Bemerkung zur Divergenz der Fourierreihen stetiger Funktionen.

Von KÁROLY TANDORI in Budapest.

A. ZYGMUND[1]) hat eine Fourierreihe $\mathfrak{S}(f)$ mit folgeden Eigenschaften angegeben: $\mathfrak{S}(f)$ ist die Fourierreihe einer beschränkten Funktion, die Partialsummen von $\mathfrak{S}(f)$ sind gleichmäßig beschränkt, $\mathfrak{S}(f)$ divergiert auf einer Menge, die in jedem Intervall von zweiter Kategorie, also von der Mächtigkeit des Kontinuums ist. Über die Stetigkeitsverhältnisse der Funktion $f(x)$ ist nichts bekannt.

Das Neue an seiner ziemlich komplizierten Konstruktion liegt in dem Umstand, daß bei den bisher bekannten Beispielen divergenter Fourierreihen mit gleichmäßig beschränkten Partialsummen die Divergenz nur auf einer abzählbaren Menge gesichert war.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, *daß man* mit Hilfe der FEJÉRschen Methode, auf Grund einer Idee von L. NEDER[2]), auch *die Fourierreihe $\mathfrak{S}(f)$ einer nach 2π periodischen, stetigen Funktion $f(x)$ leicht angeben kann, so daß die Partialsummen von $\mathfrak{S}(f)$ gleichmäßig beschränkt bleiben, $\mathfrak{S}(f)$ aber auf einer Menge, welche in jedem Intervall von der Mächtigkeit des Kontinuums ist, divergiert.*

Betrachten wir nämlich die FEJÉRschen Polynome der Form

$$(1)\qquad Q(x,\mu,n)=\frac{\cos\mu x}{n}+\frac{\cos(\mu+1)x}{n-1}+\cdots+\frac{\cos(\mu+n-1)x}{1}-\\-\frac{\cos(\mu+n+1)x}{1}-\cdots-\frac{\cos(\mu+2n)x}{n}.$$

Da

$$Q(x,\mu,n)=\sin(\mu+n)x\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$$

---

[1]) A. ZYGMUND, An example in Fourier series, *Studia Math.*, **10** (1948), 113—119.

[2]) L. NEDER, Zur Konvergenz der trigonometrischen Reihen einschließlich der Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise, (Inaugural-Dissertation, Göttingen, 1919), S. 27—31.

ist, existiert eine positive Konstante C, so daß für jedes x, μ und n die Abschätzung

$$|Q| \leqq C \tag{2}$$

besteht.[3])

Betrachten wir nun die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Q(x-x_k, \mu_k, n_k), \tag{3}$$

wo die α_k positive Zahlen und die μ_k, n_k natürliche Zahlen bedeuten. Die Punkte x_k werden wir später bestimmen. Nehmen wir ferner an, daß diese Konstanten die folgenden Bedigungen erfüllen:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{a)} & \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty, & \\ \text{b)} & \mu_k + 2n_k < \mu_{k+1} & (k=1,2,\ldots), \\ \text{c)} & \alpha_k \log n_k > \gamma > 0 & (k=1,2,\ldots), \\ \text{d)} & \alpha_k \log n_k = O(1). & \end{array}\right. \tag{4}$$

Wenn z. B. $\alpha_k = k^{-2}$, $\mu_k = 2^{k^2}$ und $n_k = 2^{k^2}$ ist, so sind diese Bedingungen erfüllt.

Wegen (2) und (4a) stellt die Reihe eine nach 2π periodische, stetige Funktion $f(x)$ dar. Wir behaupten, daß die Partialsummen der Fourierreihe $\mathfrak{S}(f)$ gleichmäßig beschränkt sind. Wegen (4b) gilt nämlich für $\mu_j + 2n_j < n < \mu_{j+1}$

$$s_n(f; x) = \sum_{k=1}^{j} \alpha_k Q(x-x_k, \mu_k, n_k),$$

und für $\mu_{j+1} \leqq n \leqq \mu_{j+1} + 2n_{j+1}$

$$s_n(f; x) = \sum_{k=1}^{j} \alpha_k Q(x-x_k, \mu_k, n_k) + R(x),$$

wo $R(x)$ ein Abschnitt des trigonometrischen Polynoms $\alpha_{j+1}Q_{j+1}$ ist. Da nach (1)

$$|R(x)| \leqq 2\alpha_{j+1}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n_{j+1}}\right] \leqq 2\alpha_{j+1}(\log n_{j+1}+1)$$

gilt, ergibt sich wegen (2), (4a) und (4d) die gleichmäßige Beschränktheit der Partialsummen von $\mathfrak{S}(f)$.

Auf Grund der Definition (1), der Stetigkeit des Polynoms Q und (4c), läßt sich behaupten, daß man zu jedem x_k eine abgeschlossene Umgebung I_k angeben kann, in welcher

$$|s_{\mu_k+n_k-1}(f; x) - s_{\mu_k-1}(f; x)| > \frac{\gamma}{2} \tag{5}$$

gilt.

[3]) Siehe z. B.: A. Zygmund, *Trigonometrical series*, (Warszawa-Lwów, 1935), S. 108—109.

Wählen wir die Punkte x_k z. B. so, daß diese Intervalle I_k ein dyadisches Schema bilden[4]), so erhalten wir eine perfekte Menge H (also eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums), deren sämtliche Punkte in unendlich vielen I_k enthalten sind. Die Ungleichung (5) besteht somit im Falle $x \in H$ für unendlich viele k, daher divergiert die Fourierreihe $\mathfrak{S}(f)$ in allen Punkten der Menge H.

Die Menge der Divergenzpunkte läßt sich leicht so verdichten, daß sie in jedem Intervall von der Mächtigkeit des Kontinuums sei. Wir zerlegen z. B. die Folge $\{n_k\}$ in abzählbar unendlich viele unendliche Folgen $\{n_{ik}\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Dann ordnen wir die dyadischen Intervalle $[2\pi k/2^n, 2\pi(k+1)/2^n]$ $(n = 1, 2, \ldots; k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$ in eine Reihe $J_1, J_2, \ldots, J_l, \ldots$. Zu jedem l konstruieren wir auf J_l eine perfekte Menge H_l mit Hilfe der Folge $\{n_{lk}\}$. Es ist klar, daß die Menge $H = \sum_{l=1}^{\infty} H_l$ in jedem Teilintervall von $[0, 2\pi]$ die Mächtigkeit des Kontinuums hat, wobei die Fourierreihe in jedem Punkte $x \in H$ divergiert.

(Eingegangen am 18. Februar 1952.)

[4]) Wir können z. B. x_1, x_2 und x_3 derart wählen, daß $I_2, I_3 \subset I_1$ und $I_2 \cap I_3 = 0$ ist, x_4, x_5, x_6 und x_7 derart, daß $I_4, I_5 \subset I_2$ und $I_6, I_7 \subset I_3$, ferner $I_4 \cap I_5 = I_6 \cap I_7 = 0$ ist, usw. Wenn wir die Intervalle I_k genügend klein annehmen, was man immer voraussetzen kann, so läßt sich diese Konstruktion durchführen.