# Über die Nullteilerfreiheit von Ringen.

Von O. STEINFELD in Szeged.

## Einleitung.

Es ist ein wichtiges Problem, nachzuprüfen, ob ein vorgelegter Ring $R$ nullteilerfrei ist. Diese Nachprüfung fordert im allgemeinen, daß man alle Produkte $\varrho\sigma(\varrho, \sigma \neq 0, \in R)$ untersucht, ob sie $\neq 0$ sind. Das Hauptresultat unserer Arbeit wird zeigen, daß die Nachprüfung sehr erleichtert wird, wenn man in $R$ ein nullteilerfreies Ideal $\mathfrak{a}(\neq 0)$ kennt, und zwar genügt es dann, sich auf die Produkte $\varrho\sigma$ zu beschränken, in denen $\sigma(\neq 0)$ ein beliebiges festes Element von $\mathfrak{a}$ ist und $\varrho(\neq 0)$ die nicht in $\mathfrak{a}$ enthaltenen Elemente von $R$ durchläuft; dabei nennen wir ein Ideal nullteilerfrei, wenn es als Ring nullteilerfrei ist (d. h. wenn das Ideal ein nullteilerfreier Unterring ist). Dieses Resultat erhalten wir als Spezialfall eines allgemeineren Satzes, in dem wir das annullierende Linksideal $\mathfrak{b}$ eines nullteilerfreien Ideals $\mathfrak{a}$ von $R$ untersuchen. Es stellt sich unter anderen heraus daß $\mathfrak{b}$ ein (zweiseitiges) Primideal in $R$ und zugleich das annullierende Rechtsideal von $\mathfrak{a}$ ist.

Unsere Resultate lassen sich auf die Untersuchung der Nullteilerfreiheit des Schreierschen Erweiterungsringes $\mathfrak{R}$ von einem Ring $\mathrm{P}$ mit einem Ring $R$ anwenden. (Siehe C. J. EVERETT [1] und auch L. RÉDEI [2].). Zur Nullteilerfreiheit $\mathfrak{R}$ ist nämlich die von $\mathrm{P}$ eine Vorbedingung, ferner ist $\mathrm{P}$ auch ein Ideal in $\mathfrak{R}$, woraus man sieht, daß das Problem der Nullteilerfreiheit der Schreierschen Erweiterungsringe (im folgenden kurz: Erweiterungsringe) sich als Spezialfall des obigen Problems ansehen läßt. Neulich hat J. SZENDREI [3] unter anderen die Nullteilerfreiheit der Ringerweiterungen untersucht. Als Anwendung werden wir hier seinen diesbezüglichen Satz aus unseren obigen Resultaten sehr kurz beweisen. Ebenso ließe sich ein früherer Satz von SZENDREI [4] über die nullteilerfreien Ringerweiterungen mit Einselement auf diesem Wege von neuem beweisen, worauf wir aber nicht eingehen. (Hierüber siehe auch SZENDREI [3]).

In einer späteren Arbeit werden wir uns mit dem analogen Problem über die Regularität der Halbgruppen, insbesondere der Schreierschen Erweiterungen von Halbgruppen (siehe RÉDEI [2]), beschäftigen.

Zum Problem der Nullteilerfreiheit der Ringerweiterungen hat mich ein Brief von R. E. JOHNSON an T. SZELE angeregt. Nach Lösung dieses Problems durch SZENDREI [3] hat mir L. RÉDEI das Problem der obigen Verallgemeinerung aufgeworfen. Für die gefällige Hilfe in der Abfassung dieser Arbeit spreche ich meinen herzlichen Dank Herrn Professor L. RÉDEI aus.

## § 1.

**Lemma:** *Wenn in einem ein nullteilerfreies Ideal* $\mathfrak{a}(\neq 0)$ *enthaltenden Ring* $R$ *für ein Element* $\alpha(\neq 0, \in \mathfrak{a})$ *und für ein Element* $\beta(\in R)$.

$$\beta\alpha = 0 \tag{1}$$

*gilt, so gilt auch* $\beta\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\beta = 0$.[1])

**Korollar:** *Die Elemente* $\neq 0$ *eines nullteilerfreien Ideals sind lauter (zweiseitige) Nullteiler, oder lauter reguläre Elemente des Ringes.*

*Bemerkung:* Folgendes Beispiel zeigt, daß das Korollar für Unterringe statt Ideale falsch ist. Man nehme den durch die Gleichungen

$$\varepsilon^2 = \varepsilon, \varepsilon\alpha = \alpha, \alpha\varepsilon = \alpha^2 = 0$$

definierten Ring $R$ mit den Erzeugenden $\varepsilon, \alpha$. In diesem bilden die Elemente $k\varepsilon (k = 0, \pm 1, \ldots)$ einen nullteilerfreien Unterring, dessen von Null verschiedene Elemente lauter Rechtsnullteiler, aber keine Nullteiler in $R$ sind.[2])

