

## Ausfüllung und Überdeckung eines konvexen sphärischen Gebietes durch Kreise I.

Von J. MOLNÁR in Veszprém (Ungarn).

In der vorliegenden Arbeit<sup>1)</sup> beschäftigen wir uns mit folgenden, einander dual gegenüberstehenden Vermutungen von L. FEJES TÓTH:

*Sind in einem konvexen sphärischen Gebiet wenigstens drei kongruente nicht übereinandergreifende Kugelkappen eingelagert, so ist die Lagerungsdichte:*

*Ist ein konvexes sphärisches Gebiet durch wenigstens drei kongruenten Kugelkappen bedeckt, so ist die Überdeckungsdichte:*

$$(1) \quad d < \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0,9069 \dots$$

$$(2) \quad D > \frac{2\pi}{\sqrt{27}} = 1,2091 \dots$$

Hierbei wird ein sphärisches Gebiet  $G$  *konvex* genannt, wenn je zwei Punkte von  $G$  durch einen in  $G$  verlaufenden Großkreisbogen verbindet werden können. Unter der *Lagerungs-* bzw. *Überdeckungsdichte* wird der Quotient der Inhaltssumme der Kreise (Kugelkappen) und des Inhaltes des Gebietes verstanden.

Sonderfälle bzw. Grenzfälle der obigen Vermutungen, wobei das Gebiet in die ganze Ebene, in ein konvexes ebenes Gebiet bzw. in die ganze Kugel- fläche ausartet, wurden vorher von A. THUE<sup>2)</sup>, R. KERSHNER<sup>3)</sup> bzw. L. FEJES TÓTH<sup>4)</sup> bewiesen.

Der vorliegende erste Teil unserer Arbeit ist dem Lagerungsproblem, d. h. der Ungleichung (1) gewidmet. Auf das Überdeckungsproblem (Ungleichung (2)) kehren wir im zweiten Teil zurück.

<sup>1)</sup> Das Entstehen dieser Arbeit verdanke ich der freundlichen Anregung von Herrn Prof. FEJES TÓTH, der mich auch bei meinen Untersuchungen durch wertvolle Bemerkungen unterstützt hat.

<sup>2)</sup> A. THUE, Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer. *Forhdl. Skand. Naturforsk.* **14** (1892), 352—353; — Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene. *Christiania Vid. Selsk. Skr.* **1** (1910), 3—9.

<sup>3)</sup> R. KERSHNER, The number of circles covering a set. *Amer. J. Math.* **61** (1939), 665—671.

<sup>4)</sup> L. FEJES TÓTH, Über dichteste Kreislagerung und dünnste Kreisüberdeckung. *Comment. Math. Helvetici* **23** (1949), 342—349.

Liegt ein konvexes sphärisches Gebiet auf einer Halbkugel, so nennen wir es *im engeren Sinne konvex*. Es ist leicht einzusehen, daß *ein von der Vollkugel verschiedenes konvexes sphärisches Gebiet entweder selbst im engeren Sinne konvex ist, oder das Komplement eines solchen Gebietes ist.*

Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem das Gebiet  $G$ , oder sein Komplement  $\bar{G}$  im engeren Sinne konvex ist.

1. Fall  $G \leq 2\pi$ <sup>5)</sup>

Es seien in  $G$   $n \geq 2$  kongruente Kreise  $K_1, \dots, K_n$  vom (sphärischen) Radius  $r$  eingelagert. Wir können offenbar  $G$  durch die kleinste konvexe Hülle der Kreise  $K_1, \dots, K_n$  ersetzen, die wir wiederum mit  $G$  bezeichnen werden. Betrachten wir die Menge  $Z_i$  derjenigen Punkte von  $G$ , deren Abstand vom Mittelpunkt des Kreises  $K_i$  kleiner ist als der Abstand von jedem anderen Kreismittelpunkt. Wir nennen  $Z_i$  die zum Kreis  $K_i$  gehörige Zelle. Die Zellen  $Z_1, \dots, Z_n$  die entweder gewöhnliche, oder zum Teil durch Kreisbogen vom Radius  $r$  begrenzte konvexe sphärische „Polygone“ sind, überdecken schlicht und (abgesehen von den gemeinsamen Randpunkten der Zellen) lückenlos das Gebiet  $G$ . Wir zeigen, daß

