Finslersche Räume mit algebraischen Grundfunktionen.

Von A. MOÓR in Debrecen.

Einleitung.

Bezeichne F_n eine n-dimensionale Punktmannigfaltigkeit bezogen auf die Koordinaten $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, in der durch eine Funktion

$$ds = L(x^1, x^2, \ldots, x^n;\ dx^1, dx^2, \ldots, dx^n) \tag{1}$$

das Bogenelement festgelegt ist. Die Funktion $L(x, dx)$ soll in den dx^i von erster Dimension positiv-homogen und außerdem nach ihren Argumenten mindestens viermal stetig differenzierbar sein. Der Raum F_n dem durch (1) eine Metrik aufgeprägt ist, wird ein Finslerscher Raum genannt. Nach der Cartanschen Theorie kann ein Finslerscher Raum als eine metrische Linienelementmannigfaltigkeit $(x, \dot{x})$ betrachtet werden, in der der Maßtensor g_{ij} die Form

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$$

hat. Die Funktion $L(x, dx)$ oder $L(x, \dot{x})$, welche die Struktur des Raumes bestimmt, werden wir kurz Grundfunktion nennen.

Im folgenden werden wir Finslersche Räume untersuchen, deren Grundfunktion die Form.

$$L(x, \dot{x}) = \sqrt[4]{a_{ijkl}(x)\dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k \dot{x}^l} \tag{2}$$

hat. Wir beschränken uns auf zwei Dimensionen. Räume höherer Dimensionszahl, deren Grundfunktion die Form (2) hat, geben für unsere Untersuchungen nicht wesentlich verschiedene Resultate. Gleichung (2) reduziert sich somit in unserem Fall auf

$$L(x, \dot{x}) = \sqrt[4]{a_0\dot{x}^4 + 4a_1\dot{x}^3\dot{y} + 6a_2\dot{x}^2\dot{y}^2 + 4a_3\dot{x}\dot{y}^3 + a_4\dot{y}^4}, \tag{3}$$
$$a_i = a_i(x, y), \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4).$$

(Im zweidimensionalen Raum benützen wir x, y statt x^1, x^2.) L ist also die vierte Wurzel einer homogenen Form vierten Grades in $\dot{x}$, $\dot{y}$.

In § 1.—3. werden wir die algebraischen Invarianten bzw. Kovarianten der Form vierter Ordnung:

$$f \equiv a_0 \dot{x}^4 + 4a_1 \dot{x}^3 \dot{y} + 6a_2 \dot{x}^2 \dot{y}^2 + 4a_3 \dot{x} \dot{y}^3 + a_4 \dot{y}^4 \tag{4}$$

zusammenstellen, und mit ihrer Hilfe die Grundfunktion (3) auf gewisse einfache Typen transformieren, ferner den Berwaldschen Hauptskalar I bestimmen, und die durch gewisse Tensorrelationen ausgezeichneten Räume mit den algebraischen Invarianten bzw. Kovarianten charakterisieren.

In § 4. untersuchen wir die Äquivalenztheorie der Finslerschen Räume mit der Grundfuktion (3). Die Äquivalenz von zwei Finslerschen Räumen, deren Grundfunktionen die Form (3) haben, werden wir mit Hilfe der Identität ihrer algebraischen Invarianten i, j und durch gewisse Differentialausdrücke sichern.

Die Äquivalenztheorie beliebiger affinzusammenhängender Linienelementmannigfaltigkeiten hat O. VARGA [7] entwickelt. Der von uns untersuchte Raum ist ein Spezialfall der allgemeinen affinzusammenhängenden Räume. In diesem Raum existieren neben den Differentialinvarianten auch algebraische Invarianten der Grundform (4). In § 4. werden wir zeigen, daß die algebraischen Invarianten einen Teil der Äquivalenzbedingungen des allgemeinen Falles entbehrlich machen. Offensichtlich kann die Äquivalenz von zwei Finslerschen Räumen nicht allein durch algebraische Invarianten bestimmt sein, denn in den Grundfunktionen kommen Differentialausdrücke vierten Grades vor, die mit algebraischen Invarianten nicht vollständig charakterisiert werden können. Mit Hilfe der algebraischen Invarianten kann man aber die Bedingungen der Äquivalenz vereinfachen.

§ 1. Charakteristische Invarianten und Kovarianten.

Wie schon erwähnt, wollen wir im folgenden diejenigen Finslerschen Räume untersuchen, deren Grundfuktion die Form:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \sqrt[4]{f} \tag{1, 1a}$$

$$f \equiv a_0 \dot{x}^4 + 4a_1 \dot{x}^3 \dot{y} + 6a_2 \dot{x}^2 \dot{y}^2 + 4a_3 \dot{x} \dot{y}^3 + a_4 \dot{y}^4 \tag{1, 1b}$$

$$a_i = a_i(x, y), \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{1, 1c}$$

hat. Die Grundfunktion ist also durch eine homogene Form vierten Grades von $\dot{x}, \dot{y}$ bestimmt.[1])

Die algebraischen Invarianten der Form f sind [4]:

$$i(x, y) = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2, \tag{1, 2}$$

$$j(x, y) = \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 \\ a_1 a_2 a_3 \\ a_2 a_3 a_4 \end{vmatrix}. \tag{1, 3}$$

---

[1]) Finslersche Räume, deren Grundfunktion die Form $\sqrt[3]{f}$ haben, wurden zuerst von J. M. WEGENER [8] untersucht.