*Beweis.* Im Falle $\beta = 0$ ist das Lemma trivial. Es sei nun $\beta \neq 0$. Wir haben zu zeigen, daß

$$\beta\xi = \xi\beta = 0 \qquad \text{(für alle } 0 \neq \xi \in \mathfrak{a})$$

gilt. Aus (1) ergibt sich

$$\xi\beta\alpha = 0.$$

Da $\alpha \neq 0$, und $\mathfrak{a}$ nullteilerfrei ist, so folgt ferner

$$\xi\beta = 0.$$

Hiernach gilt auch $\xi\beta\xi = 0$, also wegen $\xi \neq 0$ und der Nullteilerfreiheit von $\mathfrak{a}$ erhält man

$$\beta\xi = 0.$$

Damit haben wir das Lemma bewiesen, woraus offenbar auch das Korollar folgt.

Ist $R$ ein beliebiger Ring und $M$ eine Teilmenge von $R$, so bilden die Elemente $\beta(\in R)$ mit der Eigenschaft $\beta M = 0$ ein Linksideal, das man das

---

[1]) Nebenbei bemerken wir, daß allgemeiner folgendes gilt: Wenn in einem ein nullteilerfreies Ideal $\mathfrak{a}(\neq 0)$ enthaltender Ring $R$ für zwei Elemente $\alpha(\neq 0)$, $\beta$ von $\mathfrak{a}$ und für ein Element $\varrho(\in R)$

$$\varrho\alpha = \beta\alpha$$

gilt, so gilt auch für alle $\xi(\in \mathfrak{a})$

$$\varrho\xi = \beta\xi, \ \xi\varrho = \xi\beta.$$

Die geeigneten $\varrho$ bilden ein Ideal in $R$. Der Beweis ist leicht.

[2]) Diese Bemerkung verdanke ich Herrn Prof. L. RÉDEI.

annullierende Linksideal von $M$ in $R$ nennt. Entsprechend ist das annullierende Rechtsideal von $M$ definiert.

Das Lemma läßt sich auch so aussprechen, daß das annullierende Linksideal von jedem $\alpha(\neq 0, \in \mathfrak{a})$ mit dem von $\mathfrak{a}$ zusammenfällt und auch dem annullierenden Rechtsideal von $\mathfrak{a}$ gleich ist. Deshalb dürfen wir im folgenden nur kurz über das annullierende Ideal von $\mathfrak{a}$ sprechen.

**Satz 1.** *Für das annullierende Ideal $\mathfrak{b}$ eines nullteilerfreien Ideals $\mathfrak{a}$ von $R$ gilt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0$, der Faktorring $R/\mathfrak{b}$ ist nullteilerfrei (d. h. $\mathfrak{b}$ ist Primideal) und enthält als Ideal einen mit $\mathfrak{a}$ isomorphen Unterring $\bar{\mathfrak{a}}$, der aus den durch die Elemente von $\mathfrak{a}$ repräsentierten Restklassen besteht.*

*Beweis.* Wäre $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \neq 0$, so enthielten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein gemeinsames Element $\beta \neq 0$. Nach der Definition von $\mathfrak{b}$ gilt $\beta^2 = 0$, offenbar im Widerspruch mit der Nullteilerfreiheit von $\mathfrak{a}$.

Um zu beweisen, daß $R/\mathfrak{b}$ nullteilerfrei, d. h. daß $\mathfrak{b}$ ein Primideal ist, zeigen wir, daß aus $\varrho\sigma \in \mathfrak{b}$ entweder $\varrho \in \mathfrak{b}$ oder $\sigma \in \mathfrak{b}$ folgt $(\varrho, \sigma \in R)$.

Gehört $\varrho\sigma$ zu $\mathfrak{b}$, so ist

$$(\varrho\sigma)\alpha = \varrho(\sigma\alpha) = 0 \qquad (\alpha \neq 0, \in \mathfrak{a}). \tag{2}$$

Andererseits gilt $\sigma\alpha \in \mathfrak{a}$. Wenn also $\sigma\alpha \neq 0$ ist, so folgt aus der Definition von $\mathfrak{b}$, daß $\varrho \in \mathfrak{b}$ ist. Anderenfalls ist $\sigma\alpha = 0$, folglich muß $\sigma \in \mathfrak{b}$ gelten. Das beweist die Behauptung.

