Mittelkante, Mittelebene, Mittelpunkt von Kanten einer Ecke.

Von GY. SZ.-NAGY in Szeged.

Eine von einem festen Punkt O (*Ecke*) ausgehende Halbgerade OA_k $(k=1,2,\ldots,n)$ heißt eine *Kante* der Ecke O. A_k ist ein (von O verschiedener) beliebiger Punkt der Kante. Die Kante OA_k hat den Einheitsvektor OE_k, wenn sie von der Einheitskugel mit dem Mittelpunkt O im Punkt E_k geschnitten wird. Die Halbgerade OM ist die *Mittelkante* der Kanten OA_k $(k=1,2,\ldots,n)$, wenn

$$\overrightarrow{OM}=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OE_k} \tag{1}$$

ist. Fällt M mit O zusammen, so ist O der *Mittelpunkt* der n Kanten. Eine Ebene durch die Ecke O ist die *Mittelebene* der n Kanten, wenn ihre Normale die Mittelkante enthält. Haben die Kanten einer Ecke einen Mittelpunkt, so sind die Mittelkante und die Mittelebene unbestimmt. Diese Definitionen lassen sich auch auf folgende Weise ausdrücken: Wird die Einheitskugel von den Kanten OA_k $(k=1,2,\ldots,n)$ in den Einheitspunkten $E_1,E_2,\ldots,E_n$ geschnitten und ist der Schwerpunkt S der Einheitspunkte von der Ecke O verschieden, so ist die Halbgerade OS die Mittelkante. Die Ebene durch O mit der Normale OS ist die Mittelebene. Es gilt $\overrightarrow{OM}=n\cdot\overrightarrow{OS}$. Die Ecke O ist Mittelpunkt, wenn sie mit S zusammenfällt.

Nach diesen Definitionen haben zwei Kanten dann einen Mittelpunkt, wenn sie entgegengesetzte Richtungen besitzen, d. h. wenn sie *Gegenkanten* sind. Der Winkel von zwei Kanten einer Ecke, die nicht Gegenkanten sind, wird von ihrer Mittelkante halbiert. Enthält eine Ebene die Kanten einer Ecke, so enthält sie auch ihre Mittelkante. Nach der Regel der Addition der Vektoren ist

$$\overrightarrow{OM}=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OE_k}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2},\ \overrightarrow{OM_1}=\sum_{k=1}^{n_1}OE_k,\ \overrightarrow{OM_2}=\sum_{k=n_1+1}^{n=n_1+n_2}\overrightarrow{OE_k}. \tag{2}$$

$\overrightarrow{OM}$ liegt in der Ebene der Vektoren $\overrightarrow{OM_1}$ und $\overrightarrow{OM_2}$. Daraus folgt der

Satz 1. *Teilt man die Kanten einer Ecke auf irgendwelche Art in zwei Gruppen ein, so fällt ihre Mittelkante in die Ebene der Mittelkanten der zwei*

Kantengruppen. Die Mittelkante einer Ecke mit n Kanten fällt in die Schnittgerade der Ebenen, die durch je eine Kante und die Mittelkante der übrigen $n-1$ Kanten gehen. Sie fällt auch in die Schnittgerade der Ebenen, die durch die Mittelkante von je zwei Kanten und durch die Mittelkante der übrigen $n-2$ Kanten gehen, u. s. w. Die Mittelkante bleibt dieselbe, wenn man von der Ecke gewiße Kanten mit Mittelpunkt entfernt. Teilt man die Kanten einer Ecke mit Mittelpunkt in zwei Kantengruppen ein, so sind die Mittelkanten der zwei Kantengruppen entweder Gegenkanten, oder beide Kantengruppen haben in ihrer Ecke einen Mittelpunkt.

Nun beweisen wir den

Satz 2. *Haben drei Kanten einer Ecke einen Mittelpunkt, so sind ihre Einheitspunkte Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks. Haben vier Kanten einer Ecke einen Mittelpunkt, so sind ihre Einheitspunkte entweder Eckpunkte eines gleichseitigen Tetraeders, oder Endpunkte von zwei Diametern eines Kreises. Die Ecke von drei bzw. vier Kanten mit dieser Lage ist Mittelpunkt der Kanten.*

Ein Tetraeder ist gleichseitig, wenn seine Seitenflächen gleiche Inhalte besitzen. Das gleichseitige Tetraeder hat die charakteristische Eigenschaft, daß seine gegenüberliegenden Kanten gleiche Längen haben.

Drei Kanten der Ecke O haben dann einen Mittelpunkt, wenn

$$\overrightarrow{OE_1}+\overrightarrow{OE_2}+\overrightarrow{OE_3}=0,$$

oder

$$\overrightarrow{OE_1}+\overrightarrow{OE_2}=-\overrightarrow{OE_3},\quad \overrightarrow{OE_1}+\overrightarrow{OE_3}=-\overrightarrow{OE_2},\quad \overrightarrow{OE_2}+\overrightarrow{OE_3}=-\overrightarrow{OE_1}$$

gelten. Dann liegen die drei Kanten in einer Ebene, und die Gegenkante jeder Kante halbiert den Winkel der übrigen zwei Kanten. Deshalb bildet jede Kante mit den übrigen zwei Kanten den Winkel $\frac{2\pi}{3}$.

