Ableitung einer algebraischen Kurve vierter Ordnung vom Index 2 aus Kegelschnitten.

Von Gy. Sz.-Nagy in Szeged.

Der *Index* einer reellen ebenen Kurve ist die kleinste Anzahl der reellen Punkte, in denen die Kurve von den Geraden ihrer Ebene getroffen wird. Der Index einer ebenen Kurve vierter Ordnung ist also entweder 0 oder 2, (falls sie nicht aus vier Geraden besteht).

Man kann, wie bekannt,[1]) die Grundformen der algebraischen Kurven vierter Ordnung ohne singuläre Punkte aus Kegelschnitten leicht ableiten. Ein ähnliches Verfahren läßt sich für die Ableitung einer algebraischen Kurve vierter Ordnung vom Index 2 aus Kegelschnitten anwenden.

Bezeichnet E eine Ellipse (oder einen Kreis), von der beide Äste einer Hyperbel in je zwei verschiedenen Punkten und zwar in A_1 und A_2 bzw. in A_3 und A_4 geschnitten werden, und bezeichnet E bzw. H die linke Seite der Gleichung der Ellipse bzw. Hyperbel, so stellt die Gleichung

$$G_0 \equiv EH = 0 \tag{1}$$

eine reduzible algebraische Kurve vierter Ordnung vom Index 2 dar. Die Kurve (1) hat nämlich mit einer beliebigen Geraden g ihrer Ebene mindestens zwei verschiedene (reelle) Treffpunkte.

Bezeichnet A_{12} bzw. A_{34} einen beliebigen Punkt der Strecke A_1A_2 bzw. A_3A_4 und bezeichnet g_0 die Verbindungsgerade der Punkte A_{12} und A_{34}, so fällt ein beliebiger Punkt P von g_0, der innerhalb bzw. außerhalb der Strecke $A_{12}A_{34}$ liegt, offenbar innerhalb der Ellipse E bzw. innerhalb der Hyperbel H.

Geht eine Gerade g durch einen Punkt innerhalb eines Kegelschnittes K, so wird K von g in zwei Punkten geschnitten.

Bezeichnet P_0 den Treffpunkt der Geraden g und g_0, so liegt P_0 innerhalb E oder H. Daraus folgt, daß die Kurve (1) vom Maximalindex ist.

Wir bezeichnen mit e_1 bzw. e_2 die linke Seite je einer Ellipse durch den Punkt A_1, so daß die Punkte A_2, A_3, A_4 bzw. A_3 und A_4 außerhalb der

[1]) F. Klein, Elementarmathematik vom höherem Standpunkte aus. Bd. 3., (1928), S. 191—193. — Vgl. H. Wieleitner, Algebraische Kurven I., Gestaltliche Verhältnisse. (Sammlung Göschen, 1919), S. 34—35.

Ellipse e_1 bzw. e_2 liegen, der Punkt A_2 aber innerhalb e_2 fällt. Wir können annehmen, daß die Funktion E, H, e_1 oder e_2 im Mittelpunkt des betreffenden Kegelschnittes negativ ist. Dann stellt die Gleichung

$$G \equiv EH + \lambda e_1 e_2 = 0 \tag{2}$$

für eine genügend kleine positive Zahl λ eine irreduzible Kurve vierter Ordnung vom Index 2 dar. Diese Kurve besteht aus einem paaren und aus zwei unpaaren Zügen; die unpaaren Zügen schneiden sich im Punkte A_1.

Ein Zug einer Kurve mit überall stetigen Tangenten bedeutet einen geschlossenen Teil der Kurve, der keinen Winkelpunkt besitzt. Ein Zug ist paar bzw. unpaar je nachdem er mit einer Gerade ihrer Ebene eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Treffpunkten (jeden Treffpunkt mit seiner Vielfachheit gerechnet) besitzt.

Die Kurve (2) geht durch jeden Schnittpunkt der Kurvenpaare

$$E \text{ und } e_1; \; E \text{ und } e_2; \; H \text{ und } e_1; \; H \text{ und } e_2. \tag{3}$$

A_1 ist ein Doppelpunkt der Kurve (2), weil die Funktionen EH, $e_1 e_2$ und deshalb auch die Funktion G und ihre ersten partiellen Differentialquotienten im Punkt A_1 verschwinden. Die Punkte A_2, A_3 und A_4 liegen aber nicht auf der Kurve (2).

