon_i}{p}.$$

Das liefert das Gleichungssystem

$$\sum_{j=0}^{p+q-2} d_{ij} t_j^{n-i-1} = \begin{cases} 0 & \\ & \text{für} \quad \begin{matrix} n = i+1, \ldots, i+p+q-1; \\ n = i+p+q, \end{matrix} \\ -\dfrac{\varepsilon_i}{p} & \end{cases}$$

mit der Lösung

$$d_{ij} = -\frac{\varepsilon_i V_j}{p V} = \varepsilon_i D_j .$$

Dabei ist V eine Abkürzung für die Determinante

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & t_1 & t_2 & \dots & t_{p+q-2} \\ 1 & t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_{p+q-2}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_1^{p+q-2} & t_2^{p+q-2} & \dots & t_{p+q-2}^{p+q-2} \end{vmatrix}$$

und V_j ist das algebraische Komplement von t_j^{p+q-2} in V. (Was dabei unter V_0 zu verstehen ist, ist evident). V ist die Vandermonde'sche Determinante der charakteristischen Gleichung und daher (nach Hilfssatz 5) $\neq 0$. Damit lautet die Lösung des speziellen inhomogenen Systems (40)

$$a_n = \sum_{j=0}^{p+q-2} (c_j t_j^n + \varepsilon_i D_j t_j^{n-i-1}),$$

wobei wegen (41) t_j^{n-i-1} für $n-i-1<0$ durch 0 zu ersetzen ist. Für einen späteren Zweck setzen wir noch

$$t_j c_j = D_j \varepsilon_{0j}$$

und erhalten

$$a_n = \sum_{j=0}^{p+q-2} D_j(\varepsilon_{0j} t_j^{n-1} + \varepsilon_i t^{n-i-1}). \tag{42}$$

Jetzt sind wir so weit, daß wir die Differenzengleichung $B_m - B_{m-1} = \varepsilon_m$ für beliebige ε_i lösen können. Wir brauchen dazu nur die Lösungen der inhomogenen Systeme (40) für $i = 1, 2, \dots$ zu überlagern. An Hand von (42) überzeugt man sich, daß die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung folgende Gestalt besitzt:

$$a_n = \sum_{j=0}^{p+q-2} D_j \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i t^{n-i-1} \qquad (\varepsilon_0 \text{ für } \varepsilon_{0j}) \tag{42}$$

mit $t_j^{n-i-1} = 0$ für $n-i-1<0$.

Zum Beweis des Satzes 3 bleibt nur noch zu zeigen, daß (43) niemals oszillieren kann. Dazu stellen wir zuerst fest, daß die einzelnen Glieder

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i t_j^{n-i-1} \tag{44}$$

niemals oszillieren.

1) Für $t_0 = 1$ ist das klar, weil $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i$ nach Hilfssatz 3 konvergiert.

2) Für $|t_j| < 1$ geht $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i t_j^{n-i-1}$ gegen Null für $n \to \infty$. Denn zunächst

gilt wegen $\varepsilon_i \geqq 0$ für $i = 1, 2, \ldots$

$$\left|\sum_{i=r}^{\infty} \varepsilon_i t_j^{n-i-1}\right| \leqq \sum_{i=r}^{\infty} \varepsilon_i |t_j^{n-i-1}| \leqq \sum_{i=r}^{\infty} \varepsilon_i$$

für jedes $r > 0$ und wegen der Konvergenz von $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i$ wird

$$\left|\sum_{i=r}^{\infty} \varepsilon_i t_j^{n-i-1}\right| < \varepsilon$$

für hinreichend großes r. Ebenso kann man wegen $|t_j| < 1$ für hinreichend großes n

$$\left|\sum_{i=0}^{r-1} \varepsilon_i t_j^{n-i-1}\right| < \varepsilon$$

erreichen, womit alles bewiesen ist.

3) $|t_j| > 1$. Beweis indirekt. Wenn die Folge

$$a'_n = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i t_j^{n-i-1}$$

oszilliert, ohne eine eigentlich divergente Teilfolge zu enthalten, dann besitzt sie mindestens einen Häufungspunkt $3T \neq 0$. Ferner gibt es einen Index n, so daß

$$\sum_{i=n}^{\infty} \varepsilon_i = R < |T|$$

und

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i t_j^{n-i-1}\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i t_j^{n-i-1}\right| \qquad = S > |2T|.$$

