Über eine Klasse von Integralgleichungen.

Von I. FENYŐ in Budapest.

E. EGERVÁRY[1]) hat folgenden Satz bewiesen: Ist $K(t)$ eine nach 2π periodische und mit ihrem Quadrat integrierbare Funktion, so sind die Eigenwerte der Integralgleichung mit dem Kern $K(x-y)$:

$$\lambda_l = \frac{1}{\int_0^{2\pi} K(t)\, e^{-ilt}\, dt} \qquad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Die zu λ_l gehöringen Eigenfunktionen sind von der Form

$$\varphi_l = C \cdot e^{-ilx}.$$

Ist der Kern symmetrisch, d. h. $K(t) = K(-t)$, so sind die Eigenwerte

$$\lambda_l = \frac{1}{\int_0^{2\pi} K(t) \cos lt\, dt},$$

und die zu λ_l gehöringen Eigenfunktionen

$$\varphi_l = A \cos lx + B \sin lx.$$

In diesem Falle hat der Eigenwert λ_l die Multiplizität 2.

Der Kern von der Form $K(x-y)$ kann als eine Funktion von zwei Veränderlichen interpretiert werden, deren Wert ausschließlich vom Abstande von zwei auf dem Einheitskreise liegenden Punkte abhängt.

Von dieser letzten Interpretation ausgehend werden wir nun der erwähnten Satz verallgemeineren. Sei jetzt statt des Einheitskreises die Einheitskugel betrachtet und untersuchen wir solche Integralgleichungen, deren Kern nur von Abstand zweier, an der Einheitskugel liegender Punkte abhängt.

Sei $K(\gamma)$ eine beliebige, einfachheitshalber symmetrische Funktion. γ bedeute den Winkel, welchen die zu den betrachteten Punkten gehörigen Radien einschlißen. Sind die auf der Kugel liegende Punkte P und P', so ist

$$K(\gamma) = K(P, P').$$

---

1) EGERVÁRY JENŐ: Az integrálegyenletek egy osztályáról. *Mat. Fiz. Lapok* **23** (1914), 303—358. I. FENYŐ: Sur une classe d'équations integrales et integrodifferentielles. *Bull. Politechnicii. "Gh. Asachi"* **3** (1948), p. 777—781.

K sei eine, sammt ihrem Quadrate integrierbare Funktion; das Integral sei auf die Kugeloberfläche erstreckt. Wir wollen die Eigenfunktionen und Eigenwerte von $K(P, P')$ bestimmen.

Sei $S_n(\vartheta, \varphi)$ eine, zur positiven ganzen Zahl n gehörige Kugelflächenfunktion. Es is bekannt, daß zu n genau $2n+1$ linear unabhängige Kugelflächenfunktionen gehören. Orthogonalisieren und normieren wir diese bezüglich der Kugeloberfläche, so erhalten wir das System von Kugelflächenfunktionen:

$$S_{n,1}(\vartheta,\varphi), S_{n,2}(\vartheta,\varphi), \cdots, S_{n,2n+1}(\vartheta,\varphi).$$

Die sind also Funktionen welche die folgende Eigenschaft besitzen:

$$\iint\limits_{(F)} S_{n,i}(\vartheta,\varphi) S_{n,k}(\vartheta,\varphi)\, df =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} S_{n,i}(\vartheta,\varphi) S_{n,k}(\vartheta,\varphi) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq k \\ 1, & \;\;\text{„} \quad i = k \end{cases}.$$

Dieser Prozeß wird für alle n durchgeführt. In dieser Weise erhalten wir ein System von orthogonalisierten und normierten Kugelflächenfunktionen $\{S_{n,m}(\vartheta,\varphi)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; m = 1, 2, \ldots)$:

$$\iint\limits_{(F)} S_{n,m}(\vartheta,\varphi) S_{k,p}(\vartheta,\varphi)\, df = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq k \text{ oder } m \neq p \\ 1, & \;\;\text{„} \quad n = k \text{ und } m = p \end{cases}.$$

Nun gilt folgender

Satz: *Sei $K(\gamma) = K(P, P')$ eine beliebige, nebst ihrem Quadrat integrierbare Funktion bezüglich der Oberfläche der Einheistkugel, welche bloß vom Abstand der Punkte P und P' abhängt. Die Koeffizienten der nach dem Legendreschen Polynomen fortschreitenden Reihe der Funktionen $K(\gamma) = f(\cos\gamma) = f(\xi)$ seien mit c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ bezeichnet. Dann sind die Eigenwerte des Kernes $K(P,P')$*

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{4\pi c_n} = \frac{2n+1}{4\pi \int\limits_{-1}^{+1} f(\xi) P_n(\xi)\, d\xi} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

und die zu λ_n gehörigen Eigenfunktionen

$$S_{n,1}(P), S_{n,2}(P), \ldots, S_{n,2n+1}(P).$$

Die multiplizität von λ_n ist $2n+1$.

