Sur les espaces V_4 ayant comme groupe de stabilité un G_4.

Par G. VRANCEANU à Bucarest.

§ 1.

On sait que les espaces de Riemann V_n ont un groupe de mouvement ayant au plus $n(n+1)/2$ paramètres et ce maximum est atteint seulement pour les espaces à courbure constante. Le groupe de stabilité d'un point 0 d'un tel espace possède $n(n-1)/2$ paramètres et ce groupe a la propriété de conserver une forme quadratique définie positive.

Si le point 0 est l'origine des coordonnées $0(x^1 = \cdots = x^n = 0)$ et si $x^1, \ldots, x^n$ sont des coordonnées normales, le groupe de stabilité est le groupe des rotations de l'origine, donc il est généré par les transformations infinitésimales

$$X_{pq} = x^p \frac{\partial f}{\partial x^q} - x^q \frac{\partial f}{\partial x^p} \qquad (p < q). \tag{1}$$

Supposons maintenant qu'on considère un espace V_n dont le groupe de stabilité de l'origine est le groupe (1). On peut voir facilement que la métrique d'un tel espace doit être de la forme

$$ds^2 = \alpha[(dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2] + \beta[x^1 dx^1 + \cdots + x^n dx^n]^2 \tag{2}$$

où α, β sont fonctions de $(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2$. En effet il est évident que la métrique (2) possède le groupe (1), car les trois expressions

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2; \; (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2; \; x^1 dx^1 + \cdots + x^n dx^n \tag{3}$$

qui interviennent dans cette métrique, sont invariants du groupe (1). Inversement, comme ces expressions sont pour $n > 2$ les seuls invariants de ce groupe,[1]) la métrique de l'espace doit être de la forme (2).

Le groupe (1) est évidemment un groupe intransitif et ses variétés d'intransitivité sont les hypersphères

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = c,$$

où c est une constante. Le groupe (1) peut être le groupe complet de l'espace (2), ou bien il peut être un sousgroupe de ce groupe. Dans ce dernier cas

[1]) H. WEYL, Classical groups, Princeton, 1939, p. 31.

le groupe complet des transformations de l'espace (2) est transitif, car un groupe intransitif ne peut pas avoir plus de $n(n-1)/2$ paramètres.[2]) Le groupe étant transitif, il en résulte alors que l'espace (2) est à courbure constante.

Si un espace V_n n'est pas à courbure constante, d'après un résultat de Fubini, de 1903, il ne peut pas avoir un groupe ayant $n(n+1)/2-1$ paramètres, donc un paramètre de moins que les espaces à courbure constante.

Le résultat de FUBINI a été précisé par EGOROFF,[3]) qui a montré qu'un espace V_n, qui n'est pas d'EINSTEIN, possède un groupe ayant au plus $n(n-1)/2+1$ paramètres et ce maximum est atteint, comme nous montre l'exemple d'un espace V_n dont la métrique s'écrit

$$ds^2 = (dx^1)^2 + d\sigma^2 \tag{3'}$$

où $d\sigma^2$ est la métrique d'un espace à courbure constante non nulle, dans les variables $x^2, \ldots, x^n$. J'ai montré[4]) que les seuls espaces V_n réductibles, donc en particulier non einsteiniens, qui possèdent un groupe de mouvement à $n(n-1)/2+1$ paramètres, sont des espaces qui se réduisent à la forme (3').

Pour les espaces d'EINSTEIN, EGOROFF a montré que le groupe de mouvement peut avoir au plus $n(n-1)/2+2$, si la dimension de l'espace est plus grand que 3. J'ai montré[4]) que le nombre $n(n-1)/2+2$ peut être diminué de $n-4$ unités, donc on peut considérer comme maximum le nombre $(n-1)(n-2)/2+5$. Ce nombre est inférieur au maximum $n(n-1)/2+1$ des paramètres d'un espace V_n non einsteinien, sauf le cas $n=4$, quand il surpasse ce maximum d'une unité et le cas où $n=5$, quand ils sont égaux.

On peut donc énoncer le théorème:

Un espace $V_n (n \geqq 5)$, qui n'est pas à courbure constante, possède au plus un groupe de mouvement ayant $n(n-1)/2+1$ paramètres et ce maximum est atteint.