$$(3) \quad \frac{K_i}{Z_i} < \frac{\pi}{\sqrt{12}}$$

ausfällt. Das ist eine Verschärfung von (1), die besagt, daß die Kreisladungsdichte schon in jeder einzelnen Zelle  $< \frac{\pi}{\sqrt{12}}$  ist.

Wir nehmen zunächst an, daß  $Z_i$  ein gewöhnliches sphärisches Polygon ist.

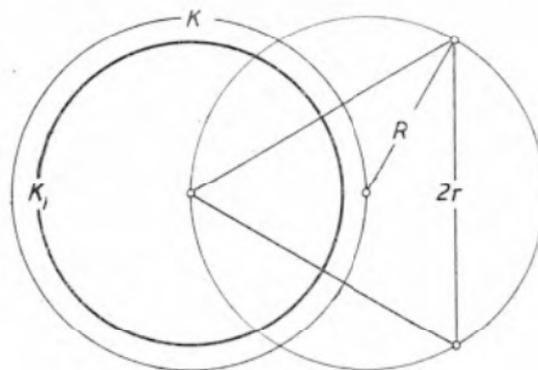


Fig. 1

Betrachten wir ein gleichseitiges sphärisches Dreieck der Seitenlänge  $2r$  und bezeichnen wir seinen Umkreisradius mit  $R$ . Wir schlagen ferner um  $K_i$  einen konzentrischen Kreis  $K$  vom Radius  $R$  (Fig. 1). Wir beweisen die

<sup>5)</sup> Im Folgenden bezeichnen wir ein Gebiet und sein Inhalt mit demselben Symbol.

folgende Ungleichung, welche schärfer als (3) ist:<sup>6)</sup>

$$(4) \quad K_i < \frac{\pi}{\sqrt{12}} Z_i K.$$

Bezeichnen wir die von den Seiten von  $Z_i$  bestimmten Kreisabschnitte von  $K$  mit  $a_1, \dots, a_\nu$ . Wir haben

$$Z_i K = K - (a_1 + \dots + a_\nu).$$

1a. Fall  $\nu = 7$ . Dieser Fall tritt nur für  $r < r_1 = \arcsin \frac{\sqrt{48 \sin^2 \frac{\pi}{7} - 9}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} \approx 3^\circ 8' 28''$  ein. Betrachten wir nämlich ein mit dem Kreis  $K_i$  konzentrisches reguläres 7-Eck vom Umkreishalbmesser  $2R$ . Die Seitenlänge desselben ist  $2 \arcsin \left( \frac{4}{\sqrt{3}} \sin r \sqrt{1 - \frac{4 \sin^2 r}{3}} \right)$ . Daraus folgt, daß die Seiten einer zu  $K$  gehörigen siebeneckigen Zelle für  $r = r_1$  den Kreis  $K$  eben noch berühren, aber nicht in  $K$  hineinschneiden können. Für  $r = r_1$  ist daher im Falle  $\nu = 7$   $Z_i K = K$ , und folglich

$$\frac{K_i}{Z_i K} = \frac{K_i}{K} = \frac{\sqrt{3}(1 - \cos r)}{\sqrt{3} - \sqrt{4 \cos^2 r - 1}} \approx 0,74912.$$

