Bemerkungen über nicht-meßbare Punktmengen.

Von D. KRÁLIK in Budapest.

Im folgenden konstruieren wir auf Grund des ZERMELOschen Wohlordnungssatzes eine im LEBESGUEschen Sinne nicht-meßbare Punktmenge und mit Hilfe der so konstruierten Menge beweisen wir den bekannten Satz, daß jede Punktmenge, die keine Nullmenge ist, nicht-meßbare Teilmengen besitzt.

Es sei I ein beliebiges Intervall des (n-dimensionalen) euklidischen Raumes. Die Gesamtheit aller perfekten Teilmengen von I hat die Mächtigkeit des Kontinuums. Denken wir diese Gesamtheit wohlgeordnet und zwar so, daß diese Wohlordnung durch die Ordnungszahl ω_c charakterisiert sei, wo ω_c die kleinste unter den Ordnungszahlen bedeutet, welche die wohlgeordneten Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums kennzeichnen. So gewinnen wir die transfinite Reihe aller in I enthaltenen perfekten Teilmengen:

$$P_1, P_2, \ldots, P_\xi, \ldots$$

Wählen wir aus P_1 zwei verschiedene Punkte aus, den einen reihen wir in eine Menge A, den anderen in eine Menge B ein. Dann wählen wir aus P_2 zwei, von den vorigen verschiedene Punkte aus, den einen reihen wir wieder in die Menge A, den anderen in die Menge B ein. Nehmen wir an, diese Auswahl sei für jede Menge P, deren Index kleiner als die Ordnungszahl $\xi < \omega_c$, schon gelungen. Dann gelingt die Auswahl auch für die Menge P_ξ. Denn die Menge der Mengen P, deren Index kleiner als ξ ist, hat eine kleinere Mächtigkeit, als das Kontinuum und wir haben ja aus jeder Menge P zwei Punkte ausgewählt. So können wir aus der Menge P_ξ auch zwei, von allen vorigen verschiedene Punkte auswählen und den einen wieder in A, den anderen in B einreihen. Diese Auswahl gelingt also für jedes Glied der transfiniten Reihe $P_1, P_2, \ldots, P_\xi, \ldots$.

Es sei $\bar{A}$ die Komplementärmenge von A, d. i. $\bar{A} = I - A$ $(B \subset \bar{A})$. Auf Grund der Konstruktion ist es klar, daß die Mengen A und $\bar{A}$ keine perfekte Teilmenge besitzen (sie sind total imperfekte Mengen) und infolgedessen ist ihr inneres Maß Null.

Das äußere Maß von A und auch von $\bar{A}$ ist also gleich dem Maß von I selbst. Daraus folgt, daß die Puntmengen A und $\bar{A}$ (im Lebesgueschen Sinne) nicht-meßbare Punktmengen sind.

Die oben beschriebene Konstruktion ist schon lange bekannt [siehe zum Beispiel: SCHOENFLIES, Mengenlehre (1913), HAUSDORFF, Mengenlehre (1935); KURATOWSKI, Topologie I (1933)], aber nur bei KURATOWSKI findet man einen kurzen Hinweis darauf, daß die so gewonnenen Mengen A und $\bar{A}$ nicht-meßbar sind (Seite 268).

Das vorige Verfahren kann auf den ganzen Raum ausgedehnt werden, indem man statt vom Intervall I von dem ganzen Raum ausgeht. Die so erhaltenen Mengen bezeichnen wir wieder mit A und $\bar{A}$. Wenn nun I ein beliebiges Intervall bedeutet, so stimmt das äußere Maß von AI und $\bar{A}I$ mit dem Maß von I überein (die Mengen A und $\bar{A}$ haben beide das innere Maß Null.)

