Eine Behauptung, die mit der verallgemeinerten Kontinuumhypothese äquivalent ist.

Von I. KETSKEMÉTY in Szeged.

$\mathfrak{M}$ sei eine Menge mit der Mächtigkeit $2^{\aleph_\alpha} (\alpha \geqq 0)$. Jede nicht leere endliche Teilmenge von $\mathfrak{M}$ sei mit genau einem Element der Teilmenge repräsentiert. Eine solche Repräsentation der endlichen Teilmengen von $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir mit R. Wir zeigen, daß die folgende Behauptung (B) mit der verallgemeinerten Kontinuumhypothese (H) gleichwertig ist.

(B): *Es gibt eine solche Repräsentation R_1, bei welcher jedes Element $x \in \mathfrak{M}$ höchstens eine Anzahl $\leqq \aleph_\alpha$ der endlichen Teilmengen von $\mathfrak{M}$ repräsentiert.*

Beweis. 1. *Aus der verallgemeinerten Kontinuumhypothese* (H) *folgt* (B). Nehmen wir an, daß $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Sei $\omega_{\alpha+1}$ die Anfangszahl von $\aleph_{\alpha+1}$ und $\{x_\xi\}_{\xi < \omega_{\alpha+1}}$ eine transfinite Folge sämtlicher Elemente von $\mathfrak{M}$:

$$(1) \qquad \{x_\xi\}_{\xi < \omega_{\alpha+1}} = x_1, x_2, \ldots, x_\xi, \ldots$$

Bezeichne R_1 diejenige Repräsentation, bei welcher jede endliche Teilmenge von $\mathfrak{M}$ durch jenes Element repräsentiert wird, welches den größten Index in (1) hat. Wir zeigen, daß R_1 die in (B) formulierte Eigenschaft besitzt. Ein beliebiges Element $x_\xi \in \mathfrak{M}$ repräsentiert nämlich so viele Teilmengen von $\mathfrak{M}$, wie groß die Anzahl sämtlicher endlichen Teilmengen der Menge $\mathfrak{E}_\xi = \{x_\eta\}_{\eta < \xi}$ ist. Da $\overline{\overline{\mathfrak{E}_\xi}} \leqq \aleph_\alpha$ ist[1]), ist (H) $\rightarrow$ (B) bewiesen.

2. *Aus* (B) *folgt* (H). Nehmen wir an, daß es eine Repräsentation R_1 existiert, die verallgemeinerte Kontinuumhypothese aber falsch ist. In diesem Falle gilt

$$\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1} < 2^{\aleph_\alpha}.$$

Bezeichnen wir die Vereinigungsmenge der durch x repräsentierten endlichen Teilmengen von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{G}(x)$. Die Menge der Elemente $y \in \mathfrak{M}$, für welche $x \notin \mathfrak{G}(y)$ ist, wird mit $\mathfrak{N}(x)$ bezeichnet. Wir zeigen, daß $\mathfrak{M}$ mindestens ein solches Element x_1 hat, für welches $\overline{\overline{\mathfrak{N}(x)}} > \aleph_\alpha$ ist. Sei nämlich angenommen, daß $\mathfrak{M}$ kein solches Element hat. In diesem Falle ist $\overline{\overline{\mathfrak{N}(x)}} \leqq \aleph_\alpha$ für jedes Element x von $\mathfrak{M}$. Sei nun $\mathfrak{S}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathfrak{M}$ mit $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} = \aleph_{\alpha+1}$. Die Menge $\mathfrak{H} = \sum_{x \in \mathfrak{S}} \mathfrak{N}(x)$ hat offenbar die Mächtigkeit $\leqq \aleph_{\alpha+1}$. Folglich ist die Menge $\mathfrak{M} - \mathfrak{H}$ nicht leer. Jedes Element y von $\mathfrak{M} - \mathfrak{H}$ hat die Eigenschaft

[1]) Mit $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}$ bezeichnen wir die Mächtigkeit einer Menge $\mathfrak{E}$.

