Über das arithmetisch-geometrische Mittel.

Von T. FARAGÓ in Budapest.

§ 1. Einleitung.

Es sei die unendliche Matrix

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots \\ b_0, b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots \end{matrix} \right\|$$

nach dem LANGRANGE-GAUẞschen Algorithmus

$$(2) \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

gebildet, wo $a_0 = a$, $b_0 = b$ beliebige komplexe Zahlen sind. Die Anzahl der möglichen Zahlenpaare a_n, b_n ist wegen der Zweideutigkeit der Quadratwurzel 2^n, mithin gibt es unedlich viele Matrizen mit denselben Anfangselementen a, b. Bekanntlich haben die Folgen (a_n) und (b_n) in einer Matrix einen gemeinsamen Grenzwert $M(a, b)$. Die Zahl $M(a, b)$ ist *ein arithmetisch-geometrisches Mittel* [1]) von a, b. Dabei hängt der Wert $M(a, b)$ nicht nur von a, b, sondern auch von der Wahl der Matrix (1) ab.

Bezeiche α_n den Winkel $\sphericalangle a_n, 0, b_n$ mit $0 \leqq \alpha_n \leqq \pi$. Wir nennen die Matrix (1) *normal*, wenn für jedes n der Punkt b_{n+1} im Winkelraum α_n liegt. Den zugehörigen Wert $M(a, b)$ bezeichnet man mit $\overline{M}(a, b)$; diesen Wert wollen wir den *Hauptwert* des arithmetisch-geometrischen Mittels nennen. Die *Normalmatrix* und folglich der Hauptwert $\overline{M}(a, b)$ ist durch a, b eindeutig bestimmt, ausgenommen den Fall $\alpha_0 = \pi$; dann gibt es zwei Normalmatrizen und zwei Werte von $\overline{M}(a, b)$, nämlich $\overline{M}(a_1, b_1)$ und $\overline{M}(a_1, -b_1)$.

Sind sämtliche Elemente der Matrix (1) reelle Zahlen, so gelten die Ungleichungen

$$(3) \qquad b_n \leqq a_n,$$

$$(4) \qquad a_{n+1} \leqq a_n, \quad b_{n+1} \geqq b_n.$$

---

[1]) GAUẞ-GEPPERT, Nachlaß zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion. (Leipzig, 1927) Siehe noch L. DÁVID, Aritmetisch-geometrisches Mittel und Modulfunktion. *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **159** (1928), 154–170.

Es entsteht die Frage, ob es gewisse Ungleichungen, die man als Verallgemeinerungen von (3) und (4) ansehen kann, auch für allgemeine Normalmatrizen gelten, wenn nämlich a_0, b_0 beliebige komplexe Zahlen sind. Es ist leicht einzusehen, daß $|b_n| \leqq |a_n|$ in allgemeinen nicht gilt, und eine eingehende Erörterung lehrt, daß die Gültigkeit dieser Ungleichungen nicht einmal für fast alle n im allgemeinen behauptet werden kann. Wir haben aber solche Ungleichungen gefunden, die als Verallgemeinerungen von (4) für beliebige Normalmatrizen betrachtet werden können (Satz 1). Im Satz 2 geben wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$|\overline{M}(a, b)| > |\overline{M}(a', b')|$$

gilt. Als eine Anwendung dieses Satzes geben wir einen einfachen Beweis für die schon von GAUß bemerkte Eigenschaft [2]) des Hauptwertes $\overline{M}(a, b)$:

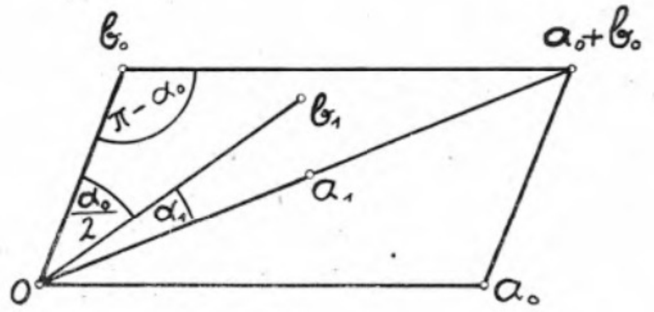
$$|\overline{M}(a, b)| = \text{Max}\,|M(a, b)|. \tag{5}$$

§ 2. Vorbereitungen.

