Rekursive Definitionen, wobei frühere Funktionswerte von variabler Anzahl verwendet werden.

Von RÓZSA PÉTER in Budapest.

Einleitung.

Bezüglich der allgemeinen Kenntnisse über rekursive Funktionen könnte ich mich auf mein Buch[1]) berufen, worin diese zusammengefaßt wurden. Ich werde aber in Einleitung I alles aufzählen, was ich in dieser Arbeit benützen werde. In Einleitung II schildere ich dann die Ergebnisse dieser Arbeit.

I.

1. Unter *rekursiven Funktionen* werden diejenige zahlentheoretische Funktionen verstanden, welche von gewissen Ausgangsfunktionen ausgehend durch endlich viele Substitutionen und Rekursionen definiert werden können. Dabei kann der Begriff der Rekursion auf verschiedene Weisen abgegrenzt werden; so gelangt man zu verschiedenen Funktionenklassen, die in der mathematischen Grundlagenforschung bereits öfters angewandt wurden.

Man sagt zum Beispiel, daß die Definition

$$\varphi(0, a_1, \ldots, a_r) = \alpha(a_1, \ldots, a_r)$$
$$\varphi(n+1, a_1, \ldots, a_r) = \beta(n, a_1, \ldots, a_r, \varphi(n, a_1, \ldots, a_r))$$

von φ eine primitive Rekursion ist; φ ist „in“ α und β primitiv-rekursiv; falls dabei α und β bereits von 0 und $n+1$ ausgehend durch endlich viele primitive Rekursionen und Substitutionen aufgebaut worden sind, so ist auch φ primitiv-rekursiv. Wie ILONA BERECZKI gezeigt hat[2]), führt schon diese einfache Rekursionsart von der Klasse der sogenannten „elementaren Funktionen“ — welche von 1 und von Variablen $n_1, n_2, \ldots$ ausgehend durch

[1]) R. PÉTER, *Rekursive Funktionen* (Budapest, Akademischer Verlag, 1951).

[2]) I. BERECZKI, Nem elemi rekurzív függvény létezése, *Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens Hongrois* (1950) S. 409—417.

endlich viele Additionen, Multiplikationen, arithmetische Subtraktionen (Bildung von $|a-b|$), arithmetische Divisionen (für $b \neq 0$ Bildung des ganzen Teils von $\frac{a}{b}$), Summen- und Produktbildungen entstehen — hinaus.

2. Eine Beziehung $\mathrm{B}(n_1, \ldots, n_k)$ zwischen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ heißt primitiv-rekursiv, falls es eine primitiv-rekursive Funktion $\varphi(n_1, \ldots, n_k)$ gibt, so daß $\mathrm{B}(n_1, \ldots, n_k)$ für solche und nur solche $n_1, \ldots, n_k$ gilt, für welche $\varphi(n_1, \ldots, n_k) = 0$ ist. Die gebräuchlichsten zahlentheoretischen Funktionen und Beziehungen sind primitiv-rekursiv (so z. B. sämtliche Zahlen als Konstanten, dann die Funktionen $n, m+n, m \cdot n, m^n$, $|m-n|$, und die Beziehungen $m < n, m = n$, ferner samt den Beziehungen B, B_1 und B_2 auch die Negation von B, die Konjunktion „B_1 und B_2“, die Disjunktion „wenigstens eines von B_1 und B_2“); ich habe diese in meinem Buch [1]) in einer Tabelle aufgezählt. Hier wiederhole ich die Aufzählung der weniger bekannten primitiv-rekursiven Funktionen, die ich benutzen werde:

1. $$a \dot{-} n = \begin{cases} a-n \text{ für } a \geqq n \\ 0 \text{ sonst}; \end{cases}$$

2. $$\left[\frac{a}{n}\right] = \begin{cases} \text{die in } \frac{a}{n} \text{ enthaltene größte ganze Zahl, falls } n \neq 0 \\ 0, \text{ falls } n = 0; \end{cases}$$

3. $\max(a, b) =$ das nicht-kleinere von a und b;

4. $p_n =$ die $n+1$-te Primzahl;

5. $\exp_a(n) =$ der Exponent von p_a in der Primfaktorenzerlegung von n;

6. $$\operatorname{long}(n) = \begin{cases} \text{der Index des größten Primteilers von } n, \text{ falls } n > 1 \\ 0 \text{ sonst}; \end{cases}$$

7. samt $\alpha(n, a_1, \ldots, a_r)$ auch
$$\sum_{i=m}^{n} \alpha(i, a_1, \ldots, a_r) \text{ und } \prod_{i=m}^{n} \alpha(i, a_1, \ldots, a_r),$$
wobei für $m > n$
$$\sum_{i=m}^{n} \alpha(i, a_1, \ldots, a_r) = 0 \text{ und } \prod_{i=m}^{n} \alpha(i, a_1, \ldots, a_r) = 1$$
definiert wird;

8. samt der Funktionen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ und der Beziehungen $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_{k-1}$ auch die durch die „zusammengeflickte“ Rekursion definierte Funktion
$$\varphi(0, a_1, \ldots, a_r) = \alpha_0(a_1, \ldots, a_r)$$
$$\varphi(n+1, a_1, \ldots, a_r) = \begin{cases} \alpha_1(n, a_1, \ldots, a_r, \varphi(n, a_1, \ldots, a_r)), \\ \qquad \text{falls } \mathrm{B}_1(n, a_1, \ldots, a_r, \varphi(n, a_1, \ldots, a_r)) \text{ gilt} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{k-1}(n, a_1, \ldots, a_r, \varphi(n, a_1, \ldots, a_r)), \\ \qquad \text{falls } \mathrm{B}_{k-1}(n, a_1, \ldots, a_r, \varphi(n, a_1, \ldots, a_r)) \text{ gilt} \\ \alpha_k(n, a_1, \ldots, a_r, \varphi(n, a_1, \ldots, a_r)) \text{ sonst}; \end{cases}$$

vorausgesetzt, daß von den Beziehungen $B_1, \ldots, B_{k-1}$ an jeder Stelle höchstens eine zutrifft.

3. Die in der Rekursion nicht teilnehmenden Variablen, die sogenannten „Parameter", bleiben bei einer primitiven Rekursion unverändert. Erfolgen in den Rekursionen auch Einsetzungen für gewisse Parameter, wie z. B. in der Definition

$$\varphi(0, a) = \alpha(a)$$
$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, n+a)),$$

so könnte man denken, daß dadurch eine weitere Funktionenklasse entsteht; ich habe aber bewiesen,[3]) daß sogar die *„eingeschachtelten Rekursionen"*, wobei für die Parameter von $\varphi(n, \cdot)$ abhängige Ausdrücke eingesetzt werden, wie z. B. in der Definition

$$\varphi(0, a) = \alpha(a)$$
$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, \varphi(n, a))),$$

auf primitive Rekursionen und Substitutionen aufgelöst werden können.

4. Werden nun solche Rekursionen zugelassen, wobei die Rekursion gleichzeitig nach mehreren Variablen erfolgt — diese werden *mehrfache* (*k-fache* für $k = 2, 3, \ldots$) Rekursionen genannt — so gelangt man zu den mehrfach-rekursiven (für $k = 2, 3, \ldots$ k-rekursiven) Funktionen. Diese führen bereits von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinaus.[4]) So ist z. B. die durch die zweifache Rekursion

$$\psi(0, n) = n+1$$
$$\psi(m+1, 0) = \psi(m, 1)$$
$$\psi(m+1, n+1) = \psi(m, \psi(m+1, n))$$

definierte ACKERMANN-PÉTERsche Funktion $\psi(m, n)$ nicht primitiv-rekursiv.

Allgemein heißt eine Funktion $\varphi(n_1, \ldots, n_k, a_1, \ldots, a_r)$ k-rekursiv in den „Bausteinen" $\beta_0(n_1, \ldots, n_k, a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s), \ldots, \beta_l(n_1, \ldots, n_k, a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s)$, falls $\varphi(0, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_r)$ mit einem dieser Bausteine identisch ist, und ein beliebiger Funktionswert $\varphi(n_1, \ldots, n_k, a_1, \ldots, a_r)$, wobei $n_1, \ldots, n_k$ nicht alle gleich 0 sind, aus den Bausteinen und aus „früheren" Funktionswerten aufgebaut werden kann. In einem „früheren" Funktionswert ist entweder das erste Argument $n_1 - 1$ (falls $n_1 \neq 0$ ist), oder das erste Argument n_1, dafür aber das zweite $n_2 - 1$ (falls $n_2 \neq 0$ ist), usw., oder sind endlich die ersten $k-1$ Argumente $n_1, \ldots, n_{k-1}$ und das k-te ist $n_k - 1$ (für $n_k \neq 0$). Die „An-

[3]) R. PÉTER (POLITZER), Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, *Math. Annalen,* **110** (1934), S. 612—632. — A rekurziv függvények elméletéhez, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **42** (1935), S. 25—49.