Le théorème est aussi vrai pour $n=3$, comme il en résulte de la classification que BIANCHI a donné aux espaces V_3.

Dans le cas $n=4$ j'ai donné comme exemple un espace symétrique de Cartan défini par les composantes du tenseur de courbure[4]), qui possède un groupe transitif à huit paramètres, donc le théorème ne s'applique pas pour $n=4$.

Nous allons maintenant montrer qu'il n'y a pas d'autres espaces V_4 qui possèdent un G_8 de mouvement. En effet, si le groupe G_8 est transitif, le groupe de stabilité d'un point possède quatre paramètres et nous allons montrer en premier lieu comment on peut former tous les espaces ayant cette propriété.

---

[2]) L. BIANCHI, Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni, Bologna, 1928, p. 514.

[3]) I. P. EGOROFF, *Doklady Akademy Nauk,* **66**, (1949), p. 793.

[4]) G. VRANCEANU, Sur les groupes de mouvement des espaces à connexion. *Studii şi Cercetări Matematice,* **2** (1951), p. 57.

§ 2.

Les espaces V_4 que nous avons en vue entrent dans une classe générale d'espaces à un nombre pair $n = 2p$ de dimensions dont le groupe de stabilité de l'origine 0, conserve la forme de Pfaff

$$\omega = x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1 + \cdots + x^{2p-1}\,dx^{2p} - x^{2p}\,dx^{2p-1}. \tag{4}$$

On voit facilement que les p transformations infinitésimales

$$X_{12},\ \ldots,\ X_{2p-1,\,2p} \tag{5}$$

conservent la forme ω. Il en est de même des $p(p-1)$ transformations infinitésimales

$$X_{2s-1,\,2r} - X_{2s,\,2r-1},\quad X_{2s-1,\,2r-1} + X_{2s,\,2r} \tag{6}$$

où s, r sont plus petits ou égaux à p.

On peut montrer cela en observant que si l'on désigne par

$$X = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i},\quad \pi = \lambda_i\,dx^i$$

une transformation infinitésimale et une forme de Pfaff, la forme π est invariante par la transformation X, si nous avons

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j}\,\xi^j + \lambda_j \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0,$$

ou comme on dit encore si la derivée de Lie du vecteur λ_i est nulle.

On peut former maintenant avec les trois invariants (3) et l'invariant (4) une métrique

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \alpha\,[(dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2] + \beta\,[x^1\,dx^1 + \cdots + x^n\,dx^n]^2 \\ & + \gamma\,[x^1\,dx^1 + \cdots]\,[x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1 + \cdots] + \delta\,[x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1 + \cdots]^2 \end{aligned} \tag{7}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont fonctions seulement de $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2$. Cette métrique possède alors le groupe de stabilité (5), (6) qui contient p^2 paramètres.

Dans le cas où $n = 2$ donc $p = 1$, l'invariant (4) n'est pas indépendant des invariants (3), car nous avons l'identité

$$(x^1\,dx^1 + x^2\,dx^2)^2 + (x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1)^2 = [(x^1)^2 + (x^2)^2].\,[(dx^1)^2 + (dx^2)^2].$$

Il en résulte que dans le cas $n = 2$ les espaces (2) et (7) coïncident et représentent des espaces de Riemann possédant le groupe à un paramètre

$$x'^1 = x^1 \cos\theta - x^2 \sin\theta,\ x'^2 = x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta$$

donc le groupe formé par les rotations autour de l'origine.

Dans le cas $n = 4$, donc $p = 2$, les (7) représentent des espaces V_4 dont le groupe de stabilité de l'origine 0 possède quatre paramètres. D'après un résultat du à S. Medici [5]) le groupe G_r des rotations pour $n = 4$ ne peut

---

[5]) S. Medici, Sui gruppi di rotazioni. *Annali della Scuola Normale Superiore,* Pisa, 1908, p. 159.

pas contenir un G_5 et le G_4 qu'il contient peut être défini par les transformations infinitésimales:

$$X_{12},\ X_{34},\ X_{13}+X_{24},\ X_{14}-X_{23},$$

donc il est le groupe de stabilité de l'espace (7), pour $n=4$.