Eine Matrix (1), bei der b_{n+1} für genau k Werte von n außerhalb des Winkelraumes α_n liegt, bezeichnen wir als *k-mal verzweigte Matrix*. Im Falle

$$ab(a^2 - b^2) \neq 0 \tag{6}$$

führen die endlich-vielmal verzweigte Matrizen und nur diese zu einem Grenzwert $\neq 0$. [3]) Wir wollen im folgenden die Gültigkeit von (6) voraussetzen.



Die Figur zeigt, wie man aus den Anfangselementen a_0, b_0 die Punkte a_1, b_1 bei einem Normalmatrix gewinnen kann. Man entnimmt aus der Figur die Gleichungen

$$\frac{\sin\left(\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1\right)}{\sin(\pi - \alpha_0)} = \frac{|a_0|}{2|a_1|}, \quad \frac{\sin\left(\frac{\alpha_0}{2} - \alpha_1\right)}{\sin(\pi - \alpha_0)} = \frac{|b_0|}{2|a_1|}.$$

[2]) Siehe GAUß-GEPPERT [1]) S. 137. Der Hauptwert des arithmetisch-geometrischen Mittels wird von GAUß als das „einfachste Mittel" bezeichnet.

[3]) Siehe DÁVID [1]) S. 157.

Durch Addition ergibt sich

$$\cos\alpha_1 = \frac{|a_0|+|b_0|}{2|a_1|}\cos\frac{\alpha_0}{2}$$

und allgemeiner

$$\cos\alpha_{n+1} = \frac{|a_0|+|b_0|}{2|a_{n+1}|}\cos\frac{\alpha_n}{2}, \tag{7}$$

woraus

$$\alpha_1 \leqq \frac{\alpha_0}{2}, \quad \alpha_n \leqq \frac{\alpha_{n-1}}{2},$$

also

$$\alpha_n \leqq \frac{\alpha_0}{2^n}$$

folgt. Hier gilt das Gleichheitszeichen nur in den Fällen $\alpha_0 = 0, \pi$.

§ 3. Sätze.

Satz 1. *Es gelten für eine beliebige Normalmatrix* (1) *die Ungleichungen*

$$\frac{|a_0|+|b_0|}{2} \geqq \frac{|a_1|+|b_1|}{2} \geqq \ldots \geqq \frac{|a_n|+|b_n|}{2} \geqq |\overline{M}(a,b)|, \tag{8}$$

$$|\sqrt{a_0b_0}|\cos\frac{\alpha_0}{2} \leqq |\sqrt{a_1b_1}|\cos\frac{\alpha_1}{2} \leqq \ldots \leqq |\sqrt{a_nb_n}|\cos\frac{\alpha_n}{2} \leqq \ldots \leqq |\overline{M}(a,b)|. \tag{9}$$

Beweis. (8) ist eine unmittelbare Folge der wohlbekannten Ungleichung

$$|\sqrt{a_nb_n}| \leqq \frac{|a_n|+|b_n|}{2}, \tag{10}$$

denn daraus ergibt sich

$$|a_{n+1}|+|b_{n+1}| = \frac{|a_n+b_n|}{2} + |\sqrt{a_nb_n}| \leqq |a_n|+|b_n|.$$