Beweis. Die N-te Partialsumme der nach den Legendreschen Polynomen fortschreitenden Reihe von $f(\xi)$ sei $\sigma_N(\xi)$. Betrachten wir folgendes Integral

$$\iint\limits_{(F)} [K(P,P') - \sigma_N(P,P')]\, S_{n,m}(P')\, df =$$

$$= \iint\limits_{(F)} [f(\cos\gamma) - \sigma_N(\cos\gamma)]\, S_{n,m}(\vartheta',\varphi') \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'.$$

Hier ist $n \leqq N$. Gemäß der BUNJAKOWSKYschen Ungleichung folgt

$$\left\{\iint_{(F)} [f(\cos\gamma) - \sigma_N(\cos\gamma)]\, S_{n,m}(\vartheta',\varphi') \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'\right\}^2 \leqq$$

$$\leqq \iint_{(F)} [f(\cos\gamma) - \sigma_N(\cos\gamma)]^2 \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi \iint_{(F)} S_{n,m}(\vartheta'\varphi')^2 \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi' =$$

$$= \iint_{(F)} [f(\cos\gamma) - \sigma_N(\cos\gamma)]^2 \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'.$$

Sei nun ein neues Polarkoordinatensystem so gewählt, daß der Pol des neuen Systems der (ϑ, φ) Punkt is. Dann tritt statt ϑ' der Winkel γ ein und statt φ' muß ein anderer Wert ψ geschreiben werden. Nach Einführung der neuen Veränderlichen kann man die vorige Ungleichung in folgender Form schreiben:

$$\left\{\iint_{(F)} [f(\cos\gamma) - \sigma_N(\cos\gamma)]\, S_{n,m}(\vartheta',\varphi) \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'\right\}^2 \leqq$$

$$\leqq \iint_{(F)} [f(\cos\gamma) - \sigma_N(\cos\gamma)]^2 \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi' =$$

$$= \iint_{(F)} [f(\cos\gamma) - \sigma_N(\cos\gamma)]^2 \sin\gamma\, d\gamma\, d\psi = 2\pi \int_{-1}^{+1} [f(\xi) - \sigma_N(\xi)]^2\, d\xi.$$

Falls N genügend groß ist, so gilt:

$$2\pi \int_{-1}^{+1} [f(\xi) - \sigma_N(\xi)]^2\, d\xi < \varepsilon^2.$$

Andererseits ist

$$\iint_{(F)} [f(\cos\gamma) - \sigma_N(\cos\gamma)]\, S_{n,m}(\vartheta',\varphi')\, df = \iint_{(F)} f(\cos\gamma)\, S_{n,m}(\vartheta'\varphi')\, df -$$

$$- \iint_{(F)} \sum_{k=0}^{N} c_k P_k(\cos\gamma)\, S_{n,m}(\vartheta'\varphi')\, df =$$

$$= \iint_{(F)} f(\cos\gamma)\, S_{n,m}(\vartheta',\varphi')\, df - \frac{4\pi}{2n+1} c_n S_{n,m}(\vartheta,\varphi).$$

Somit erhalten wir die Ungleichung

$$\left| \iint_{(F)} K(P,P')\, S_{n,m}(\vartheta',\varphi')\, df - \frac{4\pi}{2n+1} c_n S_{n,m}(\vartheta,\varphi) \right| < \varepsilon$$

für jedes $n \leqq N$. Damit ist unser Satz bewiesen.

Vom bewiesenem Satz folgt die folgende Formel:

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} [S_{n,1}(\vartheta,\varphi)\, S_{n,1}(\vartheta',\varphi') + \cdots + S_{n,2n+1}(\vartheta,\varphi)\, S_{n,2n+1}(\vartheta',\varphi')].$$

Dies folgt aus der Tatsache, daß $P_n(\cos\gamma)$ nur endlich viele Eigenfunktionen besitzt und diese Kugelflächenfunktionen sind. Denn wäre $\Phi(\vartheta',\varphi')$ eine

Eigenfunktionen von $P_n(\cos\gamma)$, so ist sie, nach dem klassischen Legendreschen Additionenstheorem, von der Form

$$\Phi(\vartheta', \varphi') = \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\vartheta)\,[A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi],$$

also wieder eine Kugelflächenfunktion. Damit ist auch die letztere Bemerkung bewiesen.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß der Kern K dann und nur dann geschlossen ist, wenn kein, nach den Legendreschen Polynomen gebildeter Fourierkoffizient von $f(\xi)$ verschwindet. Sind sämtliche $c_n > 0$, so ist der Kern positiv definit. Ist auch noch $f(\xi)$ stetig, so erhalten wir nach dem wohlbekannten MERCERschen Satz:

$$f(\cos\gamma) = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} S_{n,k}(\vartheta, \varphi)\, S_{n,k}(\vartheta', \varphi').$$

Die rechts stehende Reihe ist absolut und gleichmäßig konvergent.

(Eingegangen am 30. Juli, 1952).