Nous avons donc le théorème:

Si un espace V_4 possède comme groupe complet de stabilité de l'origine un G_4, on peut s'arranger de façon que ce G_4 soit défini par les transformations infinitésimales

$$X=X_{12},\ Y=X_{34},\ U=X_{13}+X_{24},\ V=X_{14}-X_{23} \tag{8}$$

abstraction faite éventuellement des termes du second ordre.

Nous avons vu que les espaces V_4 dont la métrique est donnée par la formule (7) possède le groupe G_4 défini par les transformations X, Y, U, V. On peut montrer que ce sont les seuls espaces qui possèdent un G_4.

§ 3.

En premier lieu on peut montrer qu'on peut s'arranger de façon que les termes du second ordre soient nuls.

Pour cela considérons comme nouvelles coordonnées

$$\begin{aligned} x^1 &= u\cos v\cos\theta,\ x^2=u\cos v\sin\theta,\\ x^3 &= u\sin v\cos\varphi,\ x^4=u\sin v\sin\varphi. \end{aligned} \tag{9}$$

Par rapport à ces variables, X_{12}, X_{34} sont des rotations d'angles θ et φ, donc nous avons

$$X=\frac{\partial f}{\partial\theta},\quad Y=\frac{\partial f}{\partial\varphi}, \tag{10}$$

abstraction faite des termes du second ordre.

Quant à U et V elles deviennent dans les mêmes conditions

$$\begin{aligned} U &= \cos(\theta-\varphi)\frac{\partial f}{\partial v}+\sin(\theta-\varphi)\left[\operatorname{tg} v\frac{\partial f}{\partial\theta}+\operatorname{cotg} v\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right]+\dots\\ V &= -\sin(\theta-\varphi)\frac{\partial f}{\partial v}+\cos(\theta-\varphi)\left[\operatorname{tg} v\frac{\partial f}{\partial\theta}+\operatorname{cotg} v\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right]+\dots \end{aligned} \tag{11}$$

Observons maintenant que la composition du groupe (8) est défini par les formules

$$\begin{aligned} &(XY)=0, \quad (XU)=V,\ (XV)=-U,\\ &(YU)=-V,\ (YV)=U,\ (UV)=2X-2Y. \end{aligned} \tag{12}$$

Comme X, Y déterminent un groupe abélien, X, Y étant des transformations indépendantes, on peut toujours prendre

$$X=\frac{\partial f}{\partial\theta},\quad Y=\frac{\partial f}{\partial\varphi}$$

les variables de l'espace étant u, v, θ, φ. Cela fait les autres formules (12) sauf la dernière nous disent qu'on doit avoir

$$U = \cos(\theta - \varphi) N + \sin(\theta - \varphi) M$$
$$V = -\sin(\theta - \varphi) N + \cos(\theta - \varphi) M$$

où

$$M = a \frac{\partial f}{\partial u} + b \frac{\partial f}{\partial v} + c \frac{\partial f}{\partial \theta} + d \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$
$$N = \alpha \frac{\partial f}{\partial u} + \beta \frac{\partial f}{\partial v} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \theta} + \delta \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

les coefficients $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant indépendants de θ, φ. Il en résulte que les transformations X, Y, N constituent un groupe abélien, donc on peut s'arranger de façon à avoir

$$N = \frac{\partial f}{\partial v}. \tag{13}$$

Par conséquent nous avons

$$U = a \sin(\theta - \varphi) \frac{\partial f}{\partial u} + [b \sin(\theta - \varphi) + \cos(\theta - \varphi)] \frac{\partial f}{\partial v} +$$
$$+ c \sin(\theta - \varphi) \frac{\partial f}{\partial \theta} + d \sin(\theta - \varphi) \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$
$$V = a \cos(\theta - \varphi) \frac{\partial f}{\partial u} + [b \cos(\theta - \varphi) - \sin(\theta - \varphi)] \frac{\partial f}{\partial v} +$$
$$+ c \cos(\theta - \varphi) \frac{\partial f}{\partial \theta} + d \cos(\theta - \varphi) \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Si l'on impose à U et V la dernière condition (12) on trouve les conditions:

$$a_v - ac + ad = 0, \quad b_v - bc + bd = 0$$
$$c_v - c^2 + cd = 2, \quad d_v - cd + d^2 = -2.$$