Jetzt wollen wir die Gültigkeit (9) beweisen. Sei der Kürze halber

$$A = |\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}}|\cos\frac{\alpha_{n+1}}{2};$$

dann ist

$$A = |\sqrt[4]{a_nb_n}| \,.\, |\sqrt{a_{n+1}}| \,.\, \sqrt{\frac{1+\cos\alpha_{n+1}}{2}},$$

woraus nach (7)

$$A = |\sqrt[4]{a_nb_n}| \sqrt{\frac{1}{2}\left(|a_{n+1}| + \frac{|a_n|+|b_n|}{2}\cos\frac{\alpha_n}{2}\right)}$$

folgt. Andererseits ergibt sich aus (7) (wegen $0 \leqq \cos\alpha_{n+1} \leqq 1$)

$$|a_{n+1}| \geqq \frac{|a_n|+|b_n|}{2}\cos\frac{\alpha_n}{2}.$$

Folglich gilt

$$A \geqq |\sqrt[4]{a_n b_n}| \cdot \sqrt{\frac{|a_n|+|b_n|}{2} \cos\frac{\alpha_n}{2}},$$

und man erhält auf Grund von (10)

$$A = |\sqrt{a_{n+1} b_{n+1}}| \cos\frac{\alpha_{n+1}}{2} \geqq |\sqrt{a_n b_n}| \cdot \sqrt{\cos\frac{\alpha_n}{2}} \geqq |\sqrt{a_n b_n}| \cos\frac{\alpha_n}{2}.$$

Damit ist auch (9) bewiesen.

Satz 2. *Betrachtet man die aus beliebigen komplexen Zahlenpaaren a, b und a', b' ausgehenden Normalmatrizen* (1), *so ist zur Gültigkeit von*

$$|\overline{M}(a, b)| > |\overline{M}(a', b')| \tag{11}$$

die Existenz solcher natürlichen Zahlen i, j notwendig und hinreichend, für die

$$\left.\begin{aligned} |a_i|^2+|b_i|^2 &\geqq |a_j'|^2+|b_j'|^2, \\ |a_i b_i| \cos\alpha_i &\geqq |a_j' b_j'| \cos\alpha_j' \\ |a_i b_i| &\geqq |a_j' b_j'| \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

derart bestehen, daß wenigstens in einer dieser drei Ungleichungen nicht das Gleichheitszeichen gilt.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung. Nehmen wir also die Gültigkeit von (11) an. Da

$$\lim a_n = \lim b_n = \overline{M}(a, b), \quad \lim a_n' = \lim b_n' = \overline{M}(a', b')$$

ist, folgt aus (11), daß es eine natürliche Zahl N gibt, so daß für $n > N$

$$|a_n| > |a_n'|, \quad |b_n| > |b_n'| \tag{13}$$

gilt. Andererseits ergibt sich aus den Gleichungen

$$\lim\, |a_n b_n| \cos\alpha_n = |\overline{M}(a, b)|^2, \quad \lim\, |a_n' b_n'| \cos\alpha_n' = |M(a', b')|^2$$

die Existenz einer natürlichen Zahl N', so daß für $n > N'$

$$|a_n b_n| \cos\alpha_n > |a_n' b_n'| \cos\alpha_n' \tag{14}$$

ist. Wegen (13) und (14) gelten für $n > N, N'$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |a_n|^2+|b_n|^2 &> |a_n'|^2+|b_n'|^2, \\ |a_n b_n| \cos\alpha_n &> |a_n' b_n'| \cos\alpha_n', \\ |a_n b_n| &> |a_n' b_n'|, \end{aligned}$$

d. h. die Ungleichungen (12) mit $i = j = n$.

Jetzt wollen wir beweisen, daß die Bedingung im Satz 2 auch hinreichend ist. Dazu zeigen wir: wenn (12) in der beschriebenen Art gilt, so bestehen

$$\left.\begin{aligned} |a_{i+2}| &> |a_{j+2}'|, \\ |b_{i+2}| &> |b_{j+2}'|, \\ |a_{i+2} b_{i+2}| \cos\alpha_{i+2} &> |a_{j+2}' b_{j+2}| \cos\alpha_{j+2}'. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Es ist nach (7)

$$|a_{i+1} b_{i+1}| \cos \alpha_{i+1} = |a_{i+1} \sqrt{a_i b_i}| \frac{|a_i| + |b_i|}{2|a_{i+1}|} \cos \frac{\alpha_i}{2},$$