Haben vier Kanten der Ecke O einen Mittelpunkt und ist $\overrightarrow{OE_i}+\overrightarrow{OE_k}=\overrightarrow{OF_{ik}}$, so gelten

$$(3)\quad \overrightarrow{OE_1}+\overrightarrow{OE_2}+\overrightarrow{OE_3}+\overrightarrow{OE_4}=\overrightarrow{OF_{12}}+\overrightarrow{OF_{34}}=\overrightarrow{OF_{13}}+\overrightarrow{OF_{24}}=\overrightarrow{OF_{14}}+\overrightarrow{OF_{23}}=0$$

Der Vektor $\overrightarrow{OF_{12}}$ bzw. $\overrightarrow{OF_{34}}$ halbiert den Winkel α_{12} bzw. α_{34} der Einheitsvektoren $\overrightarrow{OE_1}$ und $\overrightarrow{OE_2}$ bzw. $\overrightarrow{OE_3}$ und $\overrightarrow{OE_4}$ und seine Länge hat nach dem Cosinussatz das Quadrát $2+2\cos\alpha_{12}$ bzw. $2+2\cos\alpha_{34}$. $\overrightarrow{OF_{12}}$ und $\overrightarrow{OF_{34}}$ haben gleiche Längen und entgegengesetzte Richtungen. Daraus folgt die Richtigkeit von $\alpha_{12}=\alpha_{34}$ und $\overline{E_1E_2}=\overline{E_3E_4}$, da nämlich

$$\overline{E_1E_2}^2=2-2\cos\alpha_{12},\quad \overline{E_3E_4}^2=2-2\cos\alpha_{34}$$

ist. Ähnlich ergeben sich $\overline{E_1E_3}=\overline{E_2E_4}$ und $\overline{E_1E_4}=\overline{E_2E_3}$.

Daraus folgt Satz 2 unmittelbar. Aus (3) folgt nämlich, daß entweder keine Ebene durch O mehr als zwei der Punkte E_1, E_2, E_3, E_4 enthält, oder die Punkte O, E_1, E_2, E_3, E_4 in einer Ebene liegen. Nebenbei erhält man leicht den

Satz 3. *Hat die Umkugel eines gleichseitigen Tetraeders T den Durchmesser D, so ist die Summe der Quadraten der Kantenlängen von T gleich $4D^2$.*

Ist nämlich $D = 2$, so gilt

$$\begin{aligned}\overline{E_1E_2}^2 + \overline{E_1E_3}^2 + \overline{E_1E_4}^2 + \overline{E_2E_3}^2 + \overline{E_2E_4}^2 + \overline{E_3E_4}^2 &= \\ = 4\,[(1-\cos\alpha_{12}) + (1-\cos\alpha_{13}) + (1-\cos_{14})] &= \\ = 4\,[4-(1+\cos\alpha_{12}+\cos\alpha_{13}+\cos\alpha_{14})] &= 16 = 4D^2,\end{aligned}$$

weil $\alpha_{12} = \alpha_{34}$, $\alpha_{13} = \alpha_{24}$, $\alpha_{14} = \alpha_{23}$ sind und $1 + \cos\alpha_{12} + \cos\alpha_{13} + \cos\alpha_{14}$ (als die Komponente des Vektors $\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_4}$ in der Richtung $\overrightarrow{OE_1}$) nach (3) gleich Null ist.

Sind $E_1, E_2, \ldots, E_n$ aufeinanderfolgende Eckpunkte eines regelmäßigen Vielecks mit dem Mittelpunkt O, so ist O der Mittelpunkt der Kanten OE_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Wäre nämlich $\sum \overrightarrow{OE_k} = \overrightarrow{OM}$ nicht gleich Null, so würde das Vieleck und damit $\sum \overrightarrow{OE_k}$ durch eine Drehung mit dem Drehungswinkel $\frac{2\pi}{n}$ um den Mittelpunkt O in sich überführt, der Vektor $\overrightarrow{OM}$ aber nicht.

Die Ecke der Kanten besitzt eine Minimaleigenschaft. Es gilt nämlich der

Satz 4. *Ist A_k ein beliebiger (von O verschiedener) Punkt der Kante OE_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, so hat die Ecke O von den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eine kleinere Entfernungssumme, als jeder andere Punkt der Mittelebene der Kanten. Ist O Mittelpunkt der n Kanten OE_k, so ist O der Punkt mit kleinster Entfernungssumme von den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und zugleich auch von den Punkten $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$, wo A'_k ein beliebiger Punkt der Kante OA_k bezeichnet.*

Zum Beweis dieses Satzes legen wir die Ecke O bzw. die Mittelkante der Kanten OE_k in den Anfang des Koordinatensystems bzw. in die positive z-Achse. Dann verschwindet die Komponente des Vektors $\overrightarrow{OM} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{OE_k}$ in der Richtung der x- und y-Achse, d. h. die Mittelebene fällt in die xy-Ebene. Sind

$$A_k = (x_k, y_k, z_k),\ d_k = (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^{\frac{1}{2}}\ (k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$M = (\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, \zeta),$$

so gelten

$$E_k = \left(\frac{x_k}{d_k}, \frac{y_k}{d_k}, \frac{z_k}{d_k}\right),\ \xi = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{d_k} = 0,\ \eta = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{d_k} = 0,\ \zeta = \sum \frac{z_k}{d_k}.$$