Man beachte nun, daß für  $r < r_1$  und  $\nu = 7$  die Seiten von  $Z_i$  nur einen überaus kleinen Teil von  $K$  abschneiden können. Für  $r = r_1$  ist der Inhalt des abgeschnittene Teiles, wie wir sahen, gleich 0, und er wird im Verhältnis zu  $K_i$  am größten im Grenzfall  $r \rightarrow 0$ . Um die Ungleichung (4) in Evidenz zu setzen, schätzen wir den Quotient  $\frac{K_i}{Z_i K}$  in diesem Grenzfall ab. Es handelt sich hier um eine ebene Konfiguration.  $K_i$  bedeute einen ebenen Kreis vom Radius 1,  $K$  einen konzentrischen Kreis vom Radius  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ , d. h. dem Umkreis des  $K_i$  umschriebenen regulären Sechsecks. Wir betrachten ein  $K_i$  enthaltendes konvexes Polygon  $Z_i$  mit der Eigenschaft, daß die Abstände der Fußpunkte  $F_1, F_2, \dots$  der vom Kreismittelpunkt  $O$  auf die Seiten von  $Z_i$  gefällten Lote  $\geq 1$  ausfallen. Da die Seitenlänge des  $K$  eingeschriebenen regulären Siebenecks  $\frac{4}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{7} \approx 1,002$  ist, also kaum die Einheit übertrifft, leuchtet ein, daß höchstens sieben Punkte mit der obigen Eigenschaft in dem von  $K_i$  und  $K$  begrenzten Kreisring Platz haben. Betrachten wir nun den Fall, wobei sieben Seiten von  $Z_i$  in  $K$  hineinschneiden, und fragen wir, wie groß der Inhalt eines Kreisabschnittes  $a_1$  sein kann.  $a_1$  wird offenkundig im Falle

$$F_1 F_2 = F_2 F_3 = \dots = F_7 F_1 = 1, \quad OF_2 = OF_3 = \dots = OF_7 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

<sup>6)</sup>  $Z_i K$  bedeutet den Inhalt des Durchschnittes von  $Z_i$  und  $K$ .

maximal. In diesem Falle ist

$$a_1 = \frac{4}{3} \arccos \frac{11\sqrt{13} + 3\sqrt{61}}{64} - \frac{(11\sqrt{13} + 3\sqrt{61})\sqrt{658 - 22\sqrt{793}}}{1024\sqrt{3}} \approx 0,003943.$$

Folglich gilt die grobe Abschätzung

$$Z_i K > K - 7a_1 = \frac{4\pi}{3} + \frac{(77\sqrt{13} + 21\sqrt{61})\sqrt{658 - 22\sqrt{793}}}{1024\sqrt{3}} - \frac{28}{3} \arccos \frac{11\sqrt{13} + 3\sqrt{61}}{64} \approx 4,1611$$

d. h.

$$\frac{K_i}{Z_i K} < \frac{\pi}{4,16} \approx 0,75519.$$

Diese Überlegungen zeigen, daß der Fall  $\nu = 8$  nicht auftreten kann und, daß im Fall  $\nu = 7$  der Quotient  $\frac{K_i}{Z_i K}$  erheblich kleiner als  $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$  ist.

1b. Fall  $\nu = 6$ . Dieser Fall kann nur für  $0 < r < r_2 = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 25^\circ 39' 32''$  eintreten. Auch in diesem Falle werden wir mit einer verhältnismäßig groben Abschätzung auskommen. Bezeichnen wir den Umkreisradius des mit  $K_i$  konzentrischen regulären Sechsecks von der Seitenlänge  $2r$  mit  $2d$ .

