Über gewisse Erweiterungen von periodischen Ringen.

Von I. SZÉLPÁL in Szeged.

An einer anderen Stelle [4][1]) habe ich gezeigt, daß sich zu jedem Ring[2]) R mit mehr als einem Element ein geeigneter Erweiterungsring konstruieren läßt, in welchem der Unterring R nicht als ein Ideal enthalten ist. Es ist wesentlich, daß dieser Erweiterungsring immer Elemente von unendlicher additiven Ordnung enthält. Gerade mit dieser Tatsache steht in engem Zusammenhang ein Umstand, der zeigt, daß der Inhalt der obigen Aussage nicht ganz selbstverständlich ist. Beschränken wir uns nämlich nur auf *periodische Ringe,* so gilt ein ähnlicher Satz schon nicht mehr, wie wir gleich zeigen werden. Dabei soll unter einem periodischen Ring ein Ring mit periodischer Additionsgruppe — d. h. ein Ring mit lauter Elementen von endlicher additiven Ordnung — verstanden werden.

Betrachten wir die (additiv geschriebene) PRÜFERsche Gruppe vom Typ (p^∞), d. h. die durch die unendlich vielen Elemente $c_1 \neq 0, c_2, c_3, \dots$ mit den Relationen

$$pc_1 = 0,\ pc_2 = c_1,\ pc_3 = c_2, \dots$$

erzeugte Gruppe, wobei p eine beliebige Primzahl bezeichnet. Diese Gruppe $Z(p^\infty)$, sowie die direkten Summen (mit einer beliebigen Anzahl von Summanden) $\Sigma Z(p_\nu^\infty)$ solcher Gruppen haben unter allen periodischen Gruppen G die charakteristische Eigenschaft, daß in ihnen jede Gleichung $nx = g \in G$ mit einer beliebig vorgeschriebener natürlichen Zahl n eine Lösung $x \in G$ besitzt. Nehmen wir nun eine solche Gruppe $G = \Sigma Z(p_\nu^\infty)$ und machen wir diese zu einem Ring — genauer gesprochen zu einem *Zeroring* — indem wir das Produkt von je zwei Elementen der Gruppe G durch 0 definieren. Dann läßt sich leicht zeigen, daß sich der so erhaltene Ring R in irgendeien periodischen Ring nur als Ideal einbetten läßt. Sei nämlich S ein beliebiger periodischer Erweiterungsring von R. Dann gilt $ns = 0$ für irgendein Element $s \in S$ mit einer passenden natürlichen Zahl n. Andererseits schreibt sich jedes Element $r \in R$ (wegen der erwähnten charakteristischen Eigenschaft der Addi-

[1]) Die Nummern in eckigen Klammern beziehen sich auf die Arbeiten, die im Literaturverzeichnis am Ende dieser Note angeführt sind.

[2]) Es sind nicht nur kommutative Ringe gemeint.

tionsgruppe von R) in der Form $r = nr'$ ($r' \in R$). Demnach ist $rs = nr' \cdot s = r' \cdot ns = 0 = ns \cdot r' = s \cdot nr' = sr$, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Zugleich wurde (im Spezialfall $S = R$) auch die schon bekannte Tatsache nachgewiesen, daß ein Ring mit einer Gruppe $\Sigma Z(p_\nu^\infty)$ als Additionsgruppe notwendigerweise ein Zeroring ist [3].

Nun zeigen wir umgekehrt, daß die angegebenen Ringe R die einzigen mit der betrachteten Eigenschaft sind. Es gilt nämlich der

Satz: *Der periodische Ring R ist dann und nur dann ein Ideal von jedem möglichen periodischen Erweiterungsring, wenn R ein Zeroring mit einer Additionsgruppe vom Typ $\Sigma Z(p_\nu^\infty)$ ist.*

Zum Beweis dieses Satzes brauchen wir nur noch folgendes zu zeigen: Ist der periodische Ring R entweder kein Zeroring, oder ein Zeroring mit einer Additionsgruppe, die sich nicht in der Form $\Sigma Z(p_\nu^\infty)$ darstellen läßt, so kann man einen solchen periodischen Erweiterungsring S von R konstruieren, in dem R kein Ideal ist. Demnach unterscheiden wir zwei Fälle.