[4]) W. ACKERMANN, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, *Math. Annalen,* **99** (1928), S. 118—133. Siehe noch R. PÉTER, Konstruktion nichtrekursiver Funktionen, *Math. Annalen,* **111** (1935), S. 42—60.

fangswerte“ (wobei $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = 0$ ist) können beliebig „normiert“ werden[5]); ferner können die Parameter $a_1, \ldots, a_r$ zu einem einzigen Parameter a zusammengezogen werden[6]); d. h. man kann sich neben Substitutionen auf Rekursionen der Form

$$\varphi(n_1, \ldots, n_k, a) = \alpha(n_1, \ldots, n_k, a), \qquad \text{falls } n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = 0$$

$$\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1, a) = F(n_1, \ldots, n_k, a, \lambda x_1 \ldots x_k [\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)],$$
$$, \lambda x_1 \ldots x_{k-1} [\varphi(n_1+1, n_2, x_1, \ldots, x_{k-1})], \ldots, \lambda x_1 [\varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k, x_1)])$$

beschränken, wobei $\alpha(n_1, \ldots, n_k, a)$ beliebig (z. B. als 0) gewählt werden kann, und die Funktionsfunktion

$$F(n_1, \ldots, n_k, a, \xi_k(x_1, \ldots, x_k), \xi_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}), \ldots, \xi_1(x_1))$$

— „Substitutionsterm“ genannt — durch eine endliche Kette von Substitutionen aus $n_1, \ldots, n_k, a, \xi_k(x_1, \ldots, x_k), \xi_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}), \ldots, \xi_1(x_1)$ und aus gewissen früher definierten Bausteinen aufgebaut wird. Für die Funktionsvariablen $\xi_k(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \xi_1(x_1)$ (deren sämtliche Variablen im Substitutionsterm F durch Einsetzungen "gebunden“ werden) wurde der Reihe nach $\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)$, $\varphi(n_1+1, n_2, x_1, \ldots, x_{k-1}), \ldots, \varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k, x_1)$ eingesetzt, als Funktionen bezugsweise von $x_1, \ldots, x_k$, von $x_1, \ldots, x_{k-1}, \ldots,$ von x_1; um herauszuheben, daß hier z. B. $\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)$ als Funktion von $x_1, \ldots, x_k$ zu betrachten ist, habe ich das von CHURCH[7]) eingeführte Zeichen λ, in der Schreibweise

$$\lambda x_1, \ldots, x_k [\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)]$$

benutzt.

5. Im Aufbau von $\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1, a)$ könnten auch beliebige frühere Funktionswerte der Form

$$\varphi(\varkappa_1(n_1), x_1, \ldots, x_k), \varphi(n_1+1, \varkappa_2(n_2), x_1, \ldots, x_{k-1}), \ldots,$$
$$, \varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, \varkappa_k(n_k), x_1)$$

teilnehmen, wobei

$$\varkappa_1(n_1) \leqq n_1, \ \varkappa_2(n_2) \leqq n_2, \ldots, \varkappa_k(n_k) \leqq n_k$$

ist (allgemein wird ein geordneter Komplex $(m_1, \ldots, m_k)$ als Vorgänger eines Komplexes $(n_1, \ldots, n_k)$ betrachtet, falls es einen $i \leqq k$ gibt, so daß $m_j = n_j$ für $j < i$ und $m_i < n_i$ gilt); dann hätten wir mit einer *Wertverlaufsrekursion* zu tun. Die Wertverlaufsrekursionen lassen sich aber immer auf gewöhnliche Rekursionen von derselben Struktur und auf Substitutionen zurückführen.[8])

6. In der allgemeinen k-fachen Rekursion wurde bloß der kürzeren Schreibweise halber eine Funktionsfunktion verwendet; man hätte sämtliche in F enthaltene Substitutionen auch explizit aufschreiben können. Funktions-

---

[5]) R. PÉTER, Über die mehrfache Rekursion, *Math. Annalen*, **113** (1936), S. 489—527; insbesondere § 1.

[6]) Siehe Fußnote [3]), insbesondere Nr. **11**.

[7]) A. CHURCH, A set of postulates for the foundation of logic. *Ann. of Math.*, **34** (1933), S. 863.

[8]) Siehe Fußnote [3]), insbesondere § 1.

funktionen können aber auch durch Rekursionen definiert werden; und werden im Aufbau einer zahlentheoretischen Funktion auch solche Funktionsfunktionen benutzt, wie z. B. in der Definition

$$\varphi(0, a) = a$$
$$\varphi(n+1, a) = B(\lambda x[\varphi(n, x)]; n, a)$$

mit

$$B(\xi; 0, a) = \xi(a^2)$$
$$B(\xi; n+1, a) = C(\lambda x[B(\xi; n, x)]; n, a)$$

und

$$C(\xi; 0, a) = \xi(a)$$
$$C(\xi; n+1, a) = \xi(C(\xi; n, a)),$$

so heißt das eine *rekursive Definition der* (HILBERT*schen*[9])) *II-ten Stufe* der betrachteten Funktion (hier φ). Auf der II-ten Stufe heißt eine Rekursion primitiv, falls darin an Stellen von Funktionsvariablen keine Einschachtelungen vorkommen. Ich habe gezeigt, daß primitiv-rekursive — auch mehrfach-rekursive — Funktionen der II-ten Stufe auch als mehrfach-rekursive Funktionen der I-ten Stufe (d. h. als gewöhnliche mehrfach-rekursive Funktionen) definiert werden können.[10])

7. Unter Benutzung gewisser Gedanken von HERBRAND[11]) und GÖDEL[12]) hat KLEENE[13]) den Begriff der *allgemein-rekursiven* Funktion eingeführt, der unter anderen sämtliche aufgezählte Arten der rekursiven Funktion enthält. KLEENE hat gezeigt, daß die Definition der allgemein-rekursiven Funktionen auch in einer sehr einfachen expliziten Form geschehen kann. SKOLEM[14]) hat untersucht, unter welchen Bedingungen diese explizite Form noch weiter vereinfacht werden kann.

II.

SKOLEM hat in seinen soeben erwähnten Untersuchungen eine neue Art Rekursion eingeführt: in der von ihm angewandten Definitionsgleichung

$$\varphi(m+1, n+1, a) = \prod_{i=1}^{a \dot{-} 1} \max\ (\varphi(m+1, n, i), \varphi(m, i, r))$$

---

[9]) Siehe D. HILBERT, Über das Unendliche, *Math. Annalen,* **95** (1926), S. 161—190.

[10]) R. PÉTER, Probleme der Hilbertschen Theorie der höheren Stufen von rekursiven Funktionen, *Acta Math. Hungarica,* **2** (1951) S. 247—274.

[11]) J. HERBRAND †, Sur la non-contradiction de l'arithmetique, *Journ. f. d. reine u. angewandte Math.,* **166** (1932) S. 1—8.

[12]) K. GÖDEL, On undecidable propositions of formal mathematical systems, *Notes of lectures at the Inst. for Advanced Study,* 1934.

[13]) S. C. KLEENE, General recursive functions of natural numbers. *Math. Annalen,* **112** (1936), S. 727—742.

[14]) TH. SKOLEM, Remarks on recursive functions and relations; Some remarks on recursive arithmetic, *Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandlinger,* **17** (1944), S. 89—92; 103—106.

wird der Wert $\varphi(m+1, n+1, a)$ aus vorangehenden Funktionswerten von nicht bestimmter, sondern variabler Anzahl aufgebaut (ein solcher Fall konnte bisher bloß bei einer Wertverlaufsrekursion auftreten, wo diese Erscheinung leicht eliminiert werden konnte).

Zu einer ähnlichen Definition hat auch der Versuch von ILONA BERECZKI geführt, mittels des Diagonalverfahrens zu zeigen, daß die primitive Rekursion aus der Klasse der elementaren Funktionen hinausführt (deshalb hat sie das auf einem anderen Weg bewiesen).[15])

SKOLEM hat den ihn interessierenden Spezialfall mit einem besonderen Kunstgriff auf primitive Rekursionen und Substitutionen zurückgeführt.

Nun habe ich bemerkt, daß die neuartige Rekursion als ein Spezialfall der primitiven Rekursion der II-ten Stufe aufgefaßt werden, und daher auf Substitutionen und mehrfache Rekursionen (der I-ten Stufe) zurückgeführt werden kann.[10]) Der Umweg über die II-te Stufe kann auch leicht vermieden werden; aus dem dort gebrauchten Gedankengang läßt sich leicht auch eine unmittelbare Methode entnehmen. Wie dies geschieht, zeige ich in **§** 1 am BERECZKIschen und am SKOLEMschen Spezialfall, ferner an verwickelt eingeschachtelten Definitionen; nachher folgen allgemeine Betrachtungen und auch ein Anhang über die Behandlung der allgemeinen primitiv-rekursiven Definition der II-ten Stufe.

