Über eine mit der verallgemeinerten Kontinuumhypothese äquivalente Behauptung.

Von G. FODOR in Szeged.

M sei eine beliebige Menge mit der Mächtigkeit $2^{\aleph_\alpha}$. Bezeichne $M\times M$ das Descartes'sche Produkt von M mit sich selbst. Nennen wir die Menge der Punkte (x, y_0) von $M\times M$ (bei konstanten y_0) eine waagerechte und die der Punkte (x_0, y) von $M\times M$ eine senkrechte Gerade.

Wir beweisen, daß die verallgemeinerte Kontinuumhypothese mit der folgenden Behauptung äquivalent ist.

Es gibt in $M\times M$ eine Menge E, die die folgenden zwei Eigenschaften besitzt:

1. *Die Mächtigkeit von E ist auf jeder senkrechten Gerade höchstens $\aleph_\alpha$.*
2. *Ist A eine Teilmenge von M mit der Mächtigkeit $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}>\aleph_\alpha$, so gibt es wenigstens ein solches Element $y_0\in A$, für welches die Menge $V=\{(x, y_0); x\in A\}$ $\mathfrak{n}$ Elemente von E enthält.*

Beweis. Sei φ die Anfangszahl der Mächtigkeit $2^{\aleph_\alpha}$ und

$$\{x_\mu\}_{\mu<\varphi}=x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\mu, \ldots \tag{1}$$

eine Folge sämtlicher Elemente von M mit dem Ordnungstyp φ. Wir zeigen zuerst, daß die obige Behauptung eine Folge der verallgemeinerten Kontinuumhypothese ist. Wir setzen also $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$ (d. h. $\varphi=\omega_{\alpha+1}$) als richtig voraus. Sei $\{x_\mu\}_{\mu<\varphi}$ auf zwei Teilfolgen mit dem Ordnungstyp φ zerlegt:

$$\{x_\mu\}_{\mu<\varphi}=\{x_\mu^1\}_{\mu<\varphi}\cup\{x_\mu^2\}_{\mu<\varphi}=B_1\cup B_2$$

so, daß $B_1\cap B_2=0$. Sei E die Menge sämtlicher Punkte (x_β^i, x_γ^i) $(i=1,2)$, für welche $\gamma\leqq\beta<\varphi$ ist. Sei ferner a ein gegebenes Element von M. Ist $a\in B_1$, so ist $a=x_\beta^1$ für eine Ordnungszahl $\beta<\varphi$. E enthält auf der senkrechten Gerade $x=a$ alle Punkte (x_β^1, x_γ^1) mit $\gamma\leqq\beta$. Wegen $\beta<\varphi$ ist die Mächtigkeit der Ordnungszahl γ nicht größer als $\aleph_\alpha$. Folglich enthält E auf jeder senkrechten Gerade $x=a$ $(a\in B_1)$ eine Anzahl $\leqq\aleph_\alpha$ von Punkten. Ähnlicherweise kann man die Eigenschaft 1) von E im Falle $a\in B_2$ einsehen.

Sei nun $C\subset M$, so daß $\overline{C}=2^{\aleph_\alpha}$ ist.[1]) Es gilt offenbar $\overline{C\cap B_i}=2^{\aleph_\alpha}$ z. B. für $i=1$. Sei $b\in C\cap B_1$; dann ist $b=x_\gamma^1$ für ein $\gamma<\varphi$. Die Punkte von E

[1]) Mit $\overline{C}$ bezeichnen wir die Mächtigkeit einer Menge C.

auf der waagerechten Gerade $y = b$ sind jene Punkte (x^1_β, x^1_γ), für welche $\beta \geqq \gamma$ ist. Da $\gamma < \omega_{\alpha+1}$ und $\overline{\overline{C \cap B_1}} = 2^{\aleph_\alpha}$ ist, hat die Menge

$$\{(x^1_\mu, b);\, x^1_\mu \in C \cap B_1\} \cap E$$

die Mächtigkeit $2^{\aleph_\alpha}$. Daraus folgt, daß die Menge

$$\{(x_\varkappa, b);\, x_\varkappa \in C\} \cap E$$

die Mächtigkeit $2^{\aleph_\alpha}$ hat. Damit ist auch die Eigenschaft 2) der Menge E bewiesen.