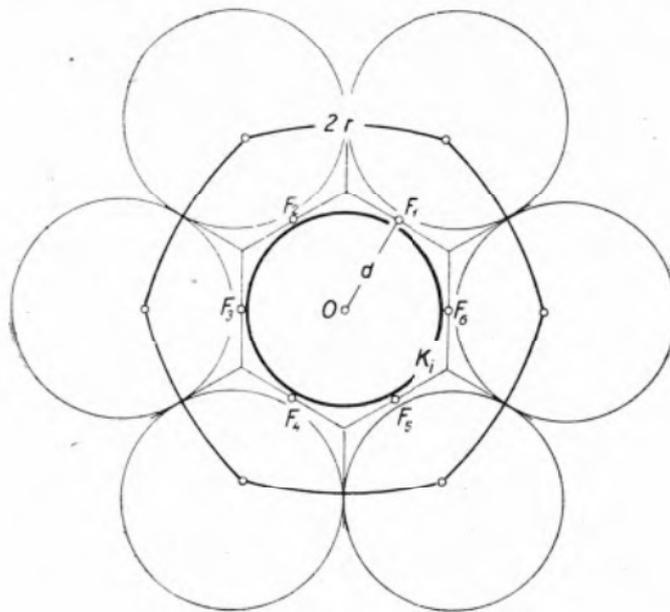


Fig. 2

Offenbar können nicht alle sechs Fusspunkte  $F_1, \dots, F_6$  von  $O$  unter  $d$  sinken (Fig. 2.). Bezeichnen wir den Inhalt von  $a_i$  in der Lage  $OF_1 = d$  mit  $a'$  und den von einer Tangente von  $K_i$  bestimmten Kreisabschnitt mit  $a$ , so haben wir

$$Z_i K \geq K - 5a - a',$$

d. h.

$$\frac{K_i}{Z_i K} < \frac{K_i}{K - 5a - a'} = \frac{\pi(1 - \cos r)}{(5 \arcsin \frac{1}{2 \cos r} + \arccos \frac{(1 - \sqrt{1 - 4 \sin^2 r}) \sqrt{3 - 4 \sin^2 r}}{4 \sin^2 r} - \pi) \sqrt{1 - \frac{4 \sin^2 r}{3}} + \arccos \frac{3 - 3 \sqrt{1 - 4 \sin^2 r}}{2 \sqrt{2} \sin r} \frac{\pi}{3}}$$

$$= d_1(r).$$

Wir haben  $d_1(0) = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ . Ferner ist  $d_1(r)$  nach Fig. 3 eine ständig abnehmende

Funktion von  $r$ , so daß im betrachteten Intervall von  $r$   $d_1(r) \leq \frac{\pi}{\sqrt{12}}$  ist.

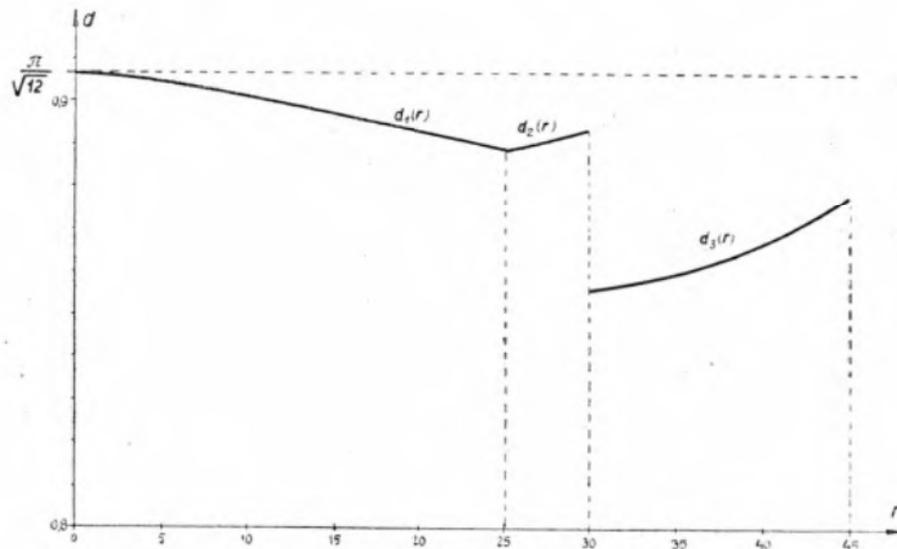


Fig. 3

1c. Fall  $\nu = 5$ . Mit den Betrachtungen des obigen Falles sind für  $r < r_2$  eigentlich alle Fälle  $\nu \leq 6$  erledigt, so daß wir uns auf den Fall  $r \geq r_2$  beschränken können. Andererseits tritt der Fall  $\nu = 5$  nur für  $r \leq r_3 = 30^\circ$  ein. Es genügt hier die Abschätzung

