Ausdehnung des Hellyschen Satzes auf den Fall vollständiger konvexer Flächen.

Von GY. SOÓS in Debrecen.

§ 1.

In vorliegender Arbeit soll ein, sich auf ebene konvexe Gebiete beziehender Satz von HELLY auf konvexe Gebiete gewisser konvexer Flächen[1]) verallgemeinert werden.

Im Folgenden betrachten wir nur diejenigen konvexen Flächen, die der Ebene, der Kugel und der Kreiszylinderfläche homöomorph sind. Diese Flächenklasse, die Klasse der sog. vollständigen konvexe Flächen, ist dadurch ausgezeichnet, daß sich auf diesen Flächen je zwei Punkte durch eine kürzeste Linie verbinden lassen, während auf beliebigen konvexen Flächen diese Eigenschaft nur „im Kleinen", d. h. nur in hinreichender kleinen Umgebung jedes Punktes der Fläche erfüllt ist.

Für die gegenseitige Lage zweier kürzester Linien auf einer vollständigen konvexen Fläche sind, ähnlich wie für zwei Grosskreise einer Kugel, nur folgende Fälle möglich: *a)* zwei kürzeste Linien haben keinen, *b)* sie haben nur einen, *c)* sie haben gerade zwei Punkte gemein und in diesem Falle sind die zwei Punkte gemeine Endpunkte der kürzesten Linien; *d)* eine der kürzesten Linien ist völlig in der anderen enthalten; *e)* die beiden kürzesten Linien besitzen einen gemeinsamen Bogen, dessen beide Endpunkte je einen Endpunkt der beiden kürzesten Linien bildet und dieser Bogen enthält sämtliche gemeinsamen Punkte der beiden Linien.

Als Folge des Gesagten erwähnen wir noch eine wichtige Eigenschaft der kürzesten Linien:

Liegen die Punkte A, B und C nicht auf einer kürzesten Linie, so haben die kürzesten Linien AB, AC, BC außer den Endpunkten keinen gemeinsamen Punkt. (Im Folgenden werden wir die durch A und B bestimmte kürzeste Linie die Abkürzung AB einführen.)

---

[1]) Für die Definition und weitere Eigenschaften der hier vorkommenden Begriffe, wie (vollständige) konvexe Fläche, kürzeste Linie, usw. siehe das Buch von A. D. ALEXANDROV: Innere Geometrie der konvexen Flächen. (Moskau, 1948.) (Russisch.)

Definition: Jede metrische Mannigfaltigkeit, die die Eigenschaft hat, daß sie mit zwei beliebigen Punkten auch die zugehörige kürzeste Linie enthält, wird konvex genannt.

Speziell wird unter einem konvexen Gebiet einer vollständigen konvexen Fläche diejenige Punktmenge der Fläche verstanden, die die folgende Eigenschaften besitzt: *a)* konvex (im obigen Sinne), *b)* kompakt, *c)* besitzt innere Punkte, *d)* ihre Grenzkurve besteht aus endlich vielen einfachen Bogen.

Für Späteres sind noch folgende Sätze von Wichtigkeit:

Sind A und B Punkte eines konvexen Gebietes G, und ist A ein innerer Punkt von G, dann läuft jede die Punkte A und B verbindende kürzeste Linie im Inneren des Gebietes G.

Besitzt der Durchschnitt von zwei konvexen Gebieten innere Punkte, so ist dieser Durchschnitt auch konvex. (Dieser Satz gilt, natürlich, auch für endlich viele konvexe Gebiete.)

§ 2.

Bevor wir unseren Satz aussprechen, beweisen wir den folgenden

Hilfssatz: *Sind K_0, K_1, K_2 und K_3 vier beschränkte konvexe Gebiete einer vollständigen konvexen Fläche F derart, daß je drei von ihnen einen Durchschnitt $\neq 0$ mit inneren Punkten besitzen, so ist der Durchschnitt K der vier Gebiete nicht leer:* $K = \bigcap_i K_i \neq 0$, $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Beweis: Nach Voraussetzung besitzen je drei Gebiete gemeinsame innere Punkte. Wir wählen die Punkte A_0, A_1, A_2, A_3 folgenderweise:

$$A_0 \in K_1 \cap K_2 \cap K_3; \quad A_1 \in K_0 \cap K_2 \cap K_3;$$
$$A_2 \in K_0 \cap K_1 \cap K_3; \quad A_3 \in K_0 \cap K_1 \cap K_2.$$

Da die Punkte A_0, A_1, A_2 in K_3 liegen, enthält K_3 wegen seiner Konvexität auch die kürzeste Linien A_0A_1, A_1A_2, A_0A_2, folglich das ganze Dreieck $A_0A_1A_2$. Also ist $A_0A_1A_2 \subset K_3$ und ähnlich $A_0A_2A_3 \subset K_1$, $A_0A_1A_3 \subset K_2$, $A_1A_2A_3 \subset K_0$.