und dies ergibt durch die Formel

$$\cos \frac{\alpha_i}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha_i}{2}},$$

daß

$$|a_{i+1} b_{i+1}| \cos \alpha_{i+1} = \frac{|a_i| + |b_i|}{2} \cdot \sqrt{\frac{|a_i b_i| (1 + \cos \alpha_i)}{2}} \tag{16}$$

gilt. Ebenso gewinnt man

$$|a'_{j+1} b'_{j+1}| \cos \alpha'_{j+1} = \frac{|a'_j| + |b'_j|}{2} \cdot \sqrt{\frac{|a'_j b'_j| (1 + \cos \alpha'_j)}{2}}. \tag{17}$$

Nun folgt aus (12) $|a_i| + |b_i| \geqq |a'_j| + |b'_j|$, d. h. auf Grund von (16) und (17)

$$|a_{i+1} b_{i+1}| \cos \alpha_{i+1} > |a'_{j+1} b'_{j+1}| \cos \alpha'_{j+1}.$$

Es ist ferner

$$4 |a_{i+1}|^2 = |a_i|^2 + |b_i|^2 + 2 |a_i b_i| \cos \alpha_i, \quad |b_{i+1}|^2 = |a_i b_i|, \tag{19}$$

$$4 |a'_{j+1}|^2 = |a'_j|^2 + |b'_j|^2 + 2 |a'_j b'_j| \cos \alpha'_j, \quad |b'_{j+1}|^2 = |a'_j b'_j|. \tag{20}$$

Est folgt also nach (12), daß entweder

$$|a_{i+1}| > |a'_{j+1}|, \quad |b_{i+1}| \geqq |b'_{j+1}|, \tag{21}$$

oder

$$|a_{i+1}| \geqq |a'_{j+1}|, \quad |b_{i+1}| > |b'_{j+1}| \tag{22}$$

gilt, je nachdem das Gleicheitszeichen in einer der beiden ersten, bzw. in der dritten der Ungleichungen (12) nicht gilt. Schreiben wir jetz $i+1$, $j+1$ in den Formeln (16), (17), (19), (20) statt i, j, so ergibt sich aus (18), (21) und (22) ähnlicherweise (15). Daraus folgert man durch vollständige Induktion, daß für jedes $m \geqq 2$

$$|a_{i+m}| > |a'_{j+m}|, \quad |b_{i+m}| > |b'_{j+m}|,$$
$$|a_{i+m} b_{i+m}| \cos \alpha_{i+m} > |a'_{j+m} b'_{j+m}| \cos \alpha'_{j+m}$$

ist. Man sieht daraus, daß

$$|\overline{M}(a, b)| \geqq |\overline{M}(a', b')|$$

gilt. Wir wollen uns jetzt noch von dem Gleichheitszeichen befreien. Dazu wählen wir eine Zahl q derart, daß

$$1 > q > \max \left\{ \left| \frac{a'_{j+2}}{a_{i+2}} \right|, \left| \frac{b'_{j+2}}{b_{i+2}} \right|, \left| \sqrt{\frac{a'_{j+2} b'_{j+2} \cos \alpha'_{j+2}}{a_{i+2} b_{i+2} \cos \alpha_{i+2}}} \right| \right\} \tag{23}$$

ist. Die Existenz solcher Zahlen q ist durch (15) gesichert. Führen wir jetzt das Zahlenpaar a''_{i+2}, b''_{i+2} durch

$$a''_{i+2} = q\, a_{i+2}, \quad b''_{i+2} = q\, b_{i+2} \tag{24}$$

ein, so gelten wegen (23) die Ungleichungen

$$|a''_{i+2}| > |a'_{j+2}|, \quad |b''_{i+2}| > |b'_{j+2}|, \quad |a''_{i+2} b''_{i+2}| \cos \alpha''_{i+2} > |a'_{j+2} b'_{j+2}| \cos \alpha'_{j+2},$$

also für jedes $m \geqq 2$

$$|a''_{i+m}| > |a'_{j+m}|, \quad |b''_{i+m}| > |b'_{j+m}|,$$
$$|a''_{i+m} b''_{i+m}| \cos \alpha'_{i+m} > |a'_{j+m} b'_{j+m}| \cos \alpha'_{j+m}.$$