$$\frac{K_i}{Z_i K} < \frac{K_i}{K - 5a} = \frac{\pi(1 - \cos r)}{\frac{\pi}{6} - (\pi - 5 \arcsin \frac{1}{2 \cos r}) \sqrt{1 - \frac{4 \sin^2 r}{3}}} = d_2(r)$$

in Betracht zu ziehen. Wie es aus Fig. 3 zu entnehmen ist, ist  $d_2(r)$  im

Intervall  $(r_2, r_3)$  eine zunehmende Funktion, die aber durchweg unterhalb  $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$  bleibt.

1d. Fall  $r \leq 4$ . Für  $r_3 \leq r \leq 45^\circ$  haben wir

$$\frac{K_i}{Z_i K} < \frac{K_i}{K-4a} = \frac{\pi(1-\cos r)}{\frac{\pi}{3} - \left(\pi - 4 \arcsin \frac{1}{2 \cos r}\right) \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 r}} = d_3(r).$$

Die rechtsstehende Funktion  $d_3(r)$  liegt im betrachteten Intervall ebenfalls unterhalb  $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ .

Da der Fall  $r > 45^\circ$  nicht auftreten kann, ist der Beweis von (4) beendet.

Wir setzen nun voraus, daß  $Z_i$  z. T. von einem Kreisbogen berandet ist. Schreiten wir von einem gemeinsamen Grenzpunkt von  $K_i$  und  $Z_i$  ausgehend am Rand von  $Z_i$  in den beiden entgegengesetzten Richtungen fort, bis wir auf je einen Eckpunkt  $E_1$  bzw.  $E_2$  stoßen. Ersetzen wir  $Z_i$  durch die konvexe Hülle  $\bar{Z}_i$  von  $E_1, E_2$  und  $K_i$  und beachten wir, daß die Winkel von  $\bar{Z}_i$  bei  $E_1$  und  $E_2 \leq \frac{\pi}{2}$  sind. Bei dieser Bedingung erreicht aber  $\bar{Z}_i$  sein

Minimum nur im Falle, wo die genannten Winkel  $= \frac{\pi}{2}$  sind.

In diesem Falle ist

$$\bar{Z}_i = \pi - 2 \left( \pi - 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2 \cos r}} \right) \cos r.$$

Folglich haben wir

$$\frac{K_i}{Z_i} \leq \frac{\pi(1-\cos r)}{\frac{\pi}{2} - \left( \pi - 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2 \cos r}} \right) \cos r} = d(r).$$

Mit Rücksicht auf

$$d'(r) = \frac{\pi \sin r}{\left[ \frac{\pi}{2} - \left( \pi - 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2 \cos r}} \right) \cos r \right]^2} \left[ 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2 \cos r}} - \frac{\pi}{2} - \frac{2(1-\cos r)}{\sqrt{\cos 2r}} \right] \leq 0^7)$$

ist  $d(r)$  eine abnehmende Funktion von  $r$ . Folglich haben wir

$$d(r) \leq d(0) = \frac{2\pi}{\pi+4} < \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

<sup>7)</sup> Setzen wir  $y(r) = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2 \cos r}} - \frac{\pi}{2} - \frac{2(1-\cos r)}{\sqrt{\cos 2r}}$ , so ist

$$y' = \frac{-2(1-\cos r) \sin r}{(\cos 2r)^{3/2}} \leq 0 \text{ und } y(0) = 0, \text{ woraus } y(r) \leq 0 \text{ folgt.}$$