Lemma. *Gibt es in $M \times M$ eine die Eigenschaft* 2) *besitzende Menge E, dann enthält jede waagerechte Gerade, höchstens mit der Ausnahme einer Menge von der Mäctigkeit $\leqq \aleph_\alpha$ waagerechter Geraden, mindenstens einen Punkt gemeinsam mit E.*

Beweis. Nehmen wir an, daß die Behauptung des Lemmas falsch ist. Dann gibt es eine Menge

$$D = \{\ldots, (x, y_\varkappa), \ldots\} \qquad (x \in M)$$

waagerechter Geraden von einer Mächtigkeit $> \aleph_\alpha$, deren Geraden keinen Punkt mit E gemeinsam haben. Sei $N = \{\ldots, y_\varkappa, \ldots\}$. Offenbar ist $\overline{N} > \aleph_\alpha$. Nach der Eigenschaft 2) der Menge E gibt es ein solches $y_0 \in N$, für welches $\overline{\{(x, y_0);\, x \in N\} \cap E} > \aleph_\alpha$ ist, was der Definition von D widerspricht.

Auf Grund des Lemmas zeigen wir, daß die verallgemeinerte Kontinuumhypothese eine Folge von unserer Behauptung ist. Für diesen Zweck setzen wir voraus, daß die verallgemeinerte Kontinuumhypothese falsch ist, d. h. $2^{\aleph_\alpha} > \aleph_{\alpha+1}$ gilt. Dies wird zu einem Widerspruch führen, wenn die obige Behauptung als richtig angenommen ist.

Zuerst definieren wir die Menge $Z = \{z_\zeta\}$ durch transfinite Induktion folgendermaßen. Sei $z_0 = x_0$. Sei η eine gegebene Ordnungszahl und nehmen wir an, daß z_ζ, für jeden Index $\zeta < \eta$ schon definiert ist. Dann sei z_η das erste Element x_ξ der Folge (1), für welches $(x_\xi, z_\zeta) \notin E$ $(\zeta < \eta)$ und $x_\xi \neq z_\zeta$ $(\zeta < \eta)$ ist. Hat (1) kein solches Element x_ξ, so wird z_η nicht definiert. Ist $\eta = \eta_0$ der kleinste Index, für den z_η nicht definiert ist, so ist

$$Z = \{z_\zeta\}_{\zeta < \eta_0}.$$

Wir beweisen, daß $\overline{Z} < \aleph_{\alpha+1}$ ist. Nehmen wir nämlich an, daß dies unrichtig ist. Dann gilt $\overline{Z} \geqq \aleph_{\alpha+1}$. Bezeichnen wir eine Teilfolge von Z mit dem Ordnungstyp $\omega_{\alpha+1}$ durch Z^*. Wegen der Eigenschaft 2) der Menge E gibt es ein Element $z_{\zeta_0} \in Z^*$, so daß die Menge

$$\{(z_\zeta, z_{\zeta_0});\, z_\zeta \in Z^*\} \cap E$$

die Mächtigkeit $\aleph_{\alpha+1}$ hat. Da Z^* eine Folge vom Typ $\omega_{\alpha+1}$ ist, gibt es ein Element $z_{\zeta_1} \in Z^*$, für welches $\zeta_1 > \zeta_0$ und $(z_{\zeta_1}, z_{\zeta_0}) \in E$ ist, was der Definition von Z widerspricht.

Sei P die Menge sämtlicher Geraden $y = z_\zeta$ mit $z_\zeta \in Z$. Bezeichne Q die Menge der senkrechten Geraden, die durch die Punkte $p \in E$ der Elemente von P gehen. Aus der Definition von Z ist ersichtlich, daß Q die Menge $Q^* = \{(x_\xi, y)\}_{\xi<\varphi} - \{(z_\eta, y)\}_{\eta<\eta_0}$ enthält.