Die bereits erwähnte Definition

$$\begin{aligned} \psi(0, n) &= n+1 \\ \psi(m+1, 0) &= \psi(m, 1) \\ \psi(m+1, n+1) &= \psi(m, \psi(m+1, n)) \end{aligned}$$

der ACKERMANN-PÉTERschen nicht-primitiv-rekursiven Funktion, welche auch in der Form

$$\begin{aligned} \psi(0, n) &= n+1 \\ \psi(m+1, n) &= \overbrace{\psi(m, \psi(m, \ldots, \psi}^{n+1\text{-mal}}(m, 1)\ldots)) \end{aligned}$$

geschrieben werden kann, zeigt, daß die durch Einschachtelungen von variabler Anzahl aufgebaute einfache Rekursion aus der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführt.

Doch sowohl der BERECZKIsche als auch der SKOLEMsche Spezialfall läßt sich auf eine Art normierte mehrfache Rekursion mit

$$\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1, a) = F(n_1, \ldots, n_k, a, \lambda x_1 \ldots x_k [\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)],$$
$$, \lambda x_1 \ldots x_{k-1} [\varphi(n_1+1, n_2, x_1, \ldots, x_{k-1})], \ldots, \lambda x_1 [\varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k, x_1)])$$

zurückführen, wobei im Substitutionsterm

$$F(n_1, \ldots, n_k, a, \xi_k(x_1, \ldots, x_k), \xi_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}), \ldots, \xi_1(x_1))$$

[15]) Sie hat mir das 1949 brieflich mitgeteilt.

bloß Funktionsvariablen ξ_k, nicht aber $\xi_{k-1}, \ldots, \xi_1$ ineinandergeschachtelt auftreten. Diese Art mehrfache Rekursion führt aber aus der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen nicht hinaus; dies wird in § 2 bewiesen. Daß bereits eine einzige Ineinanderschachtelung zweier Funktionsvariablen ξ_{k-1} des Substitutionsterms bewirken kann, daß die damit definierte Funktion als nicht-primitiv-rekursiv ausfällt, ergibt sich mit der Verwendung der in § 1 angewandten Methode auf die ACKERMANN-PÉTERsche Funktion.

§ 1. Zurückführung der neuartig-rekursiven Definition auf gewöhnliche mehrfache Rekursion.

1. Nun werde ich die in Einleitung II erwähnte „Diagonalfunktion" der elementaren Funktionen definieren.

Da die elementaren Funktionen aus 1 und abzählbar vielen Variablen $n_1, n_2, \ldots$ durch endlich viele Operationen (die vier „arithmetischen" Spezies, ferner Summen- und Produktbildung) aufgebaut werden, können sie in eine abzählbare Reihe

$$\psi_0(n_1, \ldots, n_{i_0}),\ \psi_1(n_1, \ldots, n_{i_1}), \ldots$$

geordnet werden (worin jede elementare Funktion unendlich oft auftritt), und zwar so, daß ein jedes Glied ψ_k dieser Reihe entweder 1 oder eine der Variablen ist, oder aber aus zwei früher stehenden Funktionen $\psi_{k'}$ und $\psi_{k''}$ durch eine der folgenden Operationen zustandekommt:

$$\psi_k(n_1, \ldots, n_{i_k}) = \begin{cases} \psi_{k'}(n_1, \ldots, n_{i_k}) + \psi_{k''}(n_1, \ldots, n_{i_k}) \\ \text{oder} \\ |\psi_{k'}(n_1, \ldots, n_{i_k}) - \psi_{k''}(n_1, \ldots, n_{i_k})| \\ \text{oder} \\ \psi_{k'}(n_1, \ldots, n_{i_k}) \cdot \psi_{k''}(n_1, \ldots, n_{i_k}) \\ \text{oder} \\ \left[\dfrac{\psi_{k'}(n_1, \ldots, n_{i_k})}{\psi_{k''}(n_1, \ldots, n_{i_k})}\right] \\ \text{oder} \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{\psi_{k''}(n_1, \ldots, n_{i_k})} \psi_{k'}(j, n_1, \ldots, n_{i_k}) \\ \text{oder} \\ \displaystyle\prod_{j=0}^{\psi_{k''}(n_1, \ldots, n_{i_k})} \psi_{k'}(j, n_1, \ldots, n_{i_k}) \end{cases}$$

(es ist freilich möglich, daß hier einige der Variablen $n_1, \ldots, n_{i_k}$ bloß als fiktive Variablen zu $n_1, \ldots, n_{i_{k'}}$ bzw. zu $n_1, \ldots, n_{i_{k''}}$ hinzugenommen sind; aber von anderen Variablen, als $n_1, \ldots, n_{i_k}$ und j in den beiden letzten Fällen, können $\psi_{k'}$ und $\psi_{k''}$ nicht abhängen).

Es können nämlich statt der Funktionen $\psi_k(n_1, \ldots, n_{i_k})$ für $k = 1, 2, \ldots$ einstellige Funktionen

$$\varphi_k(n) = \psi(\exp_1(n), \ldots, \exp_{i_k}(n))$$

aufgezählt werden; diese werde ich die „Vertreter" der Funktionen ψ_k nennen, denn die Funktionen ψ_k ergeben sich aus ihnen durch die Einsetzung

$$\psi_k(n_1, \ldots, n_{i_k}) = \varphi(p_1^{n_1} \ldots p_{i_k}^{n_{i_k}}),$$

und falls ψ_k aus $\psi_{k'}$ und $\psi_{k''}$ durch eine der zugelassenen Operationen aufgebaut wird, so entsteht φ_k aus $\varphi_{k'}$ und $\varphi_{k''}$ durch dieselbe Operation; man hat dabei bloß darauf zu achten, daß bei der Vertretung von $\psi_{k'}(j, n_1, \ldots, n_{i_k})$ durch $\varphi_{k'}$ das Argument von $\varphi_{k'}$ nicht $p_1^{n_1} \ldots p_{i_k}^{n_{i_k}} = n$, sondern

$$p_1^j p_2^{n_1} \ldots p_{i_k+1}^{n_{i_k}} = \beta(j, n)$$

sein muß, wobei $\beta(j, n)$ durch

$$\beta(j, n) = p_1^j \cdot \prod_{u=0}^{\text{long } n)} p_{u+1}^{\exp_u(n)}$$

definiert werden kann. Wird auch der Index von φ als Argument betrachtet, so kann nun $\varphi_m(n) = \varphi(m, n)$ durch

$$\varphi(m, n) = \begin{cases} 1, \text{ falls } m = 0 \\ \exp\limits_{\exp_0(m)}(n), \text{ falls } \exp_2(m) = 0, m \neq 0 \\ \varphi(\exp_0(m), n) + \varphi(\exp_1(m), n), & \text{falls } \exp_2(m) = 1 \\ |\varphi(\exp_0(m), n) - \varphi(\exp_1(m), n)|, & \text{,,} \quad \exp_2(m) = 2 \\ \varphi(\exp_0(m), n) \cdot \varphi(\exp_1(m), n), & \text{,,} \quad \exp_2(m) = 3 \\ \left[\dfrac{\varphi(\exp_0(m), n)}{\varphi(\exp_1(m), n)}\right], & \text{,,} \quad \exp_2(m) = 4 \\ \sum\limits_{i=0}^{\varphi(\exp_1(m), n)} \varphi(\exp_0(m), \beta(i, n)), & \text{,,} \quad \exp_2(m) = 5 \\ \prod\limits_{i=0}^{\varphi(\exp_1(m), n)} \varphi(\exp_0(m), \beta(i, n)) \text{ sonst} \end{cases}$$

definiert werden. (Das ist mit unwesentlicher Abweichung jene Definition, auf welche ILONA BERECZKI gestoßen ist.) Denn unter den Werten von $\varphi(m, n)$ kommt auch 1 vor (die Zahl 1 ist ihr eigener Vertreter), und es wird auch jede Variable n_r vertreten, da z. B.

$$\varphi(2^r, n) = \exp_r(n)$$

ist, und die Variable n_r (für $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots$) durch $\exp_r(n)$ vertreten wird. Ferner kommen unter den Werten von $\varphi(m, n)$ samt den Vertretern $\varphi(k', n)$ und $\varphi(k'', n)$ von $\psi_{k'}$ und $\psi_{k''}$ stets auch die Vertreter der aus diesen durch die zugelassenen Operationen aufgebauten Funktionen vor: es ist z. B.

$$\varphi(k', n) + \varphi(k'', n) = \varphi(2^{k'} \cdot 3^{k''} \cdot 5,\ n),$$
$$|\varphi(k', n) - \varphi(k'', n)| = \varphi(2^{k'} \cdot 3^{k''} \cdot 5^2,\ n),$$
$$\varphi(k', n) \cdot \varphi(k'', n) = \varphi(2^{k'} \cdot 3^{k''} \cdot 5^3,\ n),$$
$$\left[\frac{\varphi(k', n)}{\varphi(k'', n)}\right] = \varphi(2^{k'} \cdot 3^{k''} \cdot 5^4,\ n),$$
$$\sum_{i=0}^{\varphi(k'', n)} \varphi(k', \beta(i, n)) = \varphi(2^{k'} \cdot 3^{k''} \cdot 5^5,\ n),$$

und

$$\prod_{i=0}^{\varphi(k'', n)} \varphi(k', \beta(i, n)) = \varphi(2^{k'} \cdot 3^{k''} \cdot 5^6,\ n).$$

So befinden sich unter den Werten von $\varphi(m, n)$ für die verschiedenen m die Vertreter sämtlicher elementaren Funktionen.