Zum Beweis der letzten Behauptung des Satzes bezeichnen wir mit $\bar{\varrho}$ die Restklasse $\varrho + \mathfrak{b} (\varrho \in R)$. Wir betrachten die homomorphe Abbildung

$$\alpha \to \bar{\alpha} \, (\alpha \in \mathfrak{a}) \tag{3}$$

des Unterringes $\mathfrak{a}$ in $R/\mathfrak{b}$. Diese Abbildung ist eineindeutig, da $\bar{\alpha} = \mathfrak{b}$ nur im Falle $\alpha = 0$ bestehen kann. Hiernach enthält $R/\mathfrak{b}$ den zu $\mathfrak{a}$ isomorphen Unterring $\bar{\mathfrak{a}}$ bestehend aus den Restklassen $\bar{\alpha} (\alpha \in \mathfrak{a})$. Diese bilden aber offenbar ein Ideal von $R/\mathfrak{b}$, da die Repräsentanten $\alpha$ die sämtlichen Elemente des Ideals $\mathfrak{a}$ von $R$ sind.

Damit haben wir den Beweis vollendet. Aus Satz 1 ergibt sich im Fall $\mathfrak{b} = 0$ als Korollar das folgende Hauptresultat unserer Arbeit:

**Satz 2.** *Damit ein Ring $R$ nullteilerfrei ist, ist genügend, daß $R$ ein nullteilerfreies Ideal $\mathfrak{a}$ mit einem Element $\alpha(\neq 0, \in \mathfrak{a})$ enthält, welches kein Rechtsnullteiler in $R$ ist.*

Wir wollen für diesen Satz auch einen kurzen Beweis angeben, welcher nur vom obigen Lemma Gebrauch macht.

Es genügt zu zeigen, daß wenn $R$ nicht nullteilerfrei ist, so gibt es ein Element $\beta(\neq 0, \in R)$ mit $\beta\alpha = 0 (\alpha \neq 0, \in \mathfrak{a})$. Hierzu nehmen wir an, daß eine Gleichung

$$\varrho\sigma = 0 \qquad (\varrho, \sigma \neq 0, \in R)$$

gilt. Daraus folgt

$$\varrho\sigma\alpha = \varrho(\sigma\alpha) = 0 \qquad (\alpha \neq 0, \in \mathfrak{a}).$$

Ist $\sigma\alpha = 0$, so ist $\beta = \sigma(\neq 0)$ ein gewünschtes Element. Ist dagegen $\sigma\alpha \neq 0$, so folgt aus dem Lemma wegen $\sigma\alpha \in \mathfrak{a}$, daß $\varrho\alpha = 0$ ist. Damit ist Satz 2 bewiesen.

## § 2.

Wir wollen nun unsere vorigen Resultate auf die Schreiersche Erweiterungstheorie der Ringe anwenden. Das Grundproblem dieser Theorie besteht, bei gegebenen Ringen $R$, $\mathrm{P}$, in der Bestimmung aller Ringe $\mathfrak{R}$, die ein Ideal $\bar{\mathrm{P}}$ besitzen, für welches die Isomorphien

$$(4) \qquad \mathfrak{R}/\bar{\mathrm{P}} \approx R, \quad \bar{\mathrm{P}} \approx \mathrm{P}$$

gelten. Jeden solchen Ring $\mathfrak{R}$ nennt man eine Erweiterung von $\mathrm{P}$ mit $R$. (Für gewöhnlich formuliert man das Erweiterungsproblem etwas enger durch die Bedingung $\mathfrak{R}/\mathrm{P} \approx R$ statt (4). Die für die Lösung des Problems bequemere Faßung (4) ist nur unwesentlich allgemeiner, denn (4) geht nach Einbettung in $\mathfrak{R}/\mathrm{P} \approx R$ über.) Dieses Ringerweiterungsproblem hat C. J. Everett [1] gelöst. Die Lösungen nehmen wir nach L. Rédei [2] in der folgenden einfachen Form an.

Kleine lateinische bzw. griechische Buchstaben sollen die Elemente von $R$ bzw. $\mathrm{P}$ bezeichnen. Selbst das Nullelement dieser Ringe bezeichnen wir mit 0 bzw. $\underline{0}$. Man definiere ein „schiefes Produkt" $R \circ \mathrm{P}$ der Ringe $R$ und $\mathrm{P}$, so daß man in der Menge aller Paare

$$(5) \qquad (a, \alpha) \qquad (a \in R, \alpha \in \mathrm{P})$$

die Addition und Multiplikation in der Form

$$(6) \qquad (a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, [a, b] + \alpha + \beta)$$

$$(7) \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \{a, b\} + \alpha b + a\beta + \alpha\beta)$$

annimmt, wobei

$$(8) \qquad [a, b], \{a, b\}, \alpha b, a\beta \in \mathrm{P}$$

vier Funktionen von je zwei Variabeln bezeichnen, die den „Anfangsbedingungen"

$$(9) \qquad [0, a] = [a, 0] = \{a, 0\} = \{0, a\} = a\underline{0} = 0\alpha = \underline{0}\,a = \alpha 0 = \underline{0}$$

unterworfen sind. Diejenigen $R \circ \mathrm{P}$, die einen Ring bilden, sind von Isomorphie abgesehen die sämtlichen Lösungen von (4). Die explizite Bedingungen dafür siehe in [2] oder in [3].

