Darstellung von Funktionen durch Kettenreihen.

Von G. I. TARGONSZKY in Budapest.

Nennen wir die durch das Iterieren der Funktion $f(x)$ gebildete Funktionenfolge eine *Kettenfolge*. Die Elemente dieser Folge sind also

$$f_0(x)=x,\ f_1(x)=f(x),\ f_2(x)=f[f(x)], \cdots.$$

Es sei $x=0$ ein *anziehender Fixpunkt* der Funktion $f(x)$, d. h.

$$f(0)=0,\ |f'(0)|<1.$$

Dann gibt es bekanntlich in der Umgebung des Nullpunktes ein Intervall J, so daß

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad \text{für} \quad x\in J$$

gilt. Dieses Intervall J wird als das zu dem Fixpunkt gehörige Konvergenzintervall der Kettenfolge bezeichnet.

Eine Reihe, deren Glieder eine Kettenfolge bilden, nennen wir eine *Kettenreihe*. Eine solche ist

$$x+f(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots.$$

Diese ist in dem Konvergenzintervall J konvergent und in jedem geschlossenen Teile dieses Intervalls gleichmäßig konvergent.

Im folgenden beschäftigen wir uns mit der Frage, wie man eine gegebene monotone Funktion durch eine Kettenreihe darstellen kann.

Satz 1. *Es sei $f(x)$ eine, in einem, die Null enthaltenden Intervalle J differenzierbare, streng monoton zunehmende Funktion, die noch folgenden Bedingungen genügt:*

$$f(0)=0, \tag{1}$$

$$|f(x)|>|x| \quad \text{für} \quad x\neq 0,\ x\in J. \tag{2}$$

Dann besteht für jedes $x\in J$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \tag{3}$$

mit

$$g(x)=f_{-1}[f(x)-x]. \tag{4}$$

Beweis. Wenn eine Reihenentwicklung

$$f(x)=x=g(x)+g_2(x)+\cdots$$

existiert, so ist

$$f[g(x)] = g(x) + g_2(x) + \cdots = f(x) - x,$$

woraus

$$g(x) = f_{-1}[f(x) - x]$$

folgt. Es soll nun gezeigt werden, daß die mit $g(x)$ gebildete Kettenreihe im Intervall J konvergiert. Nun ist

$$g(0) = f_{-1}[f(0) - 0] = f_{-1}(0) = 0,$$

$$g'(0) = \frac{f'(0) - 1}{f'(0)} = 1 - \frac{1}{f'(0)},$$

wobei wegen (2)

$$1 \leqq f'(0)$$

d. h.

$$0 \leqq g'(0) < 1$$

gilt. Dies bedeutet, daß $x = 0$ ein anziehender Fixpunkt ist. Es ist ferner für $x \in J$, $0 < x$

$$f(x) > f(x) - x > 0,$$

also

$$x > f^{-1}[f(x) - x] > 0,$$

woraus

$$g_n(x) > g_{n+1}(x) > 0$$

folgt. Dies zeigt die Existenz des Grenzwertes $\lim_{n \to \infty} g_n(x)$. Da aber $x = 0$ der einzige Fixpunkt in J ist, so folgt

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = 0. \tag{5}$$

Man folgert für $x < 0$ aus den Ungleichungen

$$f(x) < f(x) - x < 0$$

ähnlicherweise, daß nun

$$g_n(x) < g_{n+1}(x) < 0$$

gilt, folglich besteht (5) auch im Fall $x < 0$. Dies bedeutet aber, daß die Kettenreihe im Intervall J konvergiert.

Zum Schluß zeigen wir, daß die Summe $S(x)$ der Kettenreihe gleich $f(x)$ ist. Wegen

$$S(x) = x + g(x) + g_2(x) + \cdots$$

und

$$S[g(x)] = g(x) + g_2(x) + g_3(x) + \cdots = S(x) - x$$

erhalten wir

$$S[g(x)] = S(x) - x.$$

Andererseits folgt aus (4)

$$f[g(x)] = f(x) - x,$$

d. h.

$$S(x) - f(x) = S[g(x)] - f[g(x)].$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung ergibt sich

$$S(x)-f(x)=S[g_n(x)]-f[g_n(x)],$$

woraus wegen (5) die Identität

$$S(x)-f(x)=0$$

folgt. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Als Verallgemeinerung des Satzes 1 beweisen wir den folgenden

Satz 2. *Die Funktion $f(x)$ sei in einem, die Null enthaltenden Intervall stetig differenzierbar, und $f'(0)\neq 0$; es bezeichne ferner p eine beliebige Zahl mit*

$$|p|>\max_J\left|\frac{x}{f(x)-f(0)}\right|,\ \operatorname{sgn} p=\operatorname{sgn} f'(0); \tag{6}$$

Dann besteht in dem Intervalle J um Null, in dem $f(x)$ streng monoton ist,

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x),$$

wobei

$$G(x)=f_{-1}\left[f(x)-\frac{x}{p}\right]$$

bezeichnet.