Definieren wir nun die Mengen $\{Z_\beta\}$, $\{P_\beta\}$ und $\{Q_\beta\}$ durch transfinite Induktion folgendermaßen. Sei $Z_0 = Z, P_0 = P$ und $Q_0 = Q$. Sei μ eine gegebene Ordnungszahl und nehmen wir an, daß Z_β, P_β und Q_β für jeden Index $\beta < \mu$ schon definiert ist. Betrachten wir dann die Mengen

$$M_\mu = \{x_\gamma\}_{\gamma<\varphi} - \bigcup_{\beta<\mu} Z_\beta,$$

$$E_\mu = E_0 - (\bigcup_{\beta<\mu} P_\beta \cap E_0) \qquad [E_0 = E].$$

Wenn $E_\mu \neq 0$, so wird $Z_\mu = \{z_{\mu\zeta}\}$ durch transfinite Induktion folgendermaßen definiert. Sei $z_{\mu 0}$ das erste Element der Menge M_μ. Sei η eine gegebene Ordnungszahl und nehmen wir an, daß jedes Element $z_{\mu\zeta}$ von Z_μ, mit $\zeta < \eta$ schon definiert ist. Dann sei $z_{\mu\eta}$ das erste Element x_ξ der Menge M_μ, für welches $(x_\xi, z_{\mu\zeta}) \notin E$ und $x_\xi \neq z_{\mu\zeta}$ $(\zeta < \eta)$ ist. Hat M_μ kein solches Element x_ξ, so wird $z_{\mu\eta}$ nicht definiert. Ist $\eta = \eta_\mu$ der kleinste Index, für den $z_{\mu\eta}$ nicht definiert ist, so ist $Z_\mu = \{z_{\mu\eta}\}_{\eta<\eta_\mu}$ $(Z_0 = \{z_{0\eta}\}_{\eta<\eta_0} = \{z_\eta\}_{\eta<\eta_0})$. Dann sieht man wie vorher, daß $\overline{Z} < \aleph_{\alpha+1}$ ist. Sei P_μ die Menge sämtlicher Geraden $y = z_{\mu\eta}$ mit $z_{\mu\eta} \in Z_\mu$. Bezeichne Q_μ die Menge der senkrechten Geraden, die durch die Punkte $p \in E$ der Elemente von P_μ gehen. Sei $Q^*_\mu = \{(x_\xi, y)\}_{\xi<\varphi} - \{(z_{\beta\eta}, y)\}_{\beta\leqq\mu, \eta<\eta_\mu}$. Aus der Definition von Z_μ ist ersichtlich, daß Q_μ die Menge Q^*_μ enthält. Ist $E_\mu = 0$, so wird P_μ und Q_μ nicht definiert.

$M \times M$ enthält offenbar $2^{\aleph_\alpha}$ waagerechte Geraden. Es gilt $\overline{\overline{\bigcup_{\beta<\mu} P_\beta}} < 2^{\aleph_\alpha}$ $(\mu < \varphi)$, da $\overline{\overline{P}}_\beta < \aleph_{\alpha+1}$ ist. Auf Grund des Lemmas folgt daraus, daß $\overline{\overline{E}}_\mu = 2^{\aleph_\alpha}$ für $\mu < \varphi$ ist. Deshalb sind die Elemente der Folge $\{P_\beta\}$ und $\{Q_\beta\}$ für jede Ordnungszahl $\beta < \varphi$ definiert. Es gilt offenbar

$$P_\alpha \cap P_\beta = 0 \qquad (\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta < \varphi), \tag{2}$$

da $Z_\alpha \cap Z_\beta = 0$ ist. Ferner gilt wegen $\overline{\overline{Z}}_\beta < \aleph_{\alpha+1}$, das $\overline{\overline{Q^*_\mu}} = 2^{\aleph_\alpha}$ für $\mu < \varphi$ ist. Aus

$$Q^*_\alpha \supset Q^*_1 \supset \cdots \supset Q^*_\beta \supset \cdots$$

und

$$Q_\beta \supset Q^*_\beta \qquad (\beta < \varphi)$$

folgt, daß $\bigcap_{\gamma\leqq\omega_{\alpha+1}} Q_\gamma \neq 0$ ist. Die Elemente von $\bigcap_{\gamma\leqq\omega_{\alpha+1}} Q_\gamma$ enthalten aber — wegen der Definition der Mengen Q_β und (2) — wenigstens $\aleph_{\alpha+1}$ Elemente von E, was der Eigenschaft 1) der Menge E widerspricht.

Korollar. Die Kontinuumhypothese ist äquivalent mit der Existenz einer Punktmenge E der Ebene, die auf jeder Parallelen zur z-Achse höchstens abzählbar ist, während die Komplementärmenge $\overline{E}$ ihrerseits auf jeder Parallelen zur y-Achse höchstens abzählbar ist. [Vgl. W. SIERPIŃSKI, Hypothèse du continu (Warszava, 1934), p. 9.]

(Eingegangen am 2. Juni, 1952.)