Verallgemeinerung eines Determinantensatzes von J. Hunyady.

Von B. GYIRES in Debrecen.

An S. 384 der Nouvelles Annales de Mathématique (Ser. III., Vol. 1, 1882) hat J. HUNYADY den folgenden Satz ausgesprochen:[1])

Bezeichnet A' die transponierte Matrix einer regulären quadratischen Matrix A n-ter Ordnung ($n \geqq 2$) und ist Δ die adjungierte Determinante der Determinante $D = |A \pm A'|$, so gilt

$$\Delta = |A|^{n-2} D.$$

Als Verallgemeinerung dieses Satzes beweisen wir nun den folgenden

Satz. *Bezeichnet $C_k(A)$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ die k-te derivierte Matrix*[2]) *einer beliebigen quadratischen Matrix A n-ter Ordnung* ($n \geqq 2$) *und A' die transponierte Matrix von A, so gilt*

$$|C_k(A)|\,|C_{n-k}(A) \pm C_{n-k}(A')| = |C_{n-k}(A)|\,|C_k(A) \pm C_k(A')|. \tag{1}$$

Beweis. Sei $\overline{C}_k(A)$ die Konjugierte von $C_k(A)$, d. h. die Matrix

$$\overline{C}_k(A) = C_{n-k}(\varepsilon)\, C_{n-k}(A)\, C_{n-k}(\varepsilon), \tag{2}$$

wobei ε eine orthogonale Diagonalmatrix mit der Diagonale $+1, -1, +1, -1, \ldots$ bezeichnet. Dann gilt bekanntlich

$$C_k(A)\,\overline{C}_k(A') = \overline{C}_k(A)\, C_k(A') = |A|\,(1)_{\binom{n}{k}}, \tag{3}$$

mit einer Einheitsmatrix $(1)_{\binom{n}{k}}$ $\binom{n}{k}$-ter Ordnung. Multiplizieren wir (1) mit

[1]) An der oben zitierten Stelle wird von HUNYADY die Regularität der Matrix A nicht verlangt, obwohl der Satz ohne diese Bedingung im allgemeinen nicht mehr gültig ist. Dies zeigt das Beispiel der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

durch eine elementare Rechnung.

[2]) Bzgl. der Definition und der verwendeten Eigenschaften der derivierten Matrix siehe z. B. I. H. M. WEDDERBURN, Lectures on matrices (New York, 1934), Kapitel V.

$|C_{n-2}(\varepsilon)|^2 = 1$, dann ergibt sich mit Rücksicht auf (2)

$$|C_k(A)|\,|\bar{C}_k(A) \pm \bar{C}_k(A')| = |\bar{C}_k(A)|\,|C_k(A) \pm C_k(A')|. \tag{4}$$

Daraus erhält man auf Grund von (2) die Gleichung

$$|C_k(A)\,\bar{C}_k(A) \pm |A|(1)_{\binom{n}{k}}| = |\bar{C}_k(A)\,C_k(A) \pm |A|(1)_{\binom{n}{k}}|.$$

Es folgt umgekehrt aus dieser evidenten Gleichung[3]) in ähnlicher Weise die Richtigkeit von (1).

Ist A regulär und $k=1$, so drückt (1) den oben angeführten Satz von HUNYADY aus.

(Eingegangen am 1. Oktober, 1952.)

---

[3]) Siehe z. B. R. ZURMÜHL, Matrizen (Berlin, 1950), S. 132, Satz 9.