Daraus folgt

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i t_j^{n+r-i-1}\right| = \left| t_j^r \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i t_j^{n-i-1} + \sum_{i=n}^{\infty} \varepsilon_i \cdot t_j^{n+r-i-1}\right| \geqq$$

$$\geqq |t_j^r| \cdot S - \left|\sum_{i=n}^{\infty} \varepsilon_i t_j^r\right| = |t_j^r| \, |S - R| > |t_j^r| \, |T| \to \infty$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wenn nun alle Summen (44) konvergieren, dann konvergiert auch (43), und folglich ist Satz 3 bewiesen. Wenn aber einige Summen (44) divergieren, dann müssen diese wie eben gezeigt wurde, notwendig eine dem Betrage nach divergente Teilfolge enthalten. Dann enthält aber (43) ebenfalls dem Betrage nach divergente Teilfolgen. Dies sieht man so ein: Nach Hilfssatz 5 gibt es unter den t_j genau ein größtes reelles t_i oder genau zwei größte konjugiert komplexe $t_i, \bar{t}_i$. Nach 3) divergiert eine Teilfolge der zugehörigen Summe (44) wie $C|t_i^n|$. Die übrigen Summen (44) wachsen aber höchstens wie

$$|t_j|^n \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i$$

mit $|t_j| < |t_i|$ und $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i < \infty$.

Das heißt also, in (43) „gibt stets die größte Wurzel (oder das größte Wurzelpaar) den Ausschlag". Falls mindestens eine Summe

$$a'_n = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i t_j^{n-i-1}$$

eine dem Betrage nach divergente Teilfolge enthält, dann ist dies auch für $\{a_n\}$ der Fall. Wegen (3) ist dies aber ausgeschlossen. Damit ist der Beweis des Satzes 3 vollendet.

Beweis des Satzes 4: Es gilt jetzt (36), also kann man $p = g \cdot s, q = l \cdot s$ mit $(g, l) = 1$ setzen. Führt man die Bezeichnung

$$\sum_{v=1}^{s} a_{(m-1)s+v} = A_m^{(1)} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

ein, dann läßt sich die Menge der Ungleichungen (2) mit $k \equiv 0 \pmod{s}$ so schreiben

$$\frac{A_{m+1}^{(1)} + \cdots + A_{m+g}^{(1)}}{g} \geqq \frac{A_{m+g+1}^{(1)} + \cdots + A_{m+g+l}^{(1)}}{l} \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Wegen $(g, l) = 1$ folgt nach Satz 3 die Konvergenz der Folge $A_m^{(1)}$. Definiert man analog

$$\sum_{v=1}^{s} a_{(m-1)s+n+v-1} = A_m^{(n)} \qquad (n = 2, \ldots, s;\, m = 1, 2, \ldots)$$

erhält man ebenso die Konvergenz der Folgen $A_m^{(n)}$ $(n = 2, \ldots, s)$. Nun gilt aber natürlich

$$\lim_{h \to \infty} \frac{\sum_{v=0}^{h} \binom{h+r-1-v}{r-1} A_{v+1}^{(1)}}{\binom{h+r}{r}} = A \text{ (sic!)}$$

Also wegen der Beschränktheit der $A_v^{(1)}$ und wegen $\binom{h+\alpha}{\alpha} = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + o(h^\alpha)$ $(\alpha \geqq 1)$ auch

$$\frac{\sum_{v=0}^{h} A_{v+1}^{(1)} (h-v)^{n-1} / \Gamma(n)}{h^n / \Gamma(r+1)} = s \cdot \frac{\sum_{v=0}^{h} A_{v+1}^{(1)} [s(h-v)]^{n-1} / \Gamma(r)}{(hs)^r / \Gamma(r+1)} \to A.$$

(Für $v = h$ setze man $(h-v)$ z. B. $= 1$). Beachtet man nun (3) sowie

$$(hs-t)^{r-1} - (hs)^{r-1} = o(hs)^{r-1} = o(h)^{r-1} \qquad (0 \leqq |t| < s),$$

dann hat man auch

$$\frac{\sum_{v=0}^{h} \binom{h+r-1-v}{r-1} a_{v+1}}{\binom{h+r}{r}} \to \frac{A}{s}.$$

Hieraus kann man übrigens auch entnehmen, daß $A_m^{(n)} \to A$ für alle $n = 1, \dots, s$ gilt.

Somit kann man noch folgende Bemerkung machen: Genügt eine reelle Zahlenfolge (2) mit (36) und (3), und greift man aus ihr immer wieder irgend s aufeinanderfolgende Glieder heraus und bildet jeweils ihre Summe, dann konvergiert die Folge dieser k-gliedrigen Summen unabhängig von der Auswahl gegen denselben Wert.