In einer Lösung $\mathfrak{R} = R \circ \mathrm{P}$ bilden die Elemente $(0, \alpha)$ einen Unterring $\bar{\mathrm{P}}$, und es gilt

$$(10) \qquad \mathfrak{R}/\bar{\mathrm{P}} \approx R \;\; ((a, \underline{0}) + \bar{\mathrm{P}} \to a), \;\; \bar{\mathrm{P}} \approx \mathrm{P} \;\; ((0, \alpha) \to \alpha),$$

wobei wir in den Klammern zugleich je eine passende isomorphe Abbildung angegeben haben.

Man sieht, daß $\alpha \to a\alpha$ und $\alpha \to \alpha a$ je ein Endomorphismus von $\mathsf{P}$ bedeuten. (Die übrigen zwei Funktionen $[a, b]$, $\{a, b\}$ nennt man die Faktorsysteme von $\mathfrak{R} = R \circ \mathsf{P}$). Es ist klar daß $(0, \underline{0})$ das Nullelement von $\mathfrak{R}$ ist.

Nunmehr nehmen wir an, daß $\mathsf{P}$ ein nullteilerfreier Ring ist, um dann die Bedingungen zu untersuchen, damit eine Erweiterung $\mathfrak{R} = R \circ \mathsf{P}$ ebenfalls nullteilerfrei ist. Nach obigem ist $\bar{\mathsf{P}}$ ein Ideal in $\mathfrak{R}$, der gleichzeitig mit $\mathsf{P}$ nullteilerfrei ist. Um Satz 2 anzuwenden, betrachten wir ein Element $(0, \alpha)(\alpha \neq \underline{0})$ von $\bar{\mathsf{P}}$. Wir haben zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Gleichung

$$(b, \beta)(0, \alpha) = (0, \underline{0}) \qquad (\alpha \neq \underline{0}) \tag{11}$$

nur die triviale Lösung $b = 0, \beta = \underline{0}$ zuläßt. Wegen (7) und (9) ist (11) mi

$$b\alpha + \beta\alpha = \underline{0} \qquad (\alpha \neq \underline{0})$$

gleichbedeutend. Man darf hier $-\beta$ statt $\beta$ schreiben, wodurch unsere Bedingung die Form $b\alpha = \beta\alpha(\alpha \neq \underline{0})$ annimmt. Da ferner die Bedingung im Satz 2 offenbar auch notwendig ist, so haben wir den folgenden:

**Satz 3.** *Damit ein Schreierscher Erweiterungsring $\mathfrak{R} = R \circ \mathsf{P}$ nullteilerfrei ist, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathsf{P}$ nullteilerfrei ist und die Gleichung*

$$b\alpha = \beta\alpha \qquad (\alpha \neq \underline{0}, \alpha, \beta \in \mathsf{P}, b \in R)$$

*bei einem beliebig gewählten $\alpha \neq \underline{0}$ nur die triviale Lösung $b = 0, \beta = \underline{0}$ zuläßt.*

Selbstverständlich lassen sich auch das Lemma und Satz 1 direkt auf den Erweiterungsring $\mathfrak{R} = R \circ \mathsf{P}$ anwenden. So entsteht der folgende:

**Satz 4.** *Wenn $\mathsf{P}$ nullteilerfrei ist und für ein Element $(\alpha \neq \underline{0}, \in \mathsf{P})$*

$$b\alpha = \beta\alpha \tag{12}$$

*gilt, so gelten auch $b\xi = \beta\xi$ und $\xi b = \xi\beta$ $(\xi \in \mathsf{P})$. Ferner bilden die (12) befriedigenden Paare $(b, \beta)$ ein Ideal $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{R}$. Hierfür gilt $\mathsf{P} \cap \mathfrak{b} = (0, \underline{0})$; der Faktorring $\mathfrak{R}/\mathfrak{b}$ ist nullteilerfrei und enthält als Ideal einen mit $\mathsf{P}$ isomorphen Unterring.*

## Literaturverzeichnis.


[1] C. J. Everett, An extension theory for rings. *Amer. J. Math.* **64** (1942), 363—370.

[2] L. Rédei, Die Verallgemeinerung des Schreierschen Erweiterungstheorie. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **14** (1952), 252—273.

[3] J. Szendrei, On Schreier extension of rings without zero-divisors. *Publ. Math. (Debrecen)* **2** (1952), 276—280.

[4] J. Szendrei, On the extension of rings without divisors of zero. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **13** (1950), 231—234.


*(Eingegangen am 30. September 1952.)*