Das bedeutet die Gültigkeit von

$$|\overline{M}(a''_{i+2}, b''_{i+2})| \geqq |\overline{M}(a'_{j+2}, b'_{j+2})| = |\overline{M}(a', b')|. \tag{25}$$

Andererseits ist nach (24)

$$\overline{M}(a''_{i+2}, b''_{i+2}) = \overline{M}(q b_{i+2}, q b_{i+2}),$$

und — wie aus der Bildungsregel (2) folgt —

$$\overline{M}(q a_{i+2}, q b_{i+2}) = q \overline{M}(a_{i+2}, b_{i+2}) = q \overline{M}(a, b).$$

So ergibt sich

$$|\overline{M}(a''_{i+2}, b''_{i+2})| = q |\overline{M}(a, b)|.$$

Daraus und aus (25) erhält man wegen $q < 1$ die Ungleichung (11).

§ 4. Eine Anwendung.

Es sei jetzt a, b ein beliebiges komplexes Zahlenpaar, mit $|a| \neq |b|$, $\alpha_0 \neq 0, \pi$ und

$$\left\| \begin{matrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_p, & \ldots, & a_r, & \ldots \\ b_0, & b_1, & b_2, & \ldots, & b_p, & \ldots, & b_r, & \ldots \end{matrix} \right\| \tag{26}$$

eine k-mal verzweigte Matrix, deren Reihen gegen den Wert $M(a, b)$ konvergieren. Hier bedeuten a_p, b_p das nach der letzen Verzweigung auftretende Zahlenpaar, also ist $p \geqq k$. Es gehöre ferner $M'(a, b)$ zu einer Matrix, die mit (26) wenigstens in den ersten $p+1$ Kolonnen übereinstimmt, aber noch mehrere Verzweigungen enthält. Wir zeigen, daß in diesem Falle

$$|M(a, b)| > |M'(a, b)| \tag{27}$$

gilt. Sei nämlich a_r, b_r $(r \geqq p)$ das letzte gemeinsame Zahlenpaar der beiden Matrizen. So gilt für die $(r+2)$-te Spalte der ersten bzw. zweiten Matrix:

$$a_{r+1} = \frac{1}{2}(a_r + b_r), \quad b_{r+1} = \sqrt{a_r b_r}, \quad 0 < \alpha_{r+1} < \frac{\pi}{2},$$

$$a'_{r+1} = a_{r+1}, \quad b'_{r+1} = -b_{r+1}; \quad \alpha'_{r+1} = \pi - \alpha_{r+1} > \frac{\pi}{2}.$$

Man erhält also

$$|a_{r+1}|^2 + |b_{r+1}|^2 = |a'_{r+1}|^2 + |b'_{r+1}|^2,$$
$$|a_{r+1} b_{r+1}| \cos \alpha'_{r+1} > |a'_{r+1} b'_{r+1}| \cos \alpha'_{r+1},$$
$$|a_{r+1} b_{r+1}| = |a'_{r+1} b'_{r+1}|,$$

woraus nach Satz 2 die Ungleichung (27) folgt. Damit ist die Richtigkeit von (5) bewiesen.

Bemerkung. Es ist leicht einzusehen, daß von zwei, k-mal verzweigten Matrizen, deren entsprechende Elemente bis zur $(k-1)$-ten Verzweigung einschließlich übereinstimmen, jene zur kleineren $|M(a, b)|$ führt, bei welcher die k-te Verzweigung mit einer genügend großen Anzahl von Schritten später, als bei der anderen, erfolgt. Vermutlich gilt auch folgendes: Diejenige der beiden Matrizen führt zum kleineren Wert von $|M(a, b)|$, die später verzweigt.

(Eingegangen am 22. August 1951.)