Aus dieser Bemerkung kann man noch folgern, daß die in Satz 4 betrachteten Folgen höchstens s Häufungsstellen haben. Diese Folgerung ergibt sich unmittelbar für $s = 2$. Ist $s \geqq 2$ und sonst beliebig, dann schreibt man zum Beispiel $A_m^{(1)}$ in der Form $A_m^{(1)} = \bar{A}_m^{(1)} + a_{ms}$ mit $\bar{A}_m^{(1)} = \sum_{k=1}^{s-1} a_{(m-1)s+k}$. Die Ungleichung (2) mit $k \equiv 0 \pmod s$ kann man nun in der Gestalt schreiben

$$\frac{\bar{A}_{m+1}^{(1)} + a_{(m+1)s} + \cdots + \bar{A}_{m+g}^{(1)} + a_{(m+g)s}}{2g} \geqq \frac{\bar{A}_{m+g+1}^{(1)} + a_{(m+g+1)s} + \cdots + \bar{A}_{m+l+g}^{(1)} + a_{(m+l+g)s}}{2l}$$

Aus den hiezu analogen Ungleichungen für $A_{m+1}^{(s)}$ gewinnt man weiter

$$\frac{a_{(m+1)s} + \bar{A}_{m+2}^{(1)} + \cdots + a_{(m+g)s} + \bar{A}_{m+g+1}^{(1)}}{2g} \geqq \frac{a_{(m+g+1)s} + \cdots + \bar{A}_{m+l+g+1}^{(1)}}{2l}.$$

Wegen $(2g, 2l) = 2$ folgt nach dem eben Gesagten sofort, daß sowohl $\{a_{ms}\}$ als auch $\{\bar{A}_m^{(1)}\}$ für sich konvergieren muß. Ganz analog gestalten sich die Überlegungen für a_{ms+k} $(k = 1, \dots, s-1)$, woraus die Behauptung über die Zahl der Häufungsstellen für $\{a_n\}$ folgt. Wir haben beim Beweis des Satzes 3 für den Fall $(p, q) = s > 1$ gezeigt, das es Folgen gibt, welche (2) genügen und genau s Häufungspunkte besitzen.

§ 3.

Anhangsweise wollen wir noch eine Klasse von Folgen betrachten, die ebenfalls in der Arbeit[1]) von Prof. Leja erwähnt wird. Sie hängt mit den bisher betrachteten so zusammen, daß an Stelle von (1)

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq a_{n+1} \qquad (n > 1, n = 1, 2, \dots) \tag{45}$$

tritt, oder allgemeiner an Stelle von (2)

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{n+q}}{q} \qquad (q > 1, n = 1, 2, \dots).$$

Herr Leja zeigt[1]): Folgen, welche (45) genügen, verhalten sich im allgemeinen nicht links-regulär. Er konstruiert hiezu ein Beispiel einer Folge, welche (45) erfüllt, deren Limes inferior $-\infty$ und deren Limes superior 0 ist. Nun zeigt man aber sofort den

Satz 2': *Jede relle Zahlenfolge a_n, welche* (45) *erfüllt, ist nach oben beschränkt.*

Beweis: Dies ist trivial, da $a_1 \geqq a_n$ für jedes $n \geqq 2$.

Man könnte nun auf Grund des Vorhergehenden der Meinung sein, daß (45) und (3) zusammen eine hinreichende Konvergenzbedingung für die Folge a_n darstellen Das ist aber nicht der Fall. Wir zeigen nämlich den

Satz 5: *Es gibt Folgen a_n, welche* (3) *und* (45) *genügen, jedoch oszillieren.*

Beweis: a_n sei folgendermaßer definiert:

$$a_n = \beta + \frac{C_n}{n} \quad \text{für} \quad n \geqq 1, \text{ jedoch } n \neq 2^{2^m},$$

$$a_n = \alpha + \frac{C_n}{n} \quad \text{für} \quad n = 2^{2^m} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Hiebei sei $\beta > \alpha$ und die C_n sind passende positive Konstanten, welche von einem Index an z. B. identisch gleich $\beta - \alpha$ gewählt werden können. Man zählt nämlich für n aufeinanderfolgende Glieder der so erklärten Folge $O\,(\log \log n)$ Glieder der Form $\alpha + \frac{C_k}{k}$. Da aber schließlich

$$(\beta - \alpha) \frac{\log n}{n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right) > (\beta - \alpha)\left[O\left(\frac{\log \log n}{n}\right) + \frac{1}{n+1}\right]$$

richtig ist, kann man die Gültigkeit von (45) für die Folge a_n stets erreichen, *w. z. b. w.*

Übrigens sieht man sofort ein, daß Folgen, welche (45) und (3) genügen, stets $(C, 1)$ - summierbar sind. (Die arithmetischen Mittel fallen monoton).

(Eingegangen am 15. Juni 1951.)