Die Diskriminante von f ist

$$D(x, y) = i^3 - 27 j^2. \tag{1, 4}$$

Wir wollen bemerken, daß i, j keine Differentialinvarianten sind; sie charakterisieren zwar die algebraische Form f, sind aber nicht invariant in bezug auf eine Koordinatentransformation.

Die algebraischen Kovarianten von f sind: 1) die Hessesche Kovariante:

$$H_4(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \equiv \frac{1}{12^2} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} \right)^2 \right\}, \tag{1, 5}$$

und 2) die Kovariante:

$$T_4(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \equiv \frac{1}{8} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial H_4}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \cdot \frac{\partial H_4}{\partial \dot{x}} \right\}. \tag{1, 6}$$

Die beiden Differentialinvarianten des zweidimensionalen Finslerschen Raumes sind der Berwaldsche Hauptskalar: I, und der Krümmungsskalar: $\mathfrak{K}$ [1]. Die expliziten Formeln dieser beiden Skalare sind:

$$I(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{4 L^{\frac{1}{2}} F_1^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}} \right\} \tag{1, 7a}$$

mit

$$F_1 = \frac{1}{\dot{y}^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} = - \frac{1}{\dot{x} \dot{y}} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} = \frac{1}{\dot{x}^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}^2}, \tag{1, 7b}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{L^2} \Bigg\{ & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \dot{y}} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \dot{x}} \right) \dot{y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \dot{y}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial \dot{x}} \right) \dot{x} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} \right) \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \dot{y}^2} \right) \psi - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right)^2 + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \dot{y}} \right)^2 \right] \Bigg\}, \end{aligned} \tag{1, 8a}$$

wo φ und ψ die Gleichungen der die Extremalen bestimmenden Funktionen sind. Es ist:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{L F_1} \left[\dot{x} F_1 \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial y} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial y} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y} \partial x} \right) \right] \\ \psi &= \frac{1}{L F_1} \left[\dot{y} F_1 \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial y} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial y} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y} \partial x} \right) \right], \end{aligned} \right. \tag{1, 8b}$$

und die Differentialgleichungen der Extremalen des Raumes lauten:

$$x'' + \varphi(x, y, x', y') = 0, \quad y'' + \psi(x, y, x', y') = 0;$$

die Striche bedeuten hier Ableitungen nach dem Bogenparameter.

Hat nun die Grundfuktion eines Finslerschen Raumes die in den Gleichungen (1, 1) angegebene Form, so lässt sich sein Hauptskalar einfach durch die Kovarianten von f ausdrücken. Es ist nach (1, 7b) und (1, 1a), (1, 1b):

$$F_1 = \frac{1}{16 \dot{y}^2} \frac{1}{L^7} [4 f_{\dot{x}\dot{x}} f - 3 f_{\dot{x}}^2].$$

Wegen der Homogenität vierten Grades in dem $\dot{x}, \dot{y}$ von f wird:

$$\begin{aligned} 4f &= \dot{x} f_{\dot{x}} + \dot{y} f_{\dot{y}} \\ 3f_{\dot{x}} &= \dot{x} f_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y} f_{\dot{x}\dot{y}} \\ 3f_{\dot{y}} &= \dot{x} f_{\dot{x}\dot{y}} + \dot{y} f_{\dot{y}\dot{y}} \end{aligned}$$

somit bekommt man für F_1:

$$F_1 = \frac{1}{48L^7}[f_{\dot{x}\dot{x}} f_{\dot{y}\dot{y}} - f^2_{\dot{x}\dot{y}}] = 3H_4 L^{-7};$$

und nach (1, 7a) für I:

$$I = \frac{3}{2}\frac{T_4}{[3H_4]^{3/2}}, \tag{1, 9}$$

wo H_4, T_4 durch (1, 5) und (1, 6) gegeben sind.

Somit haben wir die Grundlegenden Invarianten — sowol die algebraischen, als auch die Differentialvarianten — für einen Finslerschen Raum mit der Grundfunktion (1, 1) zusammengestellt. An der Formel (1, 9) des Hauptskalars ist bemerkenswert, daß I durch die algebraischen Kovarianten der Form f ohne Differentiation, d. h. allein durch algebraische Operationen ausgedrückt ist.

§ 2. Untersuchung des Falles $D = 0$.

In diesem § wollen wir diejenigen Finslerschen Räume untersuchen, deren Grundfunktionen die Form (1, 1) haben, und für die die Diskriminante (1, 4) identisch verschwindet. Wir untersuchen die zwei Fälle: α) $i = j = 0$; β) $i \neq 0$, $j \neq 0$. Wegen $D = 0$ und auf Grund von (1, 4) existieren nur diese Fälle.

α) $i = j = 0$, $D = 0$.