Der Kürze halber bezeichnen wir das äußere Maß einer beliebigen Punktmenge M mit μM, das innere Maß mit $m M$. Dann ist:

$$\mu A = \lim \mu(IA),$$
$$\mu \bar{A} = \lim \mu(I\bar{A}),$$

wenn sich das Intervall I zum ganzen Raum ausdehnt. Infolgedessen sind μA und $\mu \bar{A}$ gleich $+\infty$.

Es gibt also Punktmengen, die zugleich mit ihrer Komplementärmenge den Gesamtraum als maßgleiche Hülle und das innere Maß Null haben.

Nun zeigen wir, daß jede Punktmenge, deren äußeres Maß nicht Null ist, eine nicht-meßbare Teilmenge besitzt.

Es sei also die fragliche Menge M; es sei zunächst $0 < \alpha = \mu M < +\infty$. Es sei $\varepsilon > 0$ eine beliebige Zahl, für welche $\varepsilon < \frac{\alpha}{4}$ ist. Nach Definition des äußeren Maßes gibt es eine offene Punktmenge O, so daß

$$\mu O < \mu M + \varepsilon$$

ist. Die Menge O kann als Summe abzählbarer, nicht übereinandergreifender, abgeschlossener Intervalle dargestellt werden:

$$O = \sum_{k=1}^{\infty} i_k.$$

(Die Intervalle $i_1, i_2, \ldots$ können also nur Randpunkte gemeinsam haben.) Für die Maße besteht die Gleichung

$$\mu O = \sum_{k=1}^{\infty} \mu i_k.$$

(Für meßbare Mengen bedeutet das äußere Maß das Maß selbst.)
Es ist klar, daß für eine geeignete natürliche Zahl n die folgende Ungleichung besteht:

$$\mu O - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n} \mu i_k.$$

Mit den Intervallen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ kann man konzentrische Intervalle

$$i'_1, i'_2, \ldots, i'_n$$

konstruiren, so daß die Ungleichung

$$\mu O - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n} \mu i'_k$$

noch gilt und je zwei von den letzten Intervallen eine positive Entfernung voneinander haben.

Wenn nun die Menge M nicht-meßbar ist, so bezeichnet zum Beispiel M selbst eine nicht-meßbare Teimenge; im entgegengesetzten Falle gilt offenbar

$$\mu(O-M) = \mu O - \mu M < \varepsilon.$$

Führen wir die Bezeichnung

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} i'_k$$

ein, so wird

$$\mu(I_n M) + \mu(I_n - I_n M) = \mu I_n,$$
$$\mu(I_n - I_n M) < \varepsilon$$

und

$$\mu(A I_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A i'_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu i'_k = \mu I_n.$$

Es gilt

$$A I_n = A I_n M + (A I_n - A I_n M).$$

Da

$$\mu(A I_n) \leqq \mu(A I_n M) + \mu(A I_n - A I_n M)$$

und

$$A I_n - A I_n M \subset O - M$$

ist, so wird

$$\mu(A I_n - A I_n M) \leqq \mu(O-M) < \varepsilon.$$

Wir wissen, daß

$$\mu(A I_n) = \mu I_n > \mu O - \frac{\varepsilon}{2} > a - \frac{\alpha}{4} = \frac{3}{4}\alpha,$$

und daraus folgt

$$\mu(A I_n M) \geqq \mu(A I_n) - \mu(A I_n - A I_n M) > \frac{3}{4}\alpha - \varepsilon > \frac{3}{4}\alpha - \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{2}.$$

Andererseits ist

$$m(A I_n M) = 0,$$

weil $mA = 0$ und $A I_n M \subset A$ ist.

Es stellt also $A I_n M$ eine nicht-meßbare Teilmenge von M dar.

Wenn $\mu M = +\infty$ ist, so gibt es ein Intervall I, so daß

$$0 < \mu(MI) < +\infty$$

ist und unsere ganze vorige Beweisführung auf die Menge $M' = MI$ angewandt werden soll.

(Eingegangen am 31. Mai, 1952.)