Beweis. Es sei

$$\left|\frac{x}{f(x)-f(0)}\right|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\left|\frac{x}{f(x)-f(0)}\right|=\left|\frac{1}{f'(0)}\right|.$$

Dann ist die Funktion

$$\left|\frac{x}{f(x)-f(0)}\right|$$

wegen $f'(0)\neq 0$ im ganzen Intervall J stetig, also existiert p. Wir beweisen, daß die Funktion

$$h(x)=p[f(x)-f(0)] \tag{7}$$

den Bedingungen (1), (2) (statt $f(x)$) genügt. Die Differenzierbarkeit von $h(x)$ ergibt sich unmittelbar aus (7). Die Monotonität in einem Intervalle um Null folgt einfach aus der Tatsache, daß $f'(0)\neq 0$ und die Ableitung stetig ist. Ferner gilt $h(0)=0$ und nach (6)

$$|h(x)|>\max_J\left|\frac{x}{f(x)-f(0)}\right||f(x)-f(0)|>|x|.$$

Es gelten also die Voraussetzungen des Satzes 1. Mithin folgt aus diesem Satz und aus (7)

$$h(x)=p[f(x)-f(0)]=\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \tag{8}$$

mit

$$G(x)=h_{-1}[h(x)-x].$$

Wegen (7) folgt durch direkte Ausrechnung der inversen Funktion

$$h_{-1}[\xi] = f_{-1}\left[\frac{\xi}{p} + f(0)\right],$$

d. h.

$$h_{-1}[h(x) - x] = f_{-1}\left[\frac{h(x) - x}{p} + f(0)\right] =$$

$$= f_{-1}\left[\frac{p[f(x) - f(0)] - x}{p} + f(0)\right] = f_{-1}\left[f(x) - \frac{x}{p}\right].$$

Daraus und aus (8) folgt die Richtigkeit des Satzes 2 unmittelbar.

Als Beispiel für Satz 2 betrachten wir die Funktion $\log(x+1)$, welche die Bedingungen des Satzes im offenen Intervalle $(-1, \infty)$ erfüllt. Falls wir der bequemen Schreibweise halber $\frac{1}{p} = u$ setzen, haben wir

$$\log(x+1) = u \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)$$

mit

$$G(x) = \frac{x + 1 - e^{ux}}{e^{ux}}$$

für

$$|u| = \frac{1}{|p|} < \frac{\log(x+1)}{x}.$$

Die Reihenentwicklung ist nach passender Wahl von u für ein noch so großes positives x konvergent.

Ein anderes Beispiel ist die Entwicklung für $\arcsin x$. Dies geschieht unmittelbar durch Anwendung des Satzes 1, und wir erhalten

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$$

mit

$$g(x) = \sin[\arcsin x - x] = x \cos x - \sqrt{1 - x^2} \sin x.$$

Die Entwicklung ist für den Hauptzweig von $\arcsin x$ im offenen Intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ konvergent.

Herrn Béla Barna spreche ich meinen besten Dank aus, für seine Bemerkungen, die eine Vereinfachung des Beweises von Satz 1 ermöglicht haben.

(Eingegangen am 15. Januar 1952.)

Verallgemeinerung eines Determinantensatzes von J. Hunyady.

Von B. GYIRES in Debrecen.

An S. 384 der Nouvelles Annales de Mathématique (Ser. III., Vol. 1, 1882) hat J. HUNYADY den folgenden Satz ausgesprochen:[1])

Bezeichnet A' die transponierte Matrix einer regulären quadratischen Matrix A n-ter Ordnung ($n \geqq 2$) und ist Δ die adjungierte Determinante der Determinante $D = |A \pm A'|$, so gilt

$$\Delta = |A|^{n-2} D.$$

Als Verallgemeinerung dieses Satzes beweisen wir nun den folgenden

Satz. *Bezeichnet $C_k(A)$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ die k-te derivierte Matrix*[2]) *einer beliebigen quadratischen Matrix A n-ter Ordnung $(n \geqq 2)$ und A' die transponierte Matrix von A, so gilt*

$$|C_k(A)|\,|C_{n-k}(A) \pm C_{n-k}(A')| = |C_{n-k}(A)|\,|C_k(A) \pm C_k(A')|. \tag{1}$$

Beweis. Sei $\bar{C}_k(A)$ die Konjugierte von $C_k(A)$, d. h. die Matrix

$$\bar{C}_k(A) = C_{n-k}(\varepsilon)\, C_{n-k}(A)\, C_{n-k}(\varepsilon), \tag{2}$$

wobei ε eine orthogonale Diagonalmatrix mit der Diagonale $+1, -1, +1, -1, \ldots$ bezeichnet. Dann gilt bekanntlich

$$C_k(A)\,\bar{C}_k(A') = \bar{C}_k(A)\,C_k(A') = |A|\,(1)_{\binom{n}{k}}, \tag{3}$$

mit einer Einheitsmatrix $(1)_{\binom{n}{k}}$ $\binom{n}{k}$-ter Ordnung. Multiplizieren wir (1) mit

---

[1]) An der oben zitierten Stelle wird von HUNYADY die Regularität der Matrix A nicht verlangt, obwohl der Satz ohne diese Bedingung im allgemeinen nicht mehr gültig ist. Dies zeigt das Beispiel der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

durch eine elementare Rechnung.

[2]) Bzgl. der Definition und der verwendeten Eigenschaften der derivierten Matrix siehe z. B. I. H. M. WEDDERBURN, Lectures on matrices (New York, 1934), Kapitel V.