Es folgt aus der Bedingung $i = j = 0$, daß

$$f \equiv a_0 \dot{x}^4 + 4a_1 \dot{x}^3 \dot{y} + 6a_2 \dot{x}^2 \dot{y}^2 + 4a_3 \dot{x}\dot{y}^3 + a_4 \dot{y}^4 = (b_1 \dot{x} + b_2 \dot{y})^3 (c_1 \dot{x} + c_2 \dot{y}) \tag{2, 1}$$

ist [4]. Wählen wir die Nullinien von f als Parameterlinen $x =$ konst. bzw. $y =$ konst., so wird

$$a_0 = a_4 = 0.$$

Es ist also nach (1, 2) und (1, 3):

$$i = -4a_1 a_3 + 3a_2^2 = 0 \tag{2, 2}$$

$$j = 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 = 0. \tag{2, 3}$$

Wenn $a_2 \neq 0$ wäre, dann würde man nach Multiplikation der Gleichung (2, 2) mit a_2 und (2, 3) mit 3 und nach Addition

$$-a_1 a_2 a_3 = 0$$

erhalten; es wäre also nach (2, 3) auch $a_2 = 0$, entgegen der Annahme. Es muß also $a_2 = 0$ sein und wegen (2, 2) noch z. B. $a_3 = 0$.

Das Bogenelement wird also

$$L = \sqrt[4]{f}, \quad f = 4a_1(x, y)\dot{x}^3\dot{y}. \tag{2, 4}$$

Es ist jetzt

$$H_4 = -a_1^2\dot{x}^4, \quad T_4 = 2a_1^3\dot{x}^6;$$

es wird also nach (1, 9)

$$I = \frac{3}{(-3)^{\frac{3}{2}}} = \text{konst.} \tag{2, 5}$$

Nach (1, 8b) wird

$$\varphi = \frac{1}{3a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x}\dot{x}^2; \qquad \psi = \frac{1}{a_1}\frac{\partial a_1}{\partial y}\dot{y}^2.$$

Der Krümmungsskalar (1, 8a) der Geometrie, deren Grundfunktion (2,4) ist, ist:

$$\mathfrak{K}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = -\frac{4}{3}f^{-\frac{1}{2}}\frac{a_{1xy}a_1 - a_{1x}a_{1y}}{a_1^2}\dot{x}\dot{y};$$

wo die Indexe x und y Ableitungen nach x bzw. y bedeuten. $\mathfrak{K}$ läßt sich noch in der Form:

$$\mathfrak{K} = -\frac{4}{3}f^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 \log a_1}{\partial x \partial y}\dot{x}\dot{y} \tag{2, 6}$$

darstellen.

β) $i \neq 0$, $j \neq 0$, $D = 0$. Die algebraische Form f hat jetzt die Form [4]:

$$\begin{aligned} f &\equiv a_0\dot{x}^4 + 4a_1\dot{x}^3\dot{y} + 6a_2\dot{x}^2\dot{y}^2 + 4a_3\dot{x}\dot{y}^3 + a_4\dot{y}^4 = \\ &= (b_1\dot{x} + b_2\dot{y})^2(c_{11}\dot{x}^2 + 2c_{12}\dot{x}\dot{y} + c_{22}\dot{y}^2). \end{aligned} \tag{2, 7}$$

Wählen wir als Parameterlinien $x = \text{konst.}$, bzw. $y = \text{konst.}$, die zwei Nullienien von f, die im Faktor

$$c_{11}\dot{x}^2 + 2c_{12}\dot{x}\dot{y} + c_{22}\dot{y}^2$$

enthalten sind, so wird $a_0 = a_4 = 0$. Die Diskriminante wird nach (1, 2), (1, 3) und (1, 4):

$$D = a_1^2a_3^2(6^2a_2^2 - 2^6a_1a_3) = 0. \tag{2, 8}$$

Nach dieser Gleichung ist entweder $a_3 = 0$, oder $6a_2 = 2^3\sqrt{a_1a_3}$ ($a_1 = 0$ gibt denselben Typus, wie $a_3 = 0$). a_2 kann nicht verschwinden, denn dann wäre noch z. B. nach (2, 8) $a_3 = 0$, und somit hätte f die Form (2, 4).

Besteht nun $a_3 = 0$, und auch noch $a_1 = 0$, so reduziert sich L auf

$$L = \sqrt[4]{6a_2}\sqrt{\dot{x}\dot{y}},$$

und dies bestimmt eine Riemannsche Geometrie.

Für $6a_2 = 2^3\sqrt{a_1a_3}$ wird

$$f = 4\dot{x}\dot{y}(\sqrt{a_1}\dot{x} + \sqrt{a_3}\dot{y})^2$$

sein.

γ) Zum Schluß dieses §-en wollen wir den Torsionstensor A_{ijk} und den Krümmungstensor R^i_{0jk} für die hier behandelten Grundfunktionen berechnen, und einige charakteristischen Eigenschaften dieser Räume angeben.