Les premières nous donnent en supposant $a \neq 0, \; b \neq 0$

$$\frac{a_v}{a} = \frac{b_v}{b} = c - d$$

donc $b = ka$, ou k est une constante. De même en posant $c - d = 2\alpha$, $cd = \beta$, les secondes s'écrivent

$$\alpha_v = 2(1 + \alpha^2), \quad \beta_v = 4\alpha(\beta - 1).$$

Nous avons en ajoutant éventuellement à v une constante,

$$\alpha = -\operatorname{cotg} 2v, \quad \beta = 1 + m(\sin 2v)^{-2}, \quad a = n(\sin 2v)^{-1}$$

où m et n sont des constantes. On peut donc prendre

$$c = \operatorname{tg} v + p, \; d = \operatorname{cotg} v + p$$

où p est défini par la formule

$$p = \frac{1}{\sin 2v}\left(-1 \pm \sqrt{1+m}\right). \tag{14}$$

Il en résulte que nous avons les valeurs de U, V données par les formules (8) si $a = b = p = 0$. Autrement on ajoute à U par exemple, l'expression

$$\frac{\sin(\theta-\varphi)}{2\sin v\cos v}\left[n\left(\frac{\partial f}{\partial u} + k\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \left(-1 \pm \sqrt{1+m}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\right].$$

Mais nous avons

$$\frac{\sin(\theta-\varphi)}{\sin v\cos v} = \frac{x^2x^3 - x^1x^4}{u^2\sin^2 v\cos^2 v} = \frac{u^2(x^2x^3 - x^1x^4)}{[(x^1)^2+(x^2)^2][(x^3)^2+(x^4)^2]}$$

où $u^2 = (x^1)^2 + \cdots + (x^4)^2$.

En tenant compte des valeurs des $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial \varphi}$ à l'aide de variables x^1, x^2, x^3, x^4, on voit facilement que cette expression n'est pas du premier ordre à l'origine, ses coefficients devenant infinis. Donc nous avons le théorème:

Les quatres transformations infinitésimales du groupe de stabilité ayant la structure (12) *peuvent toujours être considérées comme données par les formules* (8).

§ 4.

Pour qu'une métrique dans les variables θ, φ, u, v admette les transformations infinitésimales X, Y, il faut qu'elle soit de la forme

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & a_{11}\,du^2 + 2a_{12}\,du\,d\theta + 2a_{13}\,du\,dv + 2a_{14}\,du\,d\varphi + \\ & + a_{22}\,d\theta^2 + 2a_{23}\,d\theta\,dv + 2a_{24}\,d\theta\,d\varphi + a_{33}\,dv^2 + \\ & + 2a_{34}\,dv\,d\varphi + a_{44}\,d\varphi^2 \end{aligned} \tag{15}$$

où les coefficients a_{ij} ne dépendent pas des variables θ, φ.

Pour que cette métrique admette une transformation infinitésimale $\xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$, il faut que les a_{ij} satisfassent aux conditions de Killing

$$\xi^\lambda\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^\lambda} + a_{i\lambda}\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^k} + a_{k\lambda}\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^i} = 0,$$

ou, comme on dit encore, il faut que la dérivée de Lie de a_{ij} à l'aide de ξ^λ soit nulle.

Si l'on considère comme transformation infinitésimale la transformation U et l'on donne comme indices $1, 2, 3, 4$ aux variables u, θ, v, φ, nous avons, en tenant compte du fait que a_{ij} ne dépendent pas de θ et φ

$$\cos(\theta-\varphi)\frac{\partial a_{ik}}{\partial v} + a_{i\lambda}\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^k} + a_{k\lambda}\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^i} = 0. \tag{16}$$

Comme les coefficients de U ne dépendent pas de u, nous avons pour $i=k=1$.

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial v}=0. \tag{16'}$$

De même en tenant compte que $\xi^1=0$ et que ξ^3 ne dépend pas de v, nous avons pour $i=k=3$:

$$\cos(\theta-\varphi)\frac{\partial a_{33}}{\partial v}+2\left(\frac{a_{23}}{\cos^2 v}-\frac{a_{34}}{\sin^2 v}\right)\sin(\theta-\varphi)=0.$$

Cette relation, en tenant compte que a_{ij} ne dépendent pas de θ et φ, nous donne

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial v}=0,\ \frac{a_{23}}{\cos^2 v}-\frac{a_{34}}{\sin^2 v}=0. \tag{17}$$

Si l'on donne à i et k la valeur 2, on obtient

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial v}+2a_{22}\operatorname{tg} v+2a_{24}\operatorname{cotg} v=0,\ a_{23}=0, \tag{18}$$

donc nous avons aussi $a_{34}=0$, en vertu de la seconde équation (17).

Si $i=k=4$, nous avons

$$\frac{\partial a_{44}}{\partial v}-2a_{24}\operatorname{tg} v-2a_{44}\operatorname{cotg} v=0. \tag{19}$$

Enfin pour $i=1$, $k=2$ nous avons

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial v}+a_{12}\operatorname{tg} v+a_{14}\operatorname{cotg} v=0,\ a_{13}=0; \tag{20}$$

pour $i=1$, $k=3$ et $i=1$, $k=4$, nous avons

$$\frac{a_{12}}{\cos^2 v}-\frac{a_{14}}{\sin^2 v}=0,\ \frac{\partial a_{14}}{\partial v}-a_{12}\operatorname{tg} v-a_{14}\operatorname{cotg} v=0; \tag{21}$$

pour $i=2$, $k=3$ et $i=3$, $k=4$ nous avons

$$\frac{a_{22}}{\cos^2 v}-\frac{a_{24}}{\sin^2 v}-a_{33}=0,\quad \frac{a_{24}}{\cos^2 v}-\frac{a_{44}}{\sin^2 v}+a_{33}=0, \tag{22}$$

et pour $i=2$, $k=4$ nous avons

$$\frac{\partial a_{24}}{\partial v}-a_{22}\operatorname{tg} v-a_{24}\operatorname{cotg} v+a_{24}\operatorname{tg} v+a_{44}\operatorname{cotg} v=0. \tag{23}$$

On voit donc que les formules (16'), (17), (18) et (20) nous disent que nous avons

$$a_{13}=a_{23}=a_{34}=0$$

et que a_{11}, a_{33} sont indépendants de la variable v.

Si l'on pose

$$a_{12}=a\cos^2 v,\ a_{14}=a\sin^2 v$$

les formules (20) et (21) nous disent que a est une fonction indépendante de v. De même les formules (22) nous disent qu'on peut poser

$$a_{24} = b \sin^2 v \cos^2 v$$
$$a_{22} = a_{33} \cos^2 v + b \cos^4 v$$
$$a_{44} = a_{33} \sin^2 v + b \sin^4 v$$

et les formules (19) et (23) nous disent que b est indépendante de v.

On peut écrire la métrique (15) sous la forme

$$\begin{aligned} ds^2 &= a_{11}\, du^2 + a_{33}\, dv^2 + 2a\, du(\cos^2 v\, d\theta + \sin^2 v\, d\varphi) \\ &\quad + a_{33}[\cos^2 v\, d\theta^2 + \sin^2 v\, d\varphi^2] + b[\cos^2 v\, d\theta + \sin^2 v\, d\varphi]^2 \end{aligned} \tag{24}$$

où les quatre fonctions a_{11}, a_{33}, a et b dépendent seulement de la variable u.

En revenant aux variables x^1, x^2, x^3, x^4 et en tenant compte que nous avons

$$u^2 = (x^1)^2 + \cdots + (x^4)^2, \quad u\,du = x^1\,dx^1 + \cdots + x^4\,dx^4,$$
$$(dx^1)^2 + \cdots + (dx^4)^2 = du^2 + u^2\,dv^2 + u^2(\cos^2 v\, d\theta^2 + \sin^2 v\, d\varphi^2),$$
$$x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1 = u^2 \cos^2 v\, d\theta, \; x^3\,dx^4 - x^4\,dx^3 = u^2 \sin^2 v\, d\varphi,$$

la métrique (15) s'écrit

$$ds^2 = \left(a_{11} - \frac{a_{33}}{u^2}\right)(x^1\,dx^1 + \cdots)^2 + \frac{a_{33}}{u^2}[(dx^1)^2 + \cdots] +$$
$$\frac{2a}{u^2}(x^1\,dx^1 + \cdots)(x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1 + \cdots) + \frac{b}{u^4}(x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1 + \cdots)^2.$$

Cette métrique est par conséquent de la forme (7).

Nous avons donc le théorème:

Si un espace V_4 admet comme groupe de stabilité de l'origine un groupe G_4, on peut s'arranger toujours de façon que sa métrique soit de la forme (7).

§ 5.

Il reste maintenant à voir si parmi les espaces (7) il en existe des espaces ayant comme groupe complet de mouvement un G_8.

Pour cela on montre en premier lieu[6]) que le $G_4 = (X, Y, U, V)$ peut être contenu dans un G_8 transitif défini par les transformations infinitésimales X, Y, U, V et quatre transformations

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

où les termes non écrits sont au moins du premier ordre. Un tel groupe peut être réduit à avoir la structure définie par les formules (12) et les

[6]) G. Vranceanu, Sur les groupes de mouvement d'un V_4. *Studii şi Cercetări Matematice*, 4 (1953).

formules:

$$
\begin{aligned}
&(A_1 A_2) = -4\lambda X - 2\lambda Y,\ (A_1 A_3) = -\lambda U,\ (A_1 A_4) = -\lambda V \\
&(A_2 A_3) = \lambda V,\ (A_2 A_4) = -\lambda U,\ (A_3 A_4) = -2\lambda X - 4\lambda Y \\
&(A_1 X) = A_2,\ (A_1 Y) = 0,\ (A_1 U) = A_3,\ (A_1 V) = A_4 \\
&(A_2 X) = -A_1,\ (A_2 Y) = 0,\ (A_2 U) = A_4,\ (A_2 V) = -A_3 \\
&(A_3 X) = 0,\ (A_3 Y) = A_4,\ (A_3 U) = -A_1,\ (A_3 V) = A_2 \\
&(A_4 X) = 0,\ (A_4 Y) = -A_3,\ (A_4 U) = -A_2,\ (A_4 V) = -A_1
\end{aligned}
\tag{25}
$$

où λ est une constante.

Cette structure nous montre que l'espace V_4, qui possède le groupe G_8, comme groupe de mouvement, est un espace symétrique[7]), dont la courbure est donnée par les formules

$$
\begin{aligned}
&\gamma^1_{212} = 4\lambda,\quad \gamma^1_{313} = \gamma^1_{414} = \lambda,\quad \gamma^1_{234} = 2\lambda, \gamma^1_{342} = \gamma^1_{423} = -\lambda \\
&\gamma^h_{khl} = 0,\quad \gamma^h_{ehv} = \gamma^\alpha_{\beta\alpha\beta}\ \ (h \neq k \neq l \neq \alpha \neq \beta),
\end{aligned}
\tag{26}
$$

ce qui nous montre que l'espace V_4 est un espace symétrique, que j'avais obtenu précedemment.[4])

Nous avons donc le théorème:

Les seuls espaces V_4 qui possédent un G_8 transitif de mouvement sont les espaces symétriques (26).

On voit donc qu'en passant d'un V_n ($n \geqq 2$) à courbure constante à un V_n à courbure non constante, le nombre des paramètres du groupe de mouvement de l'espace diminue d'au moins $n-1$ unités sauf pour $n=4$, quand la diminution est seulement de $n-2$ unités et le cas $n=2$ quand cette diminution est de n unités, et ces nombres sont atteints, ce qui précise d'une manière complète le resultat de FUBINI de 1903, qui disait que le diminution est d'au moins 2 unités.

(Reçu le 29 octobre 1952.)

[7]) E. CARTAN, Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. Bull. de la Soc. Math. de France, **54** (1926), p. 214.