$\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{G}(y)$. Somit ist $\overline{\overline{\mathfrak{G}(y)}} \geqq \aleph_{\alpha+1}$ für $y \in (\mathfrak{M} - \mathfrak{H})$, was ein Widerspruch ist. Im Falle einer Repräsentation R_1 repräsentiert nämlich ein beliebiges Element x von $\mathfrak{M}$ höchstens $\aleph_\alpha$ endliche Teilmengen, weswegen $\overline{\overline{\mathfrak{G}(x)}} \leqq \aleph_\alpha$ gilt.

$\mathfrak{M}$ hat also ein Element x_1, für welches $\mathfrak{N}(x_1) > \aleph_\alpha$ ist. Betrachten wir nun die offenbar nicht leere Menge $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}(x_1) - (\mathfrak{N}(x_1) \cap \mathfrak{G}(x_1))$. Die endlichen Teilmengen von $\mathfrak{M}$ der Form $\{x_1, y_{\xi_1}, \ldots, y_{\xi_n}\}$ mit $y_{\xi_i} \in \mathfrak{A}$ sind bei R_1 nicht repräsentiert, was der Definition von R_1 widerspricht. Damit ist unser Satz bewiesen.

Korollar. *Ist die Kontinuumhypothese richtig, so kann der n-dimensionale Euklidische Raum in die Summe von n disjunkten Mengen $\mathfrak{E}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ derart zerlegt werden, daß $\mathfrak{E}_i$ in jedem zur i-ten Achse orthogonalen $(n-1)$-dimensionalen Hyperplan abzählbar ist.*[2])

Der Beweis des Korollars folgt aus unserem Satze. Betrachten wir nämlich die Menge $\mathfrak{R}^1$ der reellen Zahlen und die Menge $\mathfrak{R}^n$ sämtlicher Punkte des n-dimensionalen Raumes. Sei nun jedem Element $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$ genau ein Element $x(P)$ von $\mathfrak{R}^1$ folgendermaßen zugeordnet:

Bezeichne R_1 eine Repräsentation der endlichen Teilmengen von $\mathfrak{R}^1$, bei welcher jedes Element von $\mathfrak{R}^1$ höchstens abzählbar viele endlichen Teilmengen von $\mathfrak{R}^1$ repräsentiert. Ist die Kontinuumhypothese richtig, so gibt es nach unserem Satze eine solche Repräsentation. Die Koordinaten von P bilden eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{R}^1$:

$$\mathfrak{P} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Bei R_1 wird diese Teilmenge $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}^1$ durch ein $x_i = x(P)$ repräsentiert. Wir ordnen also jedem Element $P \in \mathfrak{R}^n$ genau eine seiner Koordinaten zu.

Wir definieren die Mengen $\mathfrak{E}^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ folgendermaßen: Sei $\mathfrak{E}_i^*$ die Menge sämtlicher Punkte $P \in \mathfrak{R}^n$, für welche $x(P)$ gleich der i-ten Koordinate von P ist. Ferner definieren wir die Mengen $\mathfrak{E}_i$ folgendermaßen:

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_1^*; \quad \mathfrak{E}_j = \mathfrak{E}_j^* - \sum_{i<j} \mathfrak{E}_j^* \cap \mathfrak{E}_i^* \qquad (j = 2, 3, \ldots, n).$$

Man kann leicht einsehen, daß $\Sigma \mathfrak{E}_i = \Sigma \mathfrak{E}_i^* = \mathfrak{R}^n$, ist. Wegen der Definition von $\mathfrak{E}_i$ ist $\mathfrak{E}_i \cap \mathfrak{E}_j = 0$, wenn $i \neq j$ ist. Andererseits ist $\mathfrak{E}_i$ in einem mit der Gleichung $x_i = x^0$ definierten $(n-1)$-dimensionalen Hyperplan abzählbar. Die beliebige reelle Zahl x^0 repräsentiert nämlich bei R_1 höchstens abzählbar viele Teilmengen $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}^1$, folglich ist sie höchstens abzählbar vielen Punkten des Euklidischen Raumes zugeordnet. Die Zerlegung $\Sigma \mathfrak{E}_i = \mathfrak{R}^n$ entspricht also den Bedingungen des Korrollars.

(Eingegangen am 2. Juni, 1952.)

[2]) R. Sikorski, A characterisation of alephs. *Fund. Math.* **38** (1951), p. 22.