Bedeutet h_i den zum Einheitsvektor $l^i = \frac{\dot{x}^i}{L}$ transversalen Einheitsvektor, so kann man den Torsionstensor A_{ijk} des zweidimensionalen Raumes mit Hilfe des Hauptskalars I folgendermaßen ausdrücken [1], [2]:

(2, 9) $$A_{ijk} = 2I h_i h_j h_k,$$

wo

(2, 9a) $$h_i = -\varepsilon_{ik} l^k,$$

(2, 9b) $$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

und g_{ik} den Maßtensor bedeutet.

Wegen (2, 9) und wegen

$$h_{r/s} = 0$$

folgt aus $I =$ konst. die Gleichung

$$A_{ijk/0} = l^s A_{ijk/s} = 0,$$

bzw.

$$A_{ijk/h} = 0.$$

Diese beiden Gleichungen charakterisieren aber diejenigen Finslerschen Räume [3], in denen die Winkelmetrik bei Parallelübertragung unverändert bleibt, und in denen die Parallelübertragung eines Vektors von den Linienelementen des Vektors unabhängig ist. Diese beiden charakteristischen Eigenschaften haben also die Finslersche Räume, wenn ihre Grundfunktionen auf die Form (2, 4), also auf

$$L = \sqrt[4]{4a_1(x, y)\dot{x}^3\dot{y}}$$

transformiert werden können.

Hat endlich $a_1(x, y)$ die Form

$$a_1(x, y) = \alpha(x) \cdot \bar{\alpha}(y),$$

so wird wegen

$$R^i_{0jk} = \mathfrak{R} h^i \varepsilon_{jk}$$

(siehe [2]) und wegen (2, 6)

$$R^i_{0jk} = R^i_{sjk} l^s = 0$$

bestehen; es existiert somit im Raum eine vom Weg unabhängige Parallelverschiebung der Linienelemente [6]. Der Raum ist Übringes wegen $\mathfrak{R} = 0$, $I =$ konst. ein Minkowskischer Raum [2], [5].

§ 3. Untersuchung des Falles $D \neq 0$.

Wir wählen in diesem Falle als Parameterlinien $x =$ konst. bzw. $y =$ konst., zwei von den Nullinien von H_4. (Siehe (1, 5).) Dann wird man auf Grund von

$$H_4 = (a_0 a_2 - a_1^2)\dot{x}^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2)\dot{x}^3\dot{y} + (a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2)\dot{x}^2\dot{y}^2 + \\ + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3)\dot{x}\dot{y}^3 + (a_2 a_4 - a_3^2)\dot{y}^4$$

die Identitäten

$$(3,1) \qquad a_0 a_2 - a_1^2 = 0,$$

$$(3,2) \qquad a_2 a_4 - a_3^2 = 0$$

erhalten. Hat man noch $a_2 = 0$, dann geben (3, 1) und (3, 2) die Identitäten

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0;$$

die Grundfunktion wird also die Form

$$(3,3) \qquad L = \sqrt[4]{a_0 \dot{x}^4 + a_4 \dot{y}^4}$$

haben. (3, 3) bestimmt eine allgemeine Geometrie. Im Falle

$$a_0 = a_0(x), \quad a_4 = a_4(y)$$

läßt sich aber (3, 3) durch die Transformation

$$\bar{x} = \int_0^x \sqrt[4]{a_0(\xi)}\, d\xi, \quad \bar{y} = \int_0^y \sqrt[4]{a_4(\eta)}\, d\eta$$

auf die Form

$$L = \sqrt[4]{\dot{\bar{x}}^4 + \dot{\bar{y}}^4}$$

bringen, die offensichtlich eine Minkowskische Geometrie bestimmt [5].

Der Fall $a_2 \neq 0$ gibt eine allgemeine Finslersche Geometrie.

§ 4. Äquivalenztheorie der Finslerschen Räume mit algebraischen Grundfunktionen.

Das Äquivalenzproblem der zweidimensionalen Finslerschen Räume, deren Grundfunktionen die Form (1, 1) haben, läßt sich auf folgende Weise formulieren:

Es seien

$$(4,1) \quad L(x, \dot{x}) = \sqrt[4]{a_0 \dot{x}^4 + 4a_1 \dot{x}^3 \dot{y} + 6a_2 \dot{x}^2 \dot{y}^2 + 4a_3 \dot{x}\dot{y}^3 + a_4 \dot{y}^4}, \quad a_i = a_i(x, y),$$

und

$$(4,2) \quad \bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = \sqrt[4]{\bar{a}_0 \dot{\bar{x}}^4 + 4\bar{a}_1 \dot{\bar{x}}^3 \dot{\bar{y}} + 6\bar{a}_2 \dot{\bar{x}}^2 \dot{\bar{y}}^2 + 4\bar{a}_3 \dot{\bar{x}}\dot{\bar{y}}^3 + \bar{a}_4 \dot{\bar{y}}^4}, \quad \bar{a}_i = \bar{a}_i(\bar{x}, \bar{y})$$

die Grundfunktionen je eines Finslerschen Raumes. Es sollen die Bedingungen der Existenz einer Transformation

$$(4,3) \qquad \bar{x} = \bar{x}(x, y), \quad \bar{y} = \bar{y}(x, y)$$

angegeben werden, für die

$$\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = L(x, \dot{x}) \tag{4, 4}$$

besteht. Wir wollen noch annehmen, daß auch die inverse Transformation von (4, 3), also

$$x = x(\bar{x}, \bar{y}), \quad y = y(\bar{x}, y) \tag{4, 5}$$

existiert.

Statt (4, 1) bzw. (4, 2) werden wir im folgenden die für die Rechnungen einfachere Form

$$L = \sqrt[4]{a_{ijkl}\, \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k \dot{x}^l}, \quad a_{ijkl} = a_{ijkl}(x) \tag{4, 6}$$

bzw.

$$\bar{L} = \sqrt[4]{\bar{a}_{ijkl}\, \dot{\bar{x}}^i \dot{\bar{x}}^j \dot{\bar{x}}^k \dot{\bar{x}}^l}, \quad \bar{a}_{ijkl} = \bar{a}_{ijkl}(\bar{x}) \tag{4, 7}$$

benutzen, a_{ijkl} und $\bar{a}_{ijkl}$ sind Tensoren vierter Stufe, die symmetrisch in allen ihren Indexen sind; nach (4, 1) und (4, 6) bzw. (4, 2) und (4, 7) kann man den Zusammenhang der $a_r, \bar{a}_r, a_{ijkl}, \bar{a}_{ijkl}$ leicht angeben. Es ist z. B.

$$a_0 = a_{1111}, \quad \bar{a}_0 = \bar{a}_{1111},$$
$$a_1 = a_{1112}, \quad \bar{a}_1 = \bar{a}_{1112}.$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Wegen des Transformationsgesetzes

$$\dot{\bar{x}}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \dot{x}^r$$

ist nach (4, 6), (4, 7) das Äquivalenzproblem mit der Bestimmung der Lösung des Differentialgleichungssystems:

$$\bar{a}_{ijkl} = a_{prst} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^l} \tag{4, 8}$$

identisch.

Nach den Untersuchungen in § 1—2 kommen für das Äquivalenzproblem die folgenden Fälle in Betracht: α) $i = j = 0$, β) $i \neq 0$, $j \neq 0$, $D = 0$, γ) $D \neq 0$. (Im folgenden bezeichnen wir mit $\bar{i}, \bar{j}$ die entsprechenden algebraischen Invarianten bzw. mit $\bar{D}$ die Diskriminante von (4, 2).)

α) $i = j = 0$. In diesem Falle hat $L(x, \dot{x})$ die Form:

$$L(x,\dot{x}) = \sqrt[4]{(b_1\dot{x} + b_2\dot{y})^3 (c_1 \dot{x} + c_2 \dot{y})}; \; b_i = b_i(x, y), \; c_i = c_i(x, y). \tag{4, 9a}$$

Ist $\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}})$ die Grundfunktion desjenigen Finslerschen Raumes, der zum gegebenen äquivalent ist, dann muß notwendigerweise $\bar{i} = \bar{j} = 0$ sein und es ist dann:

$$\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = \sqrt[4]{(\bar{b}_1\dot{\bar{x}} + \bar{b}_2\dot{\bar{y}})^3 (\bar{c}_1 \dot{\bar{x}} + \bar{c}_2 \dot{\bar{y}})}; \tag{4, 9b}$$
$$\bar{b}_i = \bar{b}_i(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{c}_i = \bar{c}_i(\bar{x}, \bar{y}).$$

Hieraus folgt der

Satz 1. *Hat die Grundfunktion eines Finslerschen Raumes die Form* (4, 6) *und verschwinden die algebraischen Invarianten* i, j *identisch, dann sind zu diesem Finslerschen Raum diejenigen äquivalent, für die* $\bar{i} = \bar{j} = 0$, *und deren Fundamentalvektoren* $\bar{b}_i, \bar{c}_i$ *mit* b_i, c_i *äquivalent sind.*

Bemerkung: Wegen $i = j = \bar{i} = \bar{j} = 0$ gehen nämlich, wie schon erwähnt wurde, (4, 6) und (4, 7) in (4, 9a) und (4, 9b) über. Die Rolle der Tensoren $a_{ijkl}, \bar{a}_{ijkl}$ übernehmen jetzt b_i, c_i, und $\bar{b}_i, \bar{c}_i$.

Die analytische Bedingungen der Äquivalenz können wir auf folgender Weise formulieren. Es soll eine derartige Transformation

(4, 10) $$x_i = x_i(\bar{x}) \quad (i = 1, 2)$$

existieren, daß

(4, 11a) $$\bar{b}_i = b_r p^r_i,$$

(4, 11b) $$\bar{c}_i = c_r p^r_i,$$

(4, 12) $$p^i_k = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}^k},$$

(4, 13) $$\frac{\partial p^i_k}{\partial \bar{x}^l} = p^i_r \bar{\Gamma}^{*\,r}_{k\,l} - \Gamma^{*\,i}_{s\,t} p^s_k p^t_l$$

bestehen. Die $\Gamma^{*j}_{i\,k}$ bzw. die $\bar{\Gamma}^{*j}_{i\,k}$ sind den Christoffelklammern entsprechende Größen der durch (4, 9a) bzw. (4, 9b) festgelegten Geometrie; sie hängen also auch von b_i, c_i bzw. $\bar{b}_i, \bar{c}_i$ ab.