Die Kegelschnitte E, H, e_1 und e_2 teilen die Ebene in gewiße Bereiche $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$. Die Funktion

$$F \equiv EHe_1e_2 \tag{4}$$

hat in den inneren Punkten eines Bereiches $\mathfrak{B}_h$ $(h = 0, 1, \ldots, m)$ das gleiche Vorzeichen, und sie verschwindet in den Randpunkten von $\mathfrak{B}_h$. Der Bereich läßt sich also (gemäß dem Vorzeichen von F in $\mathfrak{B}_h$) mit positivem bzw. negativem Vorzeichen bezeichnen. Zwei (längs irgendeines Bogens der vier Kegelschnitte) benachbarte Bereiche haben entgegengesetzte Vorzeichen. In einem Punkt der Kurve (2), der kein Punkt von e_1 oder e_2 ist, besteht die Gleichung

$$-\lambda = \frac{EH}{e_1 e_2} = \frac{F}{(e_1 e_2)^2}. \tag{5}$$

Daraus folgt, daß die Kurve (2) in positiven Bereichen keinen Punkt besitzt. Sie liegt also in den negativen Bereichen. Ein Randpunkt eines negativen Bereiches liegt dann und nur dann auf der Kurve, wenn er ein Schnittpunkt der Kurvenpaare (3) ist.

Ist $A_1 A_2 A_3 A_4$ die Aufeinanderfolge der Punkte A_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ auf der Ellipse E, so wird E von diesen Punkten in die Bögen $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{34}$ und γ_{41} geteilt. Die unendlichfernen Punkte U_1 und U_2 der Hyperbel H und das Punktpaar $A_1 A_2$ bzw. $A_3 A_4$ teilen den einen bzw. den anderen Hyperbelast in die Bögen $\delta_{12}, \delta_{1\infty}$ und $\delta_{2\infty}$ bzw. $\delta_{34}, \delta_{3\infty}$ und $\delta_{4\infty}$. Die Bögen δ_{12} und δ_{34} sind endlich. Die Bögen $\delta_{1\infty}$ und $\delta_{3\infty}$ bzw. $\delta_{2\infty}$ und $\delta_{4\infty}$ haben den Punkt U_1 bzw. U_3 gemeinsam und damit eine gemeinsame Asymptote.

Die Bögen $\delta_{12}, \gamma_{23}, \delta_{1\infty}$ und $\delta_{3\infty}$ bzw. $\gamma_{12}, \gamma_{14}, \delta_{2\infty}$ und $\delta_{4\infty}$ bilden eine geschlossene unpaare Kurve C_1 bzw. C_2 mit dem unendlichfernen Punkt U_1 bzw. U_2. Die Bögen γ_{34} und δ_{34} bilden eine geschlossene paare Kurve C_0. Die Kurven C_1 und C_2 haben in A_2, A_3 und A_4 Winkelpunkte. Die Kurve C_0 hat zwei Winkelpunkte, nämlich A_3 und A_4.

Für eine genügend kleine positive Zahl λ liegt die Kurve (2) in der Umgebung der Kurve (1), und sie besteht aus in den negativen Bereichen liegenden Bögen. Zeichnet man die mögliche Gestalt der Kurve (2), so sieht man leicht ein, daß die Kurve (2) in der Umgebung der Kurven C_1, C_2 bzw. C_0 einen Zug Z_1, Z_2 bzw. Z_0 besitzt. Die Züge Z_1 und Z_2 sind unpaar, sie schneiden sich im Punkt A_1 und haben keinen anderen Punkt gemeinsam. Der Zug C_0 ist paar und liegt in dem von den Bögen γ_{23} und δ_{23} begrenzten endlichen Bereich $\mathfrak{B}_0$.

Die Kurve (2) vierter Ordnung wird von einer Geraden g in höchstens 4 reellen Punkten getroffen. Die unpaaren Züge Z_1 und Z_2 werden von g in mindenstens je einem Punkt getroffen. Der Zug Z_0 kann also mit g höchstens zwei Treffpunkte haben. Daher ist Z_0 eine konvexe Kurve.

Bei der Vergrößerung der Zahl λ wird der Zug Z_0 im Bereich $\mathfrak{B}_0$ verkleinert. Bei einem Wert $\gamma = \gamma_0 > 0$ schrumpft Z_0 in einen isolierten Punkt zusammen. Ist $\lambda > \lambda_0$, so hat die entsprechende Kurve (2) in $\mathfrak{B}_0$ keinen Punkt. Läßt man die positive Zahl λ über alle Grenzen wachsen, so nähert sich die Kurve (2) in den negativen Bereichen dem Ellipsenpaar e_1, e_2.

(Eingegangen am 20. Mai 1952.)