Für die vier Punkte A_0, A_1, A_2, A_3 und die sie verbindenden kürzesten Linien sind folgende Konfigurationen möglich: *a)* Zwei von den vier Punkten sind innere Punkte der die anderen zwei verbindenden kürzesten Linien; *b)* zwei von den vier Punkten liegen auf den durch die beiden anderen bestimmten zwei kürzesten Linien derart, daß der eine innere Punkt der ersten und der andere innere Punkt der zweiten kürzesten Linie ist; *c)* drei von den vier Punkten liegen auf einer kürzesten Linie und der vierte liegt außerhalb; *d)* einer von den vier Punkten (z. B. A_0) ist innerer Punkt des von den anderen drei bestimmten Dreiecks; *e)* je beliebige drei von den vier Punkten liegen nicht auf einer kürzesten Linie.

Da der Beweis in den Fällen *a)—c)* unmittelbar aus den einfachsten Eigenschaften der kürzesten Linien folgt, müssen wir bloss die Fälle *d)* und *e)* untersuchen.

d) Sei $A_1A_2A_3$ dasjenige Dreieck, das A_0 als inneren Punkt enthält. Dann ist aber $A_0 \in K_0$ und folglich ist $A_0 \in K_0 \cap K_1 \cap K_2 \cap K_3$.

e) Nach Voraussetzung liegen keine drei der vier Punkte auf einer kürzesten Linie. Zwei Fälle sind möglich. Zwei nicht benachbarte kürzeste Linien haben zumindest einen gemeinsamen Punkt. Seien diese kürzesten Linien A_1A_2 und A_0A_3; (A_0A_3 kann mit A_0A_1 und A_3A_2 außer den Endpunkten keinen gemeinsamen Punkt mehr haben; ähnliches gilt für A_1A_2.) Sei ferner C der Schnittpunkt: $C \in A_0A_3$ und $C \in A_1A_2$. Dann ist aber

$$C \in A_1A_2A_3 \subset K_0, \quad C \in A_0A_2A_3 \subset K_1, \quad C \in A_0A_1A_3 \subset K_2, \quad C \in A_0A_1A_2 \subset K_3$$

also ist $C \in K_0 \cap K_1 \cap K_2 \cap K_3$.

Schließen wir diese Möglichkeit aus, und betrachten wir im Folgenden nur ein solches Viereck $A_0A_1A_2A_3$, dessen kürzeste Linien A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, und A_3A_1 außer den Endpunkten keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Bestimmen wir die als Diagonalen bezeichneten kürzesten Linien A_0A_2, A_1A_3, dann kommen für den Verlauf dieser Diagonalen in Bezug auf das Viereck $A_0A_1A_2A_3$ für unseren Beweis im wesentlichen zwei Fälle in Betracht. Im ersten Falle wird eine (eventuell beide) kürzeste Linie außerhalb des Vierecks $A_0A_1A_2A_3$ verlaufen. Dann wird aber, falls diese kürzeste Linie A_1A_3 ist, A_2 oder A_0 innerer Punkt des Dreiecks $A_0A_1A_3$ oder des Dreiecks $A_1A_2A_3$ und nach *d)* gemeinsamer Punkt der vier Gebiete sein.