In den Gleichungen (4, 11a)—(4, 13) treten aber neben den $\bar{x}^i$ als unabhängige Variable auch die $\dot{\bar{x}}^i$, und als neue Funktionen die p^i_k auf; wir ergänzen deshalb das System (4, 11a)—(4, 13) zu einem System, in dem auch Ableitungen nach $\dot{\bar{x}}^i$ auftreten. Es wird:

(4, 14a) $$\frac{\partial x^i}{\partial \dot{\bar{x}}^k} = 0,$$

(4, 14b) $$\frac{\partial p^i_k}{\partial \dot{\bar{x}}^l} = 0,$$

(4, 14c) $$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \bar{x}^k} = p^i_s \bar{G}^s_k - G^i_s p^s_k, \qquad (G^i_s = \Gamma^{*\,i}_{r\,s} \dot{x}^r,\ \bar{G}^s_k = \bar{\Gamma}^{*\,s}_{r\,k} \dot{\bar{x}}^r),$$

(4, 14d) $$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{\bar{x}}^k} = p^i_k.$$

Die Funktionen p^i_k müssen noch die Relationen

(4, 15) $$\bar{C}^r_{i\,k} p^j_r = C^j_{s\,t} p^s_i p^t_k$$

erfüllen, wo die $\bar{C}^r_{i\,k}$ und $C^r_{i\,k}$ die beiden Torsionstensoren der Finslerschen Räume bedeuten. Das gemischte Differentialgleichungssystem (4, 11a)—(4, 15) ist das Analogon desjenigen Systems der allgemeinen affinzusammenhängenden

Linienelementmannigfaltigkeiten, das ihre Äquivalenz bestimmt. Dieses allgemeine Problem wurde von O. VARGA gelöst. (Vgl. [7], insb. § 4.) In unserem Falle treten aber zu den skalaren Relationen (4, 15), die auch im allgemeinen affinzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeit vorhanden sind (vgl. [7] Gleichung (4, 8)), noch die skalaren Relationen (4, 11a), (4, 11b) hinzu; die Größen $\bar{\Gamma}^{*b}_{a\,c}$, $\Gamma^{*b}_{a\,c}$ sind jetzt in a, c symmetrisch. Das bedeutet das Verschwinden des Torsionstensors

$$\Omega^{i}_{k\,j} = \frac{1}{2}(\Gamma^{*i}_{k\,j} - \Gamma^{*i}_{j\,k})$$

des Finslerschen Raumes.

Die Lösbarkeit des gemischten Differentialgleichungssystems (4, 11a)—(4, 15) kann man mit Hilfe eines Satzes von O. VEBLEN und J. M. THOMAS entscheiden [9]. Nach dem Kriterium von O. VEBLEN und J. M. THOMAS müssen wir die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (4, 12)—(4, 14d) bilden und die skalaren Relationen (4, 11) und (4, 15) nach $\bar{x}^k$, $\dot{\bar{x}}^k$ ableiten. Dadurch erhalten wir eine Reihe von Integrabilitätsbedingungen und skalaren Relationen. Ebenso wie im allgemeinen Fall (vgl. [7] Gleichungen (4, 14) und (4, 15)) bekommt man aus (4, 13) wegen

$$\frac{\partial^2 p^i_k}{\partial \bar{x}^l\, \partial \dot{\bar{x}}^m} = \frac{\partial^2 p^i_k}{\partial \dot{\bar{x}}^m\, \partial \bar{x}^l}$$

die Gleichungen

$$p^k_r \frac{\partial \bar{\Gamma}^{*r}_{i\,l}}{\partial \dot{\bar{x}}^m} = \frac{\partial \Gamma^{*k}_{r\,s}}{\partial \dot{x}^t} p^r_i\, p^s_l\, p^t_m, \tag{4, 16}$$

und wegen

$$\frac{\partial^2 p^i_k}{\partial \bar{x}^l\, \partial \bar{x}^m} = \frac{\partial^2 p^i_k}{\partial x^m\, \partial \bar{x}^l}$$

wird

$$p^i_r\, \bar{T}^r_{k\,l\,m} = T^i_{r\,s\,t}\, p^r_k\, p^s_l\, p^t_m \tag{4, 17}$$

bestehen, wo die $T^i_{r\,s\,t}$, $\bar{T}^r_{k\,l\,m}$ die Hauptkrümmungstensoren der beiden Räume bedeuten. Es ist

$$T^i_{r\,s\,t} = \frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,s}}{\partial x^t} - \frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,t}}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,s}}{\partial \dot{x}^a} G^a_t + \frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,t}}{\partial \dot{x}^a} G^a_s + \Gamma^{*a}_{r\,s}\Gamma^{*i}_{a\,t} - \Gamma^{*a}_{r\,t}\Gamma^{*i}_{a\,s}.$$