Erster Fall: R ist kein Zeroring, d. h. es gibt Element $r \in R$, $r' \in R$ mit $rr' \neq 0$. Wir betrachten die Menge S aller Paare $[r_1, r_2]$ mit $r_1, r_2 \in R$, und machen S zu einem Ring, indem wir Gleichheit, Addition und Multiplikation für Elemente von S folgendermaßen definieren:

$[r_1, r_2] = [r_1', r_2']$ dann und nur dann, falls $r_1 = r_1'$ und $r_2 = r_2'$;

$$[r_1, r_2] + [r_1', r_2'] = [r_1 + r_1', r_2 + r_2'];$$

$$[r_1, r_2] \cdot [r_1', r_2'] = [r_1 r_1' + r_2 r_2', r_1 r_2' + r_2 r_1'].$$

Die Elemente $[r, 0]$ bilden einen, laut der Zuordnung $[r, 0] \longleftrightarrow r$ zu R isomorphen Unterring von S, der also mit R identifiziert werden kann. Hierdurch wird S zu einem Erweiterungsring von R, der die gewünschte Eigenschaft hat, da das Produkt $[r_1, 0] \cdot [0, r_2'] = [0, r_1 r_2']$ im Falle $r_1 r_2' \neq 0$ nicht in R liegt.

Zweiter Fall: R ist ein periodischer Zeroring mit einer Additionsgruppe G, die sich nicht in der Form $\Sigma Z(p_\nu^\infty)$ darstellen läßt. Nach einem bekannten Satz[3]) besitzt G in diesem Fall einen zyklischen direkten Summanden $\{a\}$ von einer Primzahlpotenzordnung p^α:

$$G = \{a\} + H. \tag{1}$$

Dabei ist $\{a\}$ zugleich ein Zeroring (nämlich ein Unterring von R) und man kann $\{a\}$ in einen Ring A mit $p^{3\alpha}$ Elementen derart einbetten, daß $\{a\}$ kein Ideal in A ist. Diesen Ring A definieren wir als die Menge aller Tripel $[ka, la, m]$ mit ganzen rationalen Zahlen k, l, m durch die Vorschrift:

$[ka, la, m] = [k'a, l'a, m']$ dann und nur dann, falls $k \equiv k'$, $l \equiv l'$, $m \equiv m'$ (mod p_α);

$$[ka, la, m] + [k'a, l'a, m'] = [(k + k')a, (l + l')a, m + m'];$$

$$[ka, la, m] \cdot [k'a, l'a, m'] = [0, (km' + lm' + k'm + l'm)a, mm'].$$

---

[3]) Siehe [2]. Dasselbe Resultat folgt auch aus den tiefgehenden Sätzen von Kulikoff in [1].

Die Elemente $[a, 0, 0]$ von A bilden einen zu $\{a\}$ isomorphen Unterring in A, den wir mit $\{a\}$ identifizieren. Wegen $[a, 0, 0] \cdot [0, 0, 1] = [0, a, 0]$ ist aber $\{a\}$ kein Ideal im so gewonnenen Erweiterungsring A. Bilden wir nun die direkte Summe $S = A + H$ des Ringes A und des Zeroringes H. Dann ist R nach (1) ein Unterring, doch kein Ideal von S, wie auf Grund der vorigen ohne weiteres zu sehen ist. Damit ist der Beweis vollendet.

Literaturverzeichnis.

[1] L. Kulikoff, Zur Theorie der Abelschen Gruppen von beliebiger Mächtigkeit. *Math. Sbornik N. S.* **9 (51)**, (1941), 165—181.

[2] T. Szele, Sur la décomposition des groupes abéliens. *C. R. Acad. Sci. Paris* **229** (1949), 1052—1053.

[3] T. Szele, Zur Theorie der Zeroringe. *Math. Annalen* **121** (1949), 242—246.

[4] I. Szélpál, Über Ringerweiterungen. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **14** (1951), 107—108.

(Eingegangen am 15. August 1951.)