Es bleibt nur noch der Fall übrig, in dem die Diagonalen A_0A_2 und A_1A_3 ganz im Inneren des Vierecks so verlaufen, daß sie außer ihren Endpunkten mit den Seiten des Vierecks keinen gemeinsamen Punkt besitzen. In diesem Falle schneidet die aus den einfachen Bogen A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 bestehende geschlossene Kurve aus der vollständigen konvexen Fläche F ein zusammenhängendes Gebiet heraus. Wir wählen einen geeigneten Punkt P im Inneren des von F begrenzten konvexen Körpers K. Wir projizieren das Viereck mittels der von P ausgehenden Halbgerade auf eine Ebene E. Die Abbildung ist ein Homöomorphismus in folgedessen wird dem Viereck G ein zusammenhängendes Gebiet G' der Ebene E zugeordnet, und es geht die Grenzkurve von G in diejenige von G' über. Die den Bögen $A_1A_0A_3$, $A_1A_2A_3$ und A_1A_2 entsprechenden Bögen $A_1'A_0'A_3'$, $A_1'A_2'A_3'$, $A_1'A_3'$ haben außer A_0' und A_3' keinen gemeinsamen Punkt. Nach einem bekannten Satz (siehe z. B KURATOWSKI: Topologie II. (Warszawa, 1950), Seite 359) zerschneiden diese die Ebene in drei disjunkte Gebiete D_0, D_1, D_2. Daraus folgt, daß der Bogen $A_1'A_3'$ das Innere der einfachen geschlossenen Kurve $A_0'A_1'A_2'A_3'$ in zwei Gebiete zerschneidet, für welche $D_0 \cap D_1 = 0$. Da nach Voraussetzung $A_0'A_2'$ außer $A_0'A_2'$ keine Grenzpunkte (hinsichtlich des Gebiets) besitzt und ganz im Inneren der geschlossenen Kurve $A_0'A_1'A_2'A_3'$ verläuft, so muß sie von D_0 in D_1 übergehen. Dies ist nur in dem Falle möglich, wenn sie den Bogen $A_1'A_3'$ in irgendeinem von A_1' und A_3' verschiedenen Punkte C' schneidet.

Betrachten wir nun den C' entsprechenden Punkt C auf der Fläche F. Dieser Punkt liegt auf einer Seite eines jeden Dreiecks. Dann ist aber $C \in K_0 \cap K_1 \cap K_2 \cap K_3$. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes beendet.

Mit Hilfe des eben bewiesenen Hilfssatzes beweisen wir nun den folgenden Satz von HELLY:

Satz 1. *Sind $K_1, K_2, \ldots, K_n$ beschränkte konvexe Gebiete der vollständigen konvexen Fläche F derart, daß je drei von ihnen einen Durchschnitt $\neq 0$ mit inneren Punkten besitzen, so ist der Durchschnitt $\bigcap\limits_{i=1}^{i=n} K_i$ nicht leer.*

Der Beweis geschieht durch Induktion nach der Anzahl der Gebiete. Für $n = 4$ ist der Satz auf Grund des Hilfssatzes richtig.

Seien $K_1, K_2, \ldots, K_n, K_{n+1}$ $n+1$ Gebiete, die den Bedingungen des Satzes 1 genügen. Bezeichne $\overline{K}_n$ den Durchschnitt von K_n und K_{n+1}. Die Gebiete $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}, \overline{K}_n$ genügen den Bedingungen des Satzes. In der Tat, unter den Gebieten $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$ besitzen je drei nach Voraussetzung einen nichtleeren Durchschnitt mit inneren Punkten, während K_l, K_m und $\overline{K}_n$ $(l, m = 1, \ldots, n-1)$ nach dem Hilfssatz einen Durchschnitt mit inneren Punkten besitzen. $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}, \overline{K}_n$ haben also nach der Induktionsvoraussetzung gemeinsame Punkte. Aus $\overline{K}_n = K_n \cap K_{n+1}$ folgt, daß auch $K_1, K_2, \ldots, K_n, K_{n+1}$ gemeinsame Punkte haban, d. h. $\bigcap\limits_{i=1}^{i=n+1} K_i \neq 0$ ist. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Im Laufe unserer bisherigen Betrachtungen haben wir vorausgesetzt, daß die Gebiete beschränkt und von endlicher Anzahl sind. Diese letztere Beschränkung kann weglassen werden und wir beweisen den folgenden

Satz 2. *Bilden $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ eine Menge von beschränkten konvexen Gebieten einer vollständigen konvexen Fläche F derart, daß je drei von diesen Gebieten einen Durchschnitt $\neq 0$ mit inneren Punkten besitzen, so ist der Durchschnitt sämtlicher Gebiete K_i nicht leer.*

Nach Satz 1 haben je n (n endlich) Gebiete einen nichtleeren Durchschnitt. Da diese Gebiete geschlossen sind und die vollständigen Flächen kompakt sind, verweisen wir zum Beweis des vorliegenden Satzes auf einen bekannten Satz von F. RIESZ (siehe z. B. K. KURATOWSKI: Topologie II. (Warszawa, 1950), Seite 5.):

Gibt es in einem kompakten Raume eine Menge von geschlossenen Mengen derart, daß der Durchschnitt von je endlich vielen nicht leer ist, so ist der Durchschnitt aller dieser Mengen nicht leer.

Herrn Prof. O. VARGA spreche ich für seine wertvollen Bemerkungen den besten Dank aus.

(Eingegangen am 28. Juli 1952.)