Der Punkt $P=(x,y,0)$ der Mittelebene hat von den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ die Entfernungssumme

$$G(x,y)=\sum_{k=1}^{n}[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2+z_k^2]^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\overline{PA_k}.$$

Die Funktion $G(x,y)$ hat in der Ecke 0 ein Minimum, weil $G_x(0,0)=-\xi=0$ und $G_y(0,0)=-\eta=0$ ist.

Bezeichnet H den Halbierungspunkt der Strecke OQ und ist P ein beliebiger Punkt, so gilt die bekannte Ungleichung $2\,\overline{PH}\leqq\overline{PO}+\overline{PQ}$, wo das Gleichheitszeichen nur dann besteht, wenn P ein Punkt der Geraden OQ ist, der nicht innerhalb der Strecke OQ liegt. Aus dieser Ungleichung folgt, daß die Funktion $G(x,y)$ auf der Mittelebene ihr Minimum U außerhalb von O in keinem Punkt Q annimmt. Wäre nämlich $U=\sum_{k=1}^{n}\overline{OA_k}=\sum_{k=1}^{n}\overline{QA_k}$, so gälte $\sum_{k=1}^{n}\overline{HA_k}<U$, weil mindestens eine der Ungleichungen $2\,\overline{HA_k}\leqq\overline{OA_k}+$ $+\,\overline{QA_k}$ mit dem Ungleichheitszeichen gilt und deshalb $2\sum_{k=1}^{n}\overline{HA_k}<\sum_{k=1}^{n}\overline{OA_k}+$ $+\sum_{k=1}^{n}\overline{QA_k}=2U$ ist. Die Punkte A_k liegen nämlich nicht auf einer Gerade.

Der Beweis des Satzes 4 gilt auch im Falle $\zeta=0$. Dann läßt sich jede Ebene durch 0 als eine Mittelebene der Kanten betrachten. Damit ist der Satz bewiesen.

JACOB STEINER[1]) hat ohne Beweis den Satz ausgesprochen:

Sind $E_1, E_2, \ldots, E_n$ feste Ebenen, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ gegebene reelle Zahlen, legt man durch einen festen Punkt O eine Ebene F, die mit der Ebene (E_k) $(k=1,2,\ldots,n)$ den Winkel α_k bildet, und läßt sich die Ebene F durch O so bewegen, daß die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} q_k \cos\alpha_k = S \tag{4}$$

konstant bleibt, so berührt diese Ebene einen Drehkegel mit einer festen Achse g. Unter den unendlich vielen Kegeln, welche auf diese Weise enstehen, wenn man die beschreibende Ebene F in immer anderer unsprünglichen Lage annimmt, wobei sich zugleich der Wert S ändert, gibt es zwei degenerierte. Der eine ist die Achse g, der andere ist die Ebene mit der Normale g durch O. Der Wert S erreicht bei diesen Grenzfällen seine Extrema.

Dieser Satz läßt sich vektoriell leicht beweisen. Bezeichnet $\mathfrak{B}_k$ bzw. $\mathfrak{C}$ den Einheitsvektor der von O ausgehenden Normalen der Ebene E_k bzw.

[1]) Gesammelte Werke II., S. 35. *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **15**, S. 373.

F und sind

$$\mathfrak{G} = \sum_{k=1}^{n} q_k \mathfrak{B}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k, \quad \mathfrak{A}_k = q_k \mathfrak{B}_k = \overrightarrow{OA_k} \text{ und } \mathfrak{G} \neq 0,$$

so ist die Mittelkante der Kanten OA_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ zum Vektor $\mathfrak{G}_k$ parallel. Die Gleichung (4) läßt sich in der Form

$$\mathfrak{C}\mathfrak{G} = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{C}\mathfrak{A}_k = \sum_{k=1}^{n} q_k \cos \alpha_k = |\mathfrak{G}| \cos \sigma = S$$

schreiben, da $\mathfrak{C}\mathfrak{A}_k = q_k \cos \alpha_k$ ist. Die von O ausgehenden Normalen der Ebenen F bilden bei einem konstanten Wert S mit der Geraden g des Vektors $\mathfrak{G}$ einen konstanten Winkel σ, sie sind also Erzeugenden eines Drehkegels mit der Spitze O und mit der Achse g. Die Ebenen F berühren also einen Drehkegel mit der Spitze O, dessen Erzeugenden mit der Achse g den Winkel $\frac{\pi}{2} - \sigma$ bilden.

Damit ist der STEINERsche Satz bewiesen. Er verliert im Falle $\mathfrak{G} = 0$ seine Gültigkeit. Dann ist O der Mittelpunkt der Kanten OA_k und $S = O$ für jede Ebene F durch O.

(Eingegangen am 26. Juni 1950.)