2. Fall  $G > 2\pi$ .

Zerlegen wir zunächst die ganze Kugel­fläche durch die obige Konstruktion in die Zellen  $Z_1, \dots, Z_n$  ( $n \geq 3$ ) und betrachten wir das zu dieser Zerlegung gehörige Netz  $N \cdot N$  läßt sich auch als die Zentralprojektion der Kanten desjenigen Polyeders erklären, das durch die zu den Kreismittelpunkten gehörigen Tangentialebenen begrenzt ist. Wir können annehmen, daß  $\bar{G}$  wenigstens einen Eckpunkt von  $N$  in seinem Inneren enthält, da sonst  $\bar{G}$  (mit Erhaltung der Konvexität von  $\bar{G}$ , so wie der Eigenschaft, daß  $\bar{G}$  mit keinem Kreis gemeinsame Punkte aufweist) so vergrößert werden kann, daß  $\bar{G}$  einen Eckpunkt von  $N$  enthalten soll. Ersetzen wir den in  $G$  liegenden Teil des Netzes  $N$  durch den Rand von  $\bar{G}$ . Die Kugel­fläche wird durch das entstehende Netz in die Zellen  $Z_1, \dots, Z_n$  und  $Z_{n+1} = \bar{G}$  zerlegt. Bezeichnen wir die Eckpunktzahl von  $Z_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) mit  $v_i$ , so gilt nach einer wohl­bekannten Folgerung des EULERSCHEN Polyedersatzes

$$\frac{v_1 + \dots + v_{n+1}}{n+1} \leq 6 - \frac{12}{n+1}$$

d. h.  $v_1 + \dots + v_{n+1} \leq 6n - 6$ , und mit Rücksicht auf  $v_{n+1} \geq 3$

$$v_1 + \dots + v_n \leq 6n - 9.$$

Aus der bekannten Tatsache, daß unter den einen Kreis enthaltenden  $v$ -Ecken das reguläre  $v$ -Eck den kleinstmöglichen Inhalt besitzt, folgt die Ungleichung

$$Z_i \geq 2 \left[ \pi - v_i \arcsin \left( \cos r \sin \frac{\pi}{v_i} \right) \right] = \varphi(v_i), \quad (i = 1, \dots, n).$$

$\varphi(v)$  ist eine abnehmende und wegen

$$\varphi''(v) = \frac{\pi^2 \sin^2 r \cos r}{v^3} \frac{\sin \frac{\pi}{v}}{\left(1 - \cos^2 r \sin^2 \frac{\pi}{v}\right)^{\frac{3}{2}}} \geq 0$$

(von unten) konvexe Funktion von  $v$ . Wir haben daher auf Grund der JENSENSCHEN Ungleichung

$$\begin{aligned} G &= \sum_{i=1}^n Z_i \geq \sum_{i=1}^n \varphi(v_i) \geq n \varphi\left(6 - \frac{9}{n}\right) = \\ (5) \quad &= 2n \left[ \pi - \frac{6n-9}{n} \arcsin \left( \cos r \sin \frac{\pi n}{6n-9} \right) \right]. \end{aligned}$$

Die Ungleichung (5) ergibt für jeden Wert von  $G$  und  $n$  eine obere Abschätzung von  $r$ , und dadurch auch der Lagerungsdichte  $d$ . Wir haben in Fig. 4 die entsprechenden Schranken von  $d$  dargestellt. Für  $n \geq 4$  sind diese Schranken

$< \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ . Für  $n = 3$  und etwa  $G = 4\pi$  ergibt aber (5) nur

$$d \leq \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{2 \sin 20^\circ}{\sqrt{3}} \right) = 0,90760 \dots$$

Da aber der Fall  $n=3$  sich leicht erledigen läßt, ist (1) für  $G > 2\pi$  durch die Ungleichung (5) im wesentlichen erledigt.

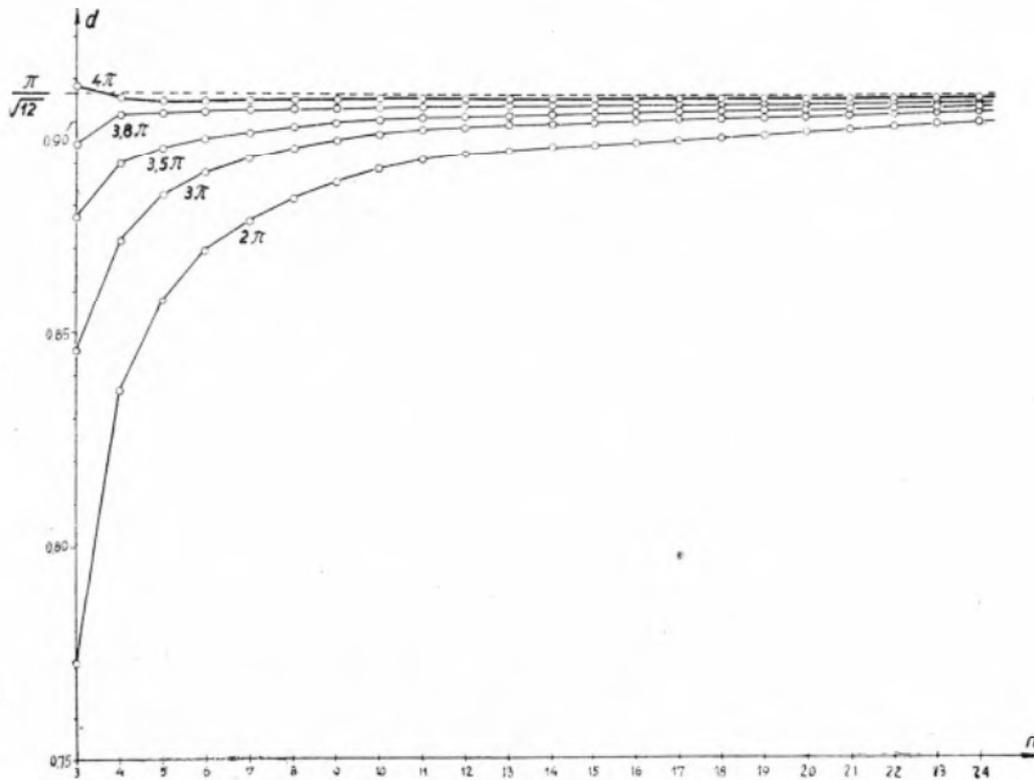


Fig. 4

Wir fahren nun ein Schritt weiter, indem wir für  $d$  eine Abschätzung angeben, die nicht von zwei, sondern nur von einem einzigen Parameter — etwa von  $n$  — abhängt und womit auch der Fall  $n=3$  mit erledigt wird.

Aus (5) ergibt sich für die Lagerungsdichte

$$d \leq \frac{\pi(1-\cos r)}{\pi - \frac{6n-9}{n} \arcsin\left(\cos r \sin \frac{\pi n}{6n-9}\right)} = u(r, n).$$

Es sei nun gezeigt, daß  $u(r, n)$  bei einem festen Wert von  $n$  eine zunehmende Funktion von  $r$  ist. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} & \frac{\left[\pi - \frac{6n-9}{n} \arcsin\left(\cos r \sin \frac{\pi n}{6n-9}\right)\right]^2}{\pi \sin r} u_r' = \\ & = \pi - \frac{6n-9}{n} \arcsin\left(\cos r \sin \frac{\pi n}{6n-9}\right) - \frac{6n-9}{n} \sin \frac{\pi n}{6n-9} \frac{(1-\cos r) \sin r}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi n}{6n-9} \cos^2 r}} = \\ & = y(r). \end{aligned}$$

Es genügt die Positivität von  $y(r)$  nachzuweisen, was eine unmittelbare Folge von

$$y' = \frac{6n-9}{n} \sin^2 \frac{\pi n}{6n-9} \cdot \frac{(1-\cos r) \sin 2r}{(1-\sin^2 \frac{\pi n}{6n-9} \cos r)^{\frac{3}{2}}} \geq 0 \quad \text{und} \quad y(0) = 0$$

ist. Damit ist die Monotonität von  $u(r, n)$  nachgewiesen.

Wir können uns daher bei der Abschätzung von  $u(r, n)$  auf den in Betracht kommenden maximalen Wert von  $r$  beschränken. Bei einem festen Wert von  $n \geq 3$  wird uns eine Abschätzung von  $r$  nach oben durch eine Abschätzungsformel von L. FEJES TÓTH<sup>4)</sup>

$$\cos r \leq \frac{1}{2 \sin \frac{n}{n-2} \cdot \frac{\pi}{6}}$$

geliefert, die besagt, daß der Radius  $r$  von  $n$  kongruenten Kreisen, die an die Vollkugel gelegt werden können, der obigen Ungleichung genügt.

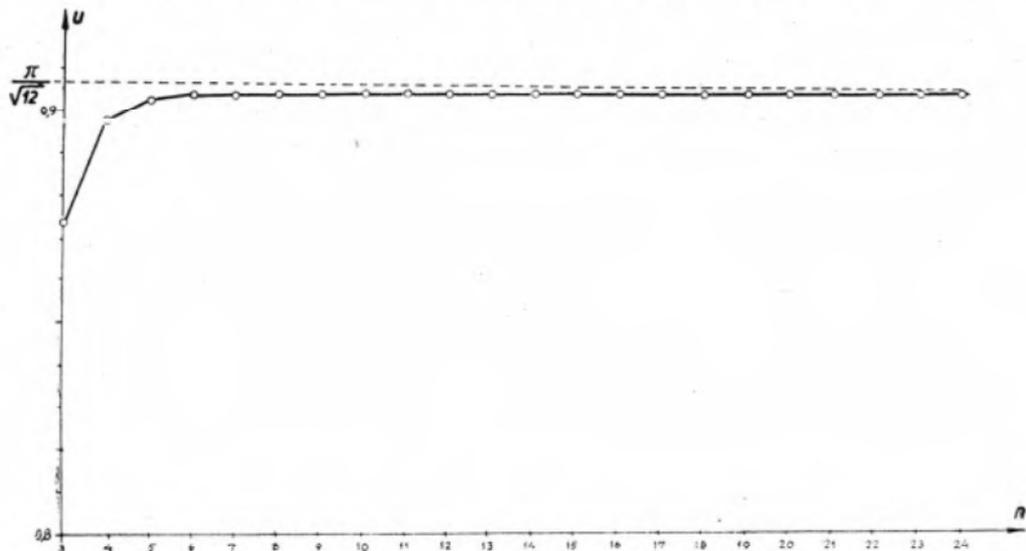


Fig. 5

Folglich haben wir

$$u(r, n) \leq \frac{\pi \left( 1 - \frac{1}{2 \sin \frac{n}{n-2} \cdot \frac{\pi}{6}} \right)}{\pi - \frac{6n-9}{n} \arcsin \frac{\sin \frac{\pi n}{6n-9}}{2 \sin \frac{\pi n}{n-2} \cdot \frac{\pi}{6}}} = u(n),$$

wobei  $u(n)$  den zu  $r = \arccos \frac{1}{2 \sin \frac{n}{n-2} \cdot \frac{\pi}{6}}$  gehörigen Wert von  $u(r, n)$

bedeutet. Es läßt sich leicht zeigen, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$$

ist. Da ferner  $u(n)$  eine monoton zunehmende Funktion von  $n$  ist (Fig. 5), haben wir

$$d \leq u(n) < \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

Damit ist der Beweis von (1) vollendet.

Die letzte Ungleichung  $d \leq u(n)$  ist in gewissen Fällen schärfer als (5). Die Ursache dieser Tatsache ist darin zu suchen, daß bei der Herleitung dieser Ungleichung nebst (5) auch die Abschätzungsformel von L. FEJES TÓTH herangezogen wurde, und damit fast alle nicht realisierbare Wertepaare  $(r, n)$  ausgeschlossen wurden.

*(Eingegangen am 9. August, 1952.)*