Daher kann die (modifizierte) „Diagonalfunktion“ $\varphi(n_1, p_1^{n_1}) + 1$ nicht elementar sein. Denn sonst müßte ihr Vertreter mit einem geeigneten k

$$\varphi(k, n)$$

sein, und aus diesem Vertreter müßte sich die betrachtete einstellige Funktion selbst durch Einsetzen von $p_1^{n_1}$ für n ergeben, also wäre für jedes n_1

$$\varphi(n_1, p_1^{n_1}) + 1 = \varphi(k, p_1^{n_1}).$$

Daraus würde sich aber für $n_1 = k$

$$\varphi(k, p_1^k) + 1 = \varphi(k, p_1^k),$$

also ein Widerspruch ergeben.

Die Definition von $\varphi(m, n)$ (samt der einfachen Substitution $m = n_1$, $n = p_1^{n_1}$) führt also von der Klasse der elementaren Funktionen hinaus. Nun haben wir diese Definition näher zu untersuchen.

2. Wird der einfacheren und gewohnteren Schreibweise halber n für die Rekursionsvariable m, und a für die in der Rekursion nicht teilnehmenden Variablen n gesetzt, ferner eine primitiv-rekursive Funktion α durch

$$\alpha(n, a, b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{cases} \exp\limits_{\exp_0(n+1)}(a), & \text{falls } \exp_2(n+1) = 0, \\ b_1 + b_2, & \quad \text{„} \quad \exp_2(n+1) = 1 \\ |b_1 - b_2|, & \quad \text{„} \quad \exp_2(n+1) = 2 \\ b_1 \cdot b_2, & \quad \text{„} \quad \exp_2(n+1) = 3 \\ \left[\dfrac{b_1}{b_2}\right], & \quad \text{„} \quad \exp_2(n+1) = 4 \\ b_3, & \quad \text{„} \quad \exp_2(n+1) = 5 \\ b_4 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert, so lautet die Definition der betrachteten Funktion $\varphi(n, a)$:

$$\varphi(0, a) = 1$$
$$\varphi(n+1, a) = \alpha(n, a, \varphi(\exp_0(n+1), a), \varphi(\exp_1(n+1), a),$$
$$, \sum_{i=0}^{\varphi(\exp_1(n+1), a)} \varphi(\exp_0(n+1), \beta(i, a)), \prod_{i=0}^{\varphi(\exp_1(n+1), a)} \varphi(\exp_0(n+1), \beta(i, a))).$$

Das ist eine Wertverlaufsrekursion nach n — da

$$\exp_0(n+1) < n+1, \ \exp_1(n+1) < n+1$$

ist — wobei für den Parameter a rekursive Funktionen β eingesetzt werden. Trotzdem läßt sich diese Definition mit Hilfe der alten Methode nicht auf primitive Rekursionen und Substitutionen auflösen, da hier $\varphi(n+1, a)$ durch Verwendung früherer Werte

$$\varphi(\exp_0(n+1), a), \ \varphi(\exp_1(n+1), a), \ \varphi(\exp_0(n+1), \beta(0, a)),$$
$$, \varphi(\exp_0(n+1), \beta(1, a)), \ldots, \varphi(\exp_0(n+1), \beta(\varphi(\exp_1(n+1), a), a))$$

von variabler (sogar von φ abhängiger) Anzahl definiert wird (und nicht wegen der Wertverlaufsrekursion-Beschaffenheit der Definition).

Diese früheren Werte sind aber auch „rekursiv zusammengefaßt“ in der Definition: es gelten ja für

$$\sigma(n, s, a) = \sum_{i=0}^{s} \varphi(\exp_0(n+1), \beta(i, a))$$

und

$$\pi(n, s, a) = \prod_{i=0}^{s} \varphi(\exp_0(n+1), \beta(i, a))$$

die mit der Definition von φ:

$$\varphi(0, a) = 1$$
$$\varphi(n+1, a) = \alpha(n, a, \varphi(\exp_0(n+1), a), \varphi(\exp_1(n+1), a),$$
$$, \sigma(n, \varphi(\exp_1(n+1), a), a), \pi(n, \varphi(\exp_1(n+1), a), a))$$

verflochtenen „simultanen“ Definitionen:

$$\sigma(n, 0, a) = \varphi(\exp_0(n+1), \beta(0, a))$$
$$\sigma(n, s+1, a) = \sigma(n, s, a) + \varphi(\exp_0(n+1), \beta(s+1, a))$$

und

$$\pi(n, 0, a) = \varphi(\exp_0(n+1), \beta(0, a))$$
$$\pi(n, s+1, a) = \pi(n, s, a) \cdot \varphi(\exp_0(n+1), \beta(s+1, a)).$$

Man könnte auch eine, mit anderen Definitionen nicht verflochtene, primitive Rekursion für φ erhalten, aber auf der II-ten Stufe: durch Einführung der Funktionsfunktionen

$$S(\xi; s) = \sum_{i=0}^{s} \xi(i) \quad \text{und} \quad P(\xi; s) = \prod_{i=0}^{s} \xi(i),$$

die durch

$$S(\xi; 0) = \xi(0)$$
$$S(\xi; s+1) = S(\xi; s) + \xi(s+1)$$

und

$$P(\xi; 0) = \xi(0)$$
$$P(\xi; s+1) = P(\xi; s) \cdot \xi(s+1)$$

definiert werden können, kann nämlich die Definition von $\varphi(n, a)$ auf die Form

$$\varphi(0, a) = 1$$
$$\begin{aligned}\varphi(n+1, a) = \alpha(n, a, &\varphi(\exp_0(n+1), a), \varphi(\exp_1(n+1), a),\\ &, S(\lambda x[\varphi(\exp_0(n+1), \beta(x, a))]; \varphi(\exp_1(n+1), a)),\\ &, P(\lambda x[\varphi(\exp_0(n+1), \beta(x, a))]; \varphi(\exp_1(n+1), a)))\end{aligned}$$

gebracht werden. Eine solche primitiv-rekursive Definition der II-ten Stufe läßt sich aber auf eine mehrfache Rekursion der I-ten Stufe nebst Substitutionen auflösen.[10])

3. Doch das Auflösungsverfahren der angeführten Arbeit führt zunächst zu denselben simultanen Rekursionen, die wir eben erhalten haben.

Da nämlich durch Einsetzung einer bestimmten zahlentheoretischen Funktion für die Funktionsvariable ξ sowohl aus S als aus P eine zahlentheoretische Funktion wird, und für uns diese Funktionsfunktionen nur für

$$\xi(x) = \varphi(\exp_0(n+1), \beta(x, a))$$

von Belang sind, hat man hier die zahlentheoretischen Funktionen

$$\sigma(n, s, a) = S(\lambda x[\varphi(\exp_0(n+1), \beta(x, a))]; s)$$

und

$$\pi(n, s, a) = P(\lambda x[\varphi(\exp_0(n+1), \beta(x, a))]; s)$$

zu definieren: nach den Definitionen von S und P gilt

$$\sigma(n, 0, a) = \varphi(\exp_0(n+1), \beta(0, a))$$
$$\sigma(n, s+1, a) = \sigma(n, s, a) + \varphi(\exp_0(n+1), \beta(s+1, a))$$

und

$$\pi(n, 0, a) = \varphi(\exp_0(n+1), \beta(0, a))$$
$$\pi(n, s+1, a) = \pi(n, s, a) \cdot \varphi(\exp_0(n+1), \beta(s+1, a));$$

und mit Hilfe von σ und π kann $\varphi(n, a)$ durch

$$\varphi(0, a) = 1$$
$$\begin{aligned}\varphi(n+1, a) = \alpha(n, a, &\varphi(\exp_0(n+1), a), \varphi(\exp_1(n+1), a),\\ &, \sigma(n, \varphi(\exp_1(n+1), a), a), \pi(n, \varphi(\exp_1(n+1), a), a))\end{aligned}$$

definiert werden. Diese sind aber tatsächlich die vorhin erhaltenen simultanen Rekursionen.