Aus (4, 11a), (4, 11b) und (4, 15) wird auf Grund von (4, 13) und (4, 14c):

$$\bar{b}_{i/k} = b_{r/s}\, p^r_i\, p^s_k, \tag{4, 18a}$$

$$\bar{c}_{i/k} = c_{r/s}\, p^r_i\, p^s_k, \tag{4, 18b}$$

$$p^i_e\, \bar{C}^e_{b\,c/d} = C^i_{r\,s/t}\, p^r_b\, p^s_c\, p^t_d, \tag{4, 18c}$$

$$p^i_e \frac{\partial \bar{C}^e_{b\,c}}{\partial \dot{\bar{x}}^d} = \frac{\partial C^i_{r\,s}}{\partial \dot{x}^t} p^r_b\, p^s_c\, p^t_d. \tag{4, 18d}$$

Die Integrabilitätsbedingungen von (4, 14c) geben:

$$p^i_r \bar{\Omega}^r_{k\,l} = \Omega^{\,i}_{r\,s}\, p^r_k\, p^s_l\,;$$

(vgl. [7] Gleichung (4, 13)), diese Gleichung ist aber im Finslerschen Raum wegen des Verschwindens des Torsionstensors $\Omega^{\,i}_{r\,s}$ identisch erfüllt.

Die Gleichungen (4, 16)—(4 18d) bilden also die erste Gleichungskette der VEBLEN—THOMASschen Methode. Durch Differenzieren dieser Gleichungen nach $\bar{x}^i, \dot{\bar{x}}^i$ bekommt man eine neue Gleichungskette, die ebenso mit Hilfe der kovarianten Ableitung in skalarer Form darstellbar ist.

Nach dem Kriterium von O. VEBLEN und J. M. THOMAS genügt nun zur Lösbarkeit des Systems (4, 11a)—(4, 15) die Existenz eine Zahl N derart, daß die N ersten aus (4, 16)—(4, 18d) durch kovariante Ableitung nach $\bar{x}^i$ bzw. durch gewöhnliche Ableitung nach $\dot{\bar{x}}^i$ gebildeten Gleichungsketten ein verträgliches System geben, und daß jede Lösung dieses Systems die $(N+1)$-te Gleichungskette identisch befriedigt.

Die Gleichungsketten hängen aber ausschliesslich von den Vektorfeldern $b_i, \bar{b}_i, c_i, \bar{c}_i$ ab, denn die $\Gamma^{*j}_{i\,k}, C^j_{i\,k}, T^j_{i\,k\,l}$ und $\bar{\Gamma}^{*j}_{i\,k}, \bar{C}^j_{i\,k}, T^j_{i\,k\,l}$ kann man durch b_i, c_i bzw. $\bar{b}_i, \bar{c}_i$ ausdrücken.

β) $i \neq 0,\ j \neq 0,\ D = 0$; Die Grundfunktion $L(x, \dot{x})$ wird dann von der Form

$$L(x, \dot{x}) = \sqrt[4]{(b_1\dot{x} + b_2\dot{y})^2 (c_{11}\dot{x}^2 + 2c_{12}\dot{x}\dot{y} + c_{22}\dot{y})^2} \tag{4, 19a}$$

sein. Für die zu diesen Räumen äquivalenten muß dann notwendigerweise $\bar{i} \neq 0,\ \bar{j} \neq 0,\ \bar{D} = 0$ sein. Somit wird die Grundfunktion die Gestalt

$$\bar{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = \sqrt[4]{(\bar{b}_1\dot{\bar{x}} + \bar{b}_2\dot{\bar{y}})^2 (\bar{c}_{11}\dot{\bar{x}}^2 + 2\bar{c}_{12}\dot{\bar{x}}\dot{\bar{y}} + \bar{c}_{22}\dot{\bar{x}}^2)} \tag{4, 19b}$$

haben.

Satz 2. *Für die Äquivalenz der durch* (4, 19a), (4, 19b) *bestimmten Finslerschen Räume ist notwendig und hinreichend, daß eine Transformation von der Form* (4, 10) *existiere, für die*

$$\bar{j}(\bar{x}) = j(x) \tag{4, 20}$$

besteht, und welche die Tensorfelder $c_{ik}, \bar{c}_{ik}$ und die Vektorfelder $b_i, \bar{b}_i$ ineinander transformiert.

Bemerkung: aus (4, 19) und (1, 4) folgt wegen $D = \bar{D} = 0$ für reelles i und $\bar{i}$ die Relation:

$$\bar{i}(\bar{x}) = i(x).$$

Die beiden algebraischen Invarianten von (4, 19a) und (4, 19b) stimmen also überein. Diese Relation kann aber nicht als unabhängige Bedingung betrachtet werden; sie ist eine Folgerung von (4, 19) und $D = \bar{D} = 0$.

Die analytische Bedingung der Äquivalenz der beiden Geometrien kann ebenso formuliert werden wie vorher, nur stehen hier statt der skalaren Relationen (4, 11a) und (4, 11b) die Relationen

$$\bar{b}_i = b_r p_i^r, \tag{4, 21a}$$

$$\bar{c}_{ik} = c_{rs} p_i^r p_k^s, \tag{4, 21b}$$

und (4, 20). Das VEBLEN—THOMASsche Kriterium ergibt jetzt als erste Gleichungskette aus (4, 21a), (4, 21b) bzw. aus (4, 20) in Hinsicht auf (4, 12):

$$\bar{b}_{i/k} = b_{r/s} p_i^r p_k^s, \tag{4, 22a}$$

$$\bar{c}_{ik/l} = c_{rs/t} p_i^r p_k^s p_l^t, \tag{4, 22b}$$

$$\frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial j}{\partial x^r} p_k^r. \tag{4, 22c}$$

Zu diesen Gleichungen kommen auch in diesem Falle noch die Gleichungen (4, 16), (4, 17), (4, 18c), (4, 18d) hinzu. Aus den Gleichungen (4, 16), (4, 17), (4, 18c), (4, 18d) und (4, 22) kann man durch kovariante Ableitung nach $\bar{x}^m$ bzw. durch gewöhnliche Ableitung nach $\dot{\bar{x}}$ die neuen Gleichungsketten herstellen und dann das Kriterium der Lösbarkeit ebenso wie im vorigen Falle formulieren.

Das ganze Differentialgleichungssystem hängt in diesem Falle von den Tensorfeldern $b_i, \bar{b}_i, c_{ik}, \bar{c}_{ik}$ und von $j, \bar{j}$ ab, denn die übrigen Größen sind durch diese Größen ausdrückbar.

γ) *Der allgemeine Fall.* Es ist jetzt $D \neq 0$, $\bar{D} \neq 0$. Die Grundfunktionen der Geometrien haben jetzt die allgemeine Form (4, 6) und (4, 7).

Satz 3. *Die durch* (4, 6) *und* (4, 7) *bestimmten Finslerschen Geometrien sind äquivalent, wenn eine Transformation* (4, 10) *existiert, für die*

$$\bar{i}(\bar{x}) = i(x) \tag{4, 23a}$$

und

$$\bar{j}(\bar{x}) = j(x) \tag{4, 23b}$$

bestehen und die die Tensorfelder $\bar{a}_{ijkl}$, a_{ijkl} ineinander transformiert.

Die analytische Formulierung der Äquivalenz gibt im Vergleich mit dem Fall α) nichts Neues, nur stehen hier statt der skalaren Relationen (4, 11a) und (4, 11b)

$$\bar{a}_{ijkl} = a_{qrst} p_i^q p_j^r p_k^s p_l^t \tag{4, 24}$$

und die Relationen (4, 23a) und (4, 23b). Durch Ableitung erhält man aus (4, 23a) und (4, 23b) wegen (4, 12)

$$\frac{\partial \bar{i}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial i}{\partial x^r} p_k^r,$$

$$\frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial j}{\partial x^r} p_k^r,$$

und aus (4, 24) wegen (4, 13)

$$\bar{a}_{ijkl/m} = a_{qrst/v}\, p_i^q\, p_j^r\, p_k^s\, p_l^t\, p_m^v .$$

Man bestätigt sofort, daß in diesem Falle die einzelnen Gleichungsketten aus den kovarianten Ableitungen der Größen $\frac{\partial \bar{i}}{\partial \bar{x}^k}$, $\frac{\partial \bar{j}}{\partial \bar{x}^k}$, $\bar{a}_{ijkl}$ und entsprechenden Größen in den nichtüberstrichenen Größen bestehen.

Bemerkung: die Ableitungen nach $\dot{x}^l$, $\dot{\bar{x}}^l$ treten selbstverständlich nur dann hinzu, wenn schon vorher die genannten Größen kovariant abgeleitet wurden; $\frac{\partial i}{\partial x^k}$, $\frac{\partial j}{\partial x^k}$, a_{ijkl} hängen nämlich nur von den x^l ab, aber in ihren kovarianten Ableitungen treten schon die $\dot{x}^l$ auf.

Das Differentialgleichungssystem wird jetzt von a_{ijkl}, $\bar{a}_{ijkl}$, $i, j, \bar{i}, \bar{j}$ und von ihren Ableitungen abhängen. Diese Größen bestimmen die Äquivalenz der Geometrien.

Schriftenverzeichnis.

[1] L. Berwald, Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume. *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **156** (1927), 191—222.

[2] L. Berwald, On Finsler and Cartan geometries III. *Ann. of Math.* **42** (1941), 84—112.

[3] E. Cartan, Les espaces de Finsler. *Actualités scientifiques et industrielles,* **79** (1934).

[4] A. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen. (Leipzig, 1872.)

[5] O. Varga, Zur Begründung der Minkowskischen Geometrie. *Acta Sci. Math. Szeged,* **10** (1934), 149—163.

[6] O. Varga, Über eine Klasse von Finslerschen Räumen, die die nichteuklidischen verallgemeinern. *Commentarii Math. Helv.,* **19** (1946), 367—380.

[7] O. Varga, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz. *Publicationes Math. (Debrecen),* **1** (1949), 7—17.

[8] J. M. Wegener, Untersuchungen über Finslersche Räume. *Proc. Amsterdam,* **38** (1935), 949—955.

[9] J. M. Thomas—O. Veblen, Projective invariants of affine geometrie of paths. *Ann. of Math.,* **27** (1926), 279—296.

(Eingegangen am 1. Dezember, 1951.)