Sie können leicht zur rekursiven Definition einer einzigen Funktion $\delta(n, s, a)$ zusammengefaßt werden, falls

$$\delta(n, 3s, a) = \varphi(n, a),$$
$$\delta(n, 3s+1, a) = \sigma(n, s, a),$$
$$\delta(n, 3s+2, a) = \pi(n, s, a)$$

gesetzt wird. Denn nach den Definitionen von φ, σ und π lautet die Definition von δ:

$$\delta(0, 3s, a) = 1$$
$$\delta(n+1, 3s, a) = \alpha(n, a, \delta(\exp_0(n+1), 3s, a), \delta(\exp_1(n+1), 3s, a),$$
$$, \delta(n, 3\delta(\exp_1(n+1), 3s, a)+1, a), \delta(n, 3\delta(\exp_1(n+1), 3s, a)+2, a))$$
$$\delta(n, 1, a) = \delta(\exp_0(n+1), 0, \beta(0, a))$$
$$\delta(n, 3s+4, a) = \delta(n, 3s+1, a) + \delta(\exp_0(n+1), 3s, \beta(s+1, a))$$
$$\delta(n, 2, a) = \delta(\exp_0(n+1), 0, \beta(0, a))$$
$$\delta(n, 3s+5, a) = \delta(n, 3s+2, a) \cdot \delta(\exp_0(n+1), 3s, \beta(s+1, a)).$$

Das ist (wegen $\exp_0(n+1) \leqq n$) eine zweifache Wertverlaufsrekursion nach n und s. Sie kann leicht auch auf die gewohnte, normierte Form gebracht werden, ohne eine wesentliche Abänderung der Struktur: auch dann gelangt man (nebst Substitutionen) zu einer solchen zweifachen Rekursion, wobei im Aufbau eines Funktionswertes ineinandergeschachtelt bloß solche Funktionswerte teilnehmen, in welchen das *erste* Argument kleiner ist als in jenem. In § 2 werde ich aber zeigen, daß derartige mehrfache Rekursionen auf primitive Rekursionen und Substitutionen aufgelöst werden können. Da nun $\varphi(n, a)$ z. B. durch die Substitution

$$\varphi(n, a) = \delta(n, 0, a)$$

erhalten werden kann, ist $\varphi(n, a)$ samt δ primitiv-rekursiv; und *so haben wir einen zweiten Beweis dafür, daß die primitive Rekursion von der Klasse der elementaren Funktionen hinausführt.**)

4. Die Behandlung des SKOLEMschen Spezialfalls ist noch einfacher. In der Definition

$$\varphi(0, n, a) = \beta(n, a)$$
$$\varphi(m+1, 0, a) = \varphi(m, 1, a)$$
$$\varphi(m+1, n+1, a) = \prod_{i=1}^{a \dot{-} 1} \max\,(\varphi(m+1, n, i), \varphi(m, i, a))$$

wird der Funktionswert $\varphi(m+1, n+1, a)$ aus früheren Funktionswerten

$$\varphi(m+1, n, 1), \varphi(m, 1, a), \varphi(m+1, n, 2), \varphi(m, 2, a), \ldots,$$
$$, \varphi(m+1, n, a \dot{-} 1), \varphi(m, a \dot{-} 1, a)$$

*) Zusatz bei der Korrektur. Dieser Beweis kann noch wesentlich vereinfacht werden: in diesem Spezialfall läßt sich der Umweg über die mehrfache Rekursion ausschalten. Darauf komme ich an anderer Stelle zurück.

von variabler Anzahl aufgebaut; diese sind aber auch hier „rekursiv zusammengefaßt“. Es wäre aber hier nicht ratsam

$$\pi(m, n, s, a) = \prod_{i=1}^{s} \max(\varphi(m+1, n, i), \varphi(m, i, a))$$

zu setzen, denn daraus würde sich aus der Definition des Produktes

$$\pi(m, n, s+1, a) = \pi(m, n, s, a) \cdot \max(\varphi(m+1, n, s+1), \varphi(m, s+1, a))$$

ergeben; und da später sowohl $\pi(m, n, s, a)$ als auch $\varphi(m, n, a)$ als $\delta(m, n, i, a)$ mit geeignetem i definiert wird, wäre bei einer solchen Definition ein Wert $\delta(m, n, \ldots)$ mit Verwendung eines späteren Wertes $\delta(m+1, n, \ldots)$ definiert. Sei deshalb $\pi(0, n, s, a)$ beliebig, z. B. als 1 definiert, und sei

$$\pi(m+1, n, s, a) = \prod_{i=1}^{s} \max(\varphi(m+1, n, i), \varphi(m, i, a));$$

so ist

$$\pi(0, n, s, a) = 1, \quad \pi(m+1, n, 0, a) = 1,$$

$$\pi(m+1, n, s+1, a) = \pi(m+1, n, s, a) \cdot \max(\varphi(m+1, n, s+1), \varphi(m, s+1, a)),$$

und die Definition von $\varphi(n, a)$ lautet:

$$\varphi(0, n, a) = \beta(n, a)$$
$$\varphi(m+1, 0, a) = \varphi(m, 1, a)$$
$$\varphi(m+1, n+1, a) = \pi(m+1, n, a \dot{-} 1, a).$$

(Zu den selben simultanen Rekursionen für φ und π wäre man auch durch den Umweg über der II-ten Stufe gelangt, wenn man die Funktionsfunktion

$$P(\xi_1, \xi_2; s) = \prod_{i=1}^{s} \max(\xi_1(i), \xi_2(i))$$

eingeführt, und dann

$$\pi(m+1, n, s, a) = P(\lambda x[\varphi(m+1, n, x)], \lambda x[\varphi(m, x, a)]; s)$$

gesetzt hätte.) Sei jetzt

$$\delta(m, n, 2s, a) = \varphi(m, n, a),$$
$$\delta(m, n, 2s+1, a) = \pi(m, n, s, a);$$

so lassen sich die eben aufgestellten simultanen Definitionen zur dreifachen Rekursion

$$\delta(0, n, 2s, a) = \beta(n, a)$$
$$\delta(m+1, 0, 2s, a) = \delta(m, 1, 2s, a)$$
$$\delta(m+1, n+1, 2s, a) = \delta(m+1, n, 2(a \dot{-} 1)+1, a)$$
$$\delta(0, n, 2s+1, a) = 1$$
$$\delta(m+1, n, 1, a) = 1$$
$$\delta(m+1, n, 2s+3, a) =$$
$$= \delta(m+1, n, 2s+1, a) \cdot \max(\delta(m+1, n, 2s, s+1), \delta(m, s+1, 2s, a))$$

zusammenziehen. In dieser dreifachen Rekursion kommen eingeschachtelte

Funktionswerte überhaupt nicht vor; ich habe aber bereits früher bewiesen,[16]) daß eine mehrfache Rekursion ohne Einschachtelungen auf primitive Rekursionen und Substitutionen aufgelöst werden kann. Da sich nun φ z. B. durch die Substitution

$$\varphi(m, n, a) = \delta(m, n, 0, a)$$

definieren läßt, so ist samt δ auch φ primitiv-rekursiv.

5. Nun betrachten wir Definitionen, wobei Einschachtelungen von variabler Anzahl auftreten. Sei z. B. mit primitiv-rekursiven $\alpha, \omega, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$

$$\varphi(0, a) = \alpha(a)$$
$$\varphi(n+1, a) = (\ldots \gamma_2(n, a, \varphi(n, \gamma_1(n, a, \varphi(n, \gamma_0(n, a, \omega(n, a)))))) \ldots).$$

Dabei kann der Index des äußersten γ von n, a und sogar von $\varphi(n, \cdot)$ abhängen, z. B. gleich $\eta(n, a, \varphi(n, a))$ sein, mit primitiv-rekursivem η. Diese Abhängigkeit kann aber auch komplizierter sein; es könnten in η auch eingeschachtelte $\varphi(n, \cdot)$-Ausdrücke vorkommen, sogar mit einer variablen Anzahl von Einschachtelungen. So könnte statt $\eta(n, a, \varphi(n, a))$ mit primitiv-rekursiven $\omega_1, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots$

$$(\ldots \gamma_{12}(n, a, \varphi(n, \gamma_{11}(n, a, \varphi(n, \gamma_{10}(n, a, \omega_1(n, a)))))) \ldots)$$

stehen. Dabei kann der Index des äußersten γ wieder ein ähnlicher Ausdruck

$$(\ldots \gamma_{02}(n, a, \varphi(n, \gamma_{01}(n, a, \varphi(n, \gamma_{00}(n, a, \omega_0(n, a)))))) \ldots)$$

sein, usw.; und die in diesem „usw." enthaltene Anzahl kann wiederum von $\varphi(n, \cdot)$ abhängen. Statt $\omega, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ kann $\omega_\beta, \gamma_{\beta 0}, \gamma_{\beta 1}, \gamma_{\beta 2}, \ldots$ gesetzt werden, falls jene, im vorherigen „usw." enthaltene Anzahl $\beta + 1$ ist. Die Indizes können hier auch als neue Argumente betrachtet werden. Betrachten wir z. B. die folgende Definition:

$$\varphi(0, a) = \alpha(a)$$
$$\varphi(n+1, a) = (\ldots \gamma(n, \beta, 2, a, \varphi(n, \gamma(n, \beta, 1, a, \varphi(n, \gamma(n, \beta, 0, a, \omega(n, \beta, a)))))) \ldots),$$

wo $\beta = \beta(n, a, \varphi(n, a))$ und das dritte Argument des äußersten γ

$$(\ldots \gamma(n, \beta-1, 2, a, \varphi(n, \gamma(n, \beta-1, 1, a, \varphi(n, \gamma(n, \beta-1, 0, a, \omega(n, \beta-1, a)))))) \ldots)$$

ist; hier das dritte Argument des äußersten γ

$$(\ldots \gamma(n, \beta-2, 2, a, \varphi(n, \gamma(n, \beta-2, 1, a, \varphi(n, \gamma(n, \beta-2, 0, a, \omega(n, \beta-2, a)))))) \ldots),$$

usw., solange, bis das zweite Argument der γ zu 0 wird; das dritte Argument des äußersten γ mit dem zweiten Argument 0 sei etwa eine Zahl k. Dabei seien α, β, γ und ω etwa primitiv-rekursive Funktionen.

Sei hier allgemein

$$\tau(n, s, t, a) = \gamma(n, s, t, a, \varphi(n, \gamma(n, s, t-1, a, \ldots, \varphi(n, \gamma(n, s, 0, a, \omega(n, s, a)))\ldots))),$$

---

[16]) Siehe Fußnote [5]), insbesondere § 3.

so ist

$$\tau(n, s, 0, a) = \gamma(n, s, 0, a, \omega(n, s, a))$$
$$\tau(n, s, t+1, a) = \gamma(n, s, t+1, a, \varphi(n, \tau(n, s, t, a)));$$

und werden die in der Definition von φ wichtige Rolle spielenden dritten Argumente der „äußersten γ" mit dem zweiten Argument s durch $\sigma(n, s, a)$ bezeichnet, so stimmt diese Funktion σ für $s \leqq \beta(n, a, \varphi(n, a))$ mit der allgemein durch

$$\sigma(n, 0, a) = k$$
$$\sigma(n, s+1, a) = \tau(n, s, \sigma(n, s, a), a)$$

definierten Funktion überein. Da für $s = \beta(n, a, \varphi(n, a))$

$$\varphi(n+1, a) = \tau(n, s, \sigma(n, s, a), a)$$

ist, und da das eben gleich $\sigma(n, s+1, a)$ ist, so läßt sich φ einfach durch

$$\varphi(0, a) = \alpha(a)$$
$$\varphi(n+1, a) = \sigma(n, \beta(n, a, \varphi(n, a)) + 1, a)$$

definieren. So haben wir wieder simultane Definitionen für φ, τ und σ. (Zu denselben hätte auch die Einführung der Funktionsfunktionen

$$T(\xi; n, s, t, a) = \gamma(n, s, t, a, \xi(\gamma(n, s, t-1, a, \ldots, \xi(\gamma(n, s, 0, a, \omega(n, s, a)))\ldots)))$$

und $S(\xi; n, s, a)$ mit

$$S(\xi; n, 0, a) = k$$
$$S(\xi; n, s+1, a) = T(\xi; n, s, S(\xi; n, s, a), a),$$

dann der zahlentheoretischen Funktionen

$$\sigma(n, s, a) = S(\lambda x[\varphi(n, x)]; n, s, a)$$

und

$$\tau(n, s, t, a) = T(\lambda x[\varphi(n, x)]; n, s, t, a)$$

geführt, wodurch man zunächst eine nicht-simultane rekursive Definition der II-ten Stufe für φ erhalten hätte.) Wird nun

$$\delta(n, s, 3t, a) = \varphi(n, a),$$
$$\delta(n, s, 3t+1, a) = \sigma(n, s, a),$$
$$\delta(n, s, 3t+2, a) = \tau(n, s, t, a)$$

gesetzt, so erhält man aus den Definitionen von φ, σ und τ eine dreifache Rekursion für δ:

$$\delta(0, s, 3t, a) = \alpha(a)$$
$$\delta(n+1, s, 3t, a) = \delta(n, \beta(n, a, \delta(n, s, 3t, a)) + 1, 3t+1, a)$$
$$\delta(n, 0, 3t+1, a) = k$$
$$\delta(n, s+1, 3t+1, a) = \delta(n, s, 3 \cdot \delta(n, s, 3t+1, a) + 2, a)$$
$$\delta(n, s, 2, a) = \gamma(n, s, 0, a, \omega(n, s, a))$$
$$\delta(n, s, 3t+5, a) = \gamma(n, s, t+1, a, \delta(n, s, 3t, \delta(n, s, 3t+2, a)));$$

und da sich $\varphi(n,a)$ z. B. durch die Substitution

$$\varphi(n,a) = \delta(n,0,0,a)$$

aus δ definieren läßt, ist φ samt δ dreifach-rekursiv. Hier haben wir aber schon mit einer verwickelteren eingeschachtelten dreifachen Rekursion zu tun. Von einer solchen ist nicht zu erwarten, daß sie auf primitive Rekursionen und Substitutionen aufgelöst werden könnte; die eingeschachtelte mehrfache Rekursion führt ja bekanntlich[4]) von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinaus.

6. In den bisher betrachteten Beispielen war es noch nicht nötig, die Variablen der simultan definierten einzelnen Funktionen von einander zu trennen, doch im Allgemeinen ist das ratsam. Mit einer kleinen Modifikation der zuletzt betrachteten simultanen Definition wären wir z. B. zu einer Definition

$$\varphi(0,a) = \alpha(a)$$
$$\varphi(n+1,a) = \sigma(n, \beta_1(n,a,\varphi(n,a)), \beta_2(n,a,\varphi(n,a)), a)$$

mit

$$\sigma(n,0,t,a) = k$$
$$\sigma(n,s+1,t,a) = \tau(n,s,\sigma(n,s,t+1,a),a)$$

und

$$\tau(n,s,0,a) = \gamma(n,s,0,a,\omega(n,s,a))$$
$$\tau(n,s,t+1,a) = \gamma(n,s,t+1,a,\varphi(n,\tau(n,s+1,t,a)))$$

gekommen. Die Rekursionsvariable von σ ist s, und die Rekursionsvariable von τ ist t; beide spielen die Rolle eines Parameters in der Definition der anderen Funktion, und beide werden dabei vergrößert. Dies hat zu Folge, daß in einer unvorsichtigen Definition von δ, welche diese simultanen Rekursionen zusammenfaßt, weder s als vor t kommende, noch t als vor s kommende Rekursionsvariable von δ betrachtet werden kann; falls aber t in σ und s in τ als Parameter behandelt werden, ist es nicht ratsam das „Index-Argument", welches angibt, mit welchem von φ, τ oder σ unsere Funktion δ eben identifiziert wird, mit s oder mit t zu verschmelzen. Sei also (die Variablen n, s, t an den Stellen, wo sie als Rekursionsvariable von bzw. φ, τ und σ auftreten, durch n_1, n_2 und n_3, an den Stellen jedoch, wo s und t als Parameter auftreten, bzw. durch b_1 und b_2 bezeichnet)

$$\delta(n_1,i,n_2,n_3,b_1,b_2,a) = \begin{cases} \varphi(n_1,a), & \text{falls } i=0 \\ \tau(n_1,b_1,n_2,a), & \text{„} \quad i=1 \\ \sigma(n_1,n_3,b_2,a), & \text{„} \quad i=2 \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann lautet die Definition von δ:

$$\delta(0,0,n_2,n_3,b_1,b_2,a)=\alpha(a)$$
$$\delta(n_1+1,0,n_2,n_3,b_1,b_2,a)=\delta(n_1,2,n_2,\beta_1(n_1,a,\delta(n_1,0,n_2,n_3,b_1,b_2,a)),b_1,$$
$$,\beta_2(n_1,a,\delta(n_1,0,n_2,n_3,b_1,b_2,a)),a)$$
$$\delta(n_1,1,0,n_3,b_1,b_2,a)=\gamma(n_1,b_1,0,a,\omega(n_1,b_1,a))$$
$$\delta(n_1,1,n_2+1,n_3,b_1,b_2,a)=\gamma(n_1,b_1,n_2+1,a,$$
$$,\delta(n_1,0,n_2,n_3,b_1,b_2,\delta(n_1,1,n_2,n_3,b_1+1,b_2,a)))$$
$$\delta(n_1,2,n_2,0,b_1,b_2,a)=k$$
$$\delta(n_1,2,n_2,n_3+1,b_1,b_2,a)=\delta(n_1,1,\delta(n_1,2,n_2,n_3,b_1,b_2+1,a),n_3,n_3,b_2,a)$$
$$\delta(n_1,i+3,n_2,n_3,b_1,b_2,a)=0.$$

Das ist eine 4-fache Rekursion nach n_1, i, n_2 und n_3.

7. *Aus den obigen Beispielen sieht man folgendes. Betrachten wir eine beliebige solche rekursive Definition einer Funktion* $\varphi(n_1,n_2,\ldots,n_k,a)$, *wobei (außer den etwa zu 0 norminrten Anfangswerten) jeder Funktionewert* $\varphi(n_1+1,\, n_2+1,\ldots,\, n_k+1,\, a)$ *aus früheren Funktionswerten von variabler Anzahl aufgebaut werden.* In dieser Definition, eben weil die Anzahl der verwandten Funktionswerte variabel ist, kommt der Hinweis „usw." vor, aber selbstverständlich nur endlich vielmal. Ein jeder solcher „usw." weist darauf hin, daß ein gewißer Prozeß zu wiederholen ist; in der Fortsetzung der Definition wird natürlich (eventuell mit Hilfe weiterer „usw.") angegeben, wie vielmal. Wird jener Prozeß statt dessen s-mal wiederholt, so erhält man eine Funktion σ, die außer $n_1,n_2,\ldots,n_k$ und a von der Variablen s, und von den zu s analogen, den früheren „usw." entsprechenden Variablen abhängt, und durch eine Rekursion nach s mit Hilfe der Funktionen

$$\lambda x_1\ldots x_k[\varphi(n_1,x_1,\ldots,x_k)],\, \lambda x_1\ldots x_{k-1}[\varphi(n_1+1,n_2,x_1,\ldots,x_{k-1})],$$
$$,\ldots,\lambda x_1[\varphi(n_1+1,\ldots,n_{k-1}+1,n_k,x_1)],$$

sowie der zu σ analogen, den früheren „usw." entsprechenden Funktionen (und natürlich auch gewißer bereits gegebenen mehrfach-rekursiven Funktionen) aufgebaut wird. Da wir diese Funktionen σ, und zugleich auch φ, in eine Funktion δ zusammenziehen werden, bezeichnen wir die Funktionen σ in der Reihenfolge ihres Auftretens durch $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_l$, und φ durch δ_0, da sie im Aufbau sämtlicher σ verwendet werden kann. Bei der Definition der einzelnen δ_i achte man dabei darauf, daß die Abhängigkeit der Funktion δ_i von einer beliebigen solchen der Rekursionsvariablen von φ, etwa n_j, an dessen Stelle im rekursiven Aufbau von δ_i entweder in φ selbst, oder in einer früheren $\delta_{i'}$ wenigstens einmal n_j+1 steht, derart ausgedrückt wird, daß auch in der Definition von δ_i an der betreffenden Argumentstelle n_j+1 steht (und für den Wert 0 des betreffenden Arguments die Funktion δ_i beliebig, etwa als 0 definiert wird). Dann wird

$$\varphi(n_1+1,n_2+1,\ldots,n_k+1,a)=\delta_0(n_1+1,n_2+1,\ldots,n_k+1,a)$$

zwar mit Hilfe der ϑ_i von größeren Indizes definiert, aber mit Hilfe ihrer Werte an Stellen, die der Stelle $(n_1+1, n_2+1, \ldots, n_k+1, a)$ vorangehen.

Die betrachtete Definition ist also eigentlich eine simultane rekursive Definition der Funktionen $\vartheta_0 = \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_l$. Sie unterscheidet sich also von dem rekursiven Aufbau einer k-fach rekursiven Funktion aus den Ausgangsfunktionen nur darin, daß auch die zunächst noch unbekannten Funktionen

$$\lambda x_1 \ldots x_k[\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)], \ldots, \lambda x_1[\varphi(n_1+1, n_2+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k, x_1)]$$

gleich den Ausgangsfunktionen behandelt werden.

Wird nun die Rekursionsvariable von ϑ_i für $i = 1, 2, \ldots, l$ mit n_{k+i} bezeichnet, und treten in den Definitionen außer a noch insgesamt die Parameter $b_1, \ldots, b_r$ auf, so lassen sich die simultanen Definitionen für $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_l$ zur rekursiven Definition einer einzigen Funktion

$$\vartheta(n_1, \ldots, n_k, i, n_{k+1}, \ldots, n_{k+l}, b_1, \ldots, b_r, a)$$

zusammenfassen, welche für $i=0$ mit φ, für ein anderes $i \leqq l$ mit ϑ_i und für $i > l$ z. B. mit 0 identisch ist; und dabei wird ein beliebiger Funktionswert

$$\vartheta(n_1, \ldots, n_k, i, n_{k+1}, \ldots, n_{k+l}, \ldots)$$

mit Hilfe von Funktionswerten aufgebaut, welche an „Vorgänger" der Stelle $(n_1, \ldots, n_k, i, n_{k+1}, \ldots, n_{k+l}, \ldots)$ angenommen werden. So erhalten wir eine $k+l+1$-fache Rekursion für ϑ; und da $\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1, a)$ z. B. durch die Substitution

$$\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1, a) = \vartheta(n_1, \ldots, n_k, 0, 0, \ldots, 0, a)$$

definiert werden kann, *so ist φ samt ϑ mehrfach-rekursiv.*

Falls in den Definitionen von $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_l$ niemals zwei Ausdrücke ϑ_i und ϑ_j ineinandergeschachtelt werden, ausgenommen den Fall, wo beide die Form $\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)$ haben, so erhalten wir für ϑ eine solche mehrfache Rekursion, wobei in der Definition eines Funktionswertes ineinandergeschachtelt bloß frühere Funktionswerte mit einem kleineren ersten Argument teilnehmen. Wie ich in § 2 zeigen werde, läßt sich eine solche mehrfache Rekursion auf primitive Rekursionen nebst Substitutionen auflösen. In einem solchen Fall — worunter auch der BERECZKIsche und der SKOLEMsche Spezialfall gehört — *ergibt sich* also *φ sogar als eine primitiv-rekursive Funktion.* —

Zurückgekehrt zum allgemeinen Fall, wo in einer Rekursion $\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1, a)$ aus früheren Funktionswerten von variabler Anzahl aufgebaut wird, diese Definition kann auch so umgeformt werden, daß darin die Ausdrücke $\varphi(n_1+1, \ldots, n_j+1, n_{j+1}, x_1, \ldots, x_{k-j})$ für $j = 0, 1, \ldots, k-1$ durch Funktionsvariablen $\xi_{k-j}(x_1, \ldots, x_{k-j})$ ersetzt werden. So wird eine Funktionsfunktion

$$F(\xi_k, \ldots, \xi_1; n_1, \ldots, n_k, a)$$

von mehrfach rekursiven Funktionen und $\xi_k(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \xi_1(x_1)$ ausgehend durch eine endliche Kette von Substitutionen und Rekursionen aufgebaut;

und durch

$$\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1, a) = F(\lambda x_1 \ldots x_k[\varphi(n_1, x_1 \ldots, x_k)], \\ \ldots, \lambda x_1[\varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k, x_1)];\ n_1, \ldots, n_k, a)$$

wird dann φ als eine rekursive Funktion der II-ten Stufe definiert. Und zwar ist φ sicher eine primitiv-rekursive Funktion der II-ten Stufe, da in seinem Aufbau Einschachtelungen für Funktionsvariablen gewiß nicht erfolgen (die Funktionsvariablen werden bis zum Schluß unverändert aufbewahrt; dann werden für sie der Reihe nach $\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k), \ldots, \varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k, x_1)$ eingesetzt). Die primitiv-rekursiven Funktionen der II-ten Stufe können aber auch als mehrfach-rekursive Funktionen der I-ten Stufe definiert werden.[10])

Anhang. *Die Zurückführung der primitiv-rekursiven Definition der* II-*ten Stufe einer Funktion* φ *auf eine gewöhnliche mehrfache Rekursion geschieht auch im allgemeinen Fall ähnlich, als im hier behandelten Spezialfall.* Die Definition von φ kann als eine Folge von Funktionsfunktionen (diese können, müssen aber nicht auch von Funktionsvariablen abhängen, also werden auch die zahlentheoretischen Funktionen als Funktionsfunktionen betrachtet), mit je anders bezeichneten Variablen

$$B_0, B_1, B_2, \ldots, B_l = \varphi \tag{B}$$

aufgefaßt werden, wo jedes B_i entweder eine mehrfach-rekursive Funktion der I-ten Stufe, oder eine der „Grundfunktionsfunktionen"

$$V_1(\xi; a) = \xi(a),\ V_2(\xi; a_1, a_2) = \xi(a_1, a_2), \ldots$$

ist, oder aber aus früheren Gliedern der Folge durch Substitution, oder durch solche Rekursion der II-ten Stufe entsteht, wobei an Stellen von Funktionsvariablen keine Einschachtelungen vorkommen. (Bei der Substitution kann für eine Funktionsvariable $\xi(x_1, \ldots, x_r)$ eine Funktionsfunktion als Funktion von r Zahlenvariablen eingesetzt werden, und für eine Zahlenvariable eine beliebige Funktionsfunktion; bei der Rekursion können frühere Werte der zu definierenden Funktion auch für Zahlenvariablen einer früher definierten Funktionsfunktion eingesetzt werden, können aber auch — als Funktionen gewißer Argumente betrachtet — Funktionsvariablen der betreffenden Funktionsfunktion „binden", indem sie für jene Funktionsvariable eingesetzt werden, wie das im Beispiel von Nr. 6 der Einleitung I geschehen ist.)

Nun ist φ eine zahlentheoretische Funktion, und daher werden im Aufbau von φ sämtliche Funktionsvariablen der Glieder der Folge (B) „gebunden". Sei z. B.

$$\varphi(0, a_1) = a_1$$
$$\varphi(n_1+1, a_1) = B(\lambda x[\varphi(n_1, x)];\ n_1, a_1, a_1),$$

wobei

$$B(\xi_1; n_2, n_3, a_2) = \xi_1(a_2^2), \quad \text{falls} \quad n_2 \cdot n_3 = 0$$
$$B(\xi_1; n_2+1, n_3+1, a_2) = C(\lambda x[B(\xi_1; n_2, B(\xi_1; n_2+1, n_3, x), a_2)];\ n_2, n_3)$$

und

$$C(\xi_2; 0, a_3) = \xi_2(a_3)$$
$$C(\xi_2; n_4+1, a_3) = \xi_2(C(\xi_2; n_4, a_3))$$

ist. Hier ist zur Definition von φ die Funktionsfunktion $B(\xi_1; n_2, n_3, a_2)$ bloß für $\xi_1(x) = \varphi(n_1, x)$, d. h. $\xi_1 = \lambda x[\varphi(n_1, x)]$, und die Funktionsfunktion $C(\xi; n_4, a_3)$ bloß für

$$\xi_2(x) = B(\xi_1; n_2, B(\xi_1; n_2+1, n_3, x), a_2) =$$
$$= B(\lambda y[\varphi(n_1, y)]; n_2, B(\lambda y[\varphi(n_1, y)]; n_2+1, n_3, x), a_2)$$

anzuwenden. Aber

$$\beta(n_1, n_2, n_3, a_2) = B(\lambda x[\varphi(n_1, x)]; n_2, n_3, a_2)$$

und

$$\gamma(n_1, n_2+1, n_3, n_4, a_2, a_3) =$$
$$= C(\lambda x[B(\lambda y[\varphi(n_1, y)]; n_2, B(\lambda y[\varphi(n_1, y)]; n_2+1, n_3, x), a_2)]; n_4, a_3) =$$
$$= C(\lambda x[\beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, x), a_2)]; n_4, a_3)$$

sind bereits zahlentheoretische Funktionen (für $n_2 = 0$ kann γ beliebig, z. B. als 0 definiert werden).

Mit einer ähnlichen „Rückverlegung der Einsetzungen" werden aus sämtlichen Gliedern der Folge (B) zahlentheoretische Funktionen; und wurde eine Funktionsfunktion B_i aus früheren Gliedern der Folge (B) durch Substitution bzw. durch Rekursion aufgebaut, so entsteht die entsprechende zahlentheoretische Funktion $\beta^{(i)}$ auch durch Substitution bzw. durch Rekursion aus gewißen zahlentheoretischen Funktionen. Hier kann man aber allgemein nicht „aus früher definierten zahlentheoretischen Funktionen" sagen. Die Funktionsvariablen von B_i werden jedenfalls durch Einsetzung zahlentheoretischer Funktionen gebunden, und dies hat zu Folge, daß $\beta^{(i)}$ aus diesen zahlentheoretischen Funktionen so aufgebaut wird, wie B_i aus seinen Funktionsvariablen; diese zahlentheoretischen Funktionen müssen also früher bekannt sein, um aus ihnen $\beta^{(i)}$ aufbauen zu können. Es kommen aber allgemein unter diesen zahlentheoretischen Funktionen auch solche vor, welche selbst mit Hilfe von $\beta^{(i)}$ aufgebaut werden: $\beta^{(j)}$ ist eine solche zahlentheoretische Funktion, falls $\beta^{(j)}$ durch Bindung der Funktionsvariablen von B_j entstanden ist, und B_i durch Rekursion mit Hilfe von B_j aufgebaut wurde, so, daß dabei gewiße Funktionsvariablen von B_j durch frühere Werte von B_i (als Funktionen gewißer Zahlenvariablen) gebunden wurden. In einem solchen Fall betrachten wir $\beta^{(j)}$ als nach $\beta^{(i)}$ kommende Funktion; diese nimmt zwar im Aufbau der $\beta^{(i)}$-Werte Teil, aber auf einer früheren Stelle, wenn wir — wie auch im betrachteten Beispiel geschehen ist — darauf achten, daß falls $n_1, \ldots, n_k$ die Rekursionsvariablen von B_i waren, und $u \leqq k$ die größte Zahl ist, für welche eine Funktionsvariable von B_j durch $B_i(\ldots, n_1+1, \ldots, n_{u-1}+1, n_u, \ldots)$ gebunden wurde, so die aus Bindung der Funktionsvariablen von B_j entstehende Funktion als $\beta^{(j)}(\ldots, n_1+1, \ldots, n_{u-1}+1, n_u, \ldots)$ definiert werden soll (wobei $\beta^{(j)}$ für $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{u-1} = 0$ beliebig, z. B. als 0 definiert werden kann). Im betrachteten Beispiel muß demnach β nach φ, und γ nach β kommen.

So erhält man simultane Definitionen für die zahlentheoretischen Funktionen, die zu den Gliedern der Folge (B) gehören. Im betrachteten Beispiel lauten diese Definitionen (wenn man beachtet, daß β aus B durch Einsetzung von $\varphi(n_1, x)$ für $\xi_1(x)$, und γ aus C durch Einsetzung von $\beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, x), a_2)$ für $\xi_2(x)$ entsteht):

$$
\begin{aligned}
&\varphi(0, a_1) = a_1 \\
&\varphi(n_1+1, a_1) = \beta(n_1, n_1, a_1, a_1), \\
&\beta(n_1, n_2, n_3, a_2) = \varphi(n_1, a_2^2), \text{ falls } n_2 \cdot n_3 = 0 \\
&\beta(n_1, n_2+1, n_3+1, a_2) = \gamma(n_1, n_2+1, n_3, n_2, a_2, n_3), \\
&\gamma(n_1, 0, n_3, n_4, a_2, a_3) = 0 \\
&\gamma(n_1, n_2+1, n_3, 0, a_2, a_3) = \beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, a_3), a_2) \\
&\gamma(n_1, n_2+1, n_3, n_4+1, a_2, a_3) = \\
&\qquad = \beta(n_1, n_2, \beta(n_1, n_2+1, n_3, \gamma(n_1, n_2+1, n_3, n_4, a_2, a_3)), a_2).
\end{aligned}
$$

Hier wird $\varphi(n_1+1, a_1)$ mit Hilfe der später kommenden Funktion β, aber für n_1 statt n_1+1 ausgedrückt; $\beta(n_1, n_2, n_3, a_2)$ für $n_2 \cdot n_3 = 0$ mit Hilfe der früher kommenden Funktion φ mit demselben n_1, und $\beta(n_1, n_2+1, n_3+1, a_2)$ mit Hilfe des später kommenden γ auf der früheren Stelle $(n_1, n_2+1, n_3, \ldots)$; dann $\gamma(n_1, n_2+1, n_3, 0, a_2, a_3)$ mit Hilfe des früher kommenden β, teils an der früheren Stelle $(n_1, n_2, \ldots)$, teils mit den selben Argumenten n_1, n_2+1, n_3, und $\gamma(n_1, n_2+1, n_3, n_4+1, a_2, a_3)$ mit Hilfe ähnlicher β-Werten und außerdem mit Hilfe derselben Funktion γ auf der früheren Stelle $(n_1, n_2+1, n_3, n_4, \ldots)$.

Wenn daher eine Funktion δ als

$$
\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, i, a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} \varphi(n_1, a_1), & \text{falls } i = 0 \\ \beta(n_1, n_2, n_3, a_2), & \text{,, } i = 1 \\ \gamma(n_1, n_2, n_3, n_4, a_2, a_3), & \text{,, } i = 2 \\ 0 \text{ sonst} & \end{cases}
$$

definiert wird (wo also das „Index-Argument" i die gewünschte Reihenfolge unserer simultan definierten Funktionen angibt), so kann δ durch die 5-fache Rekursion nach n_1, n_2, n_3, n_4 und i

$$
\begin{aligned}
&\delta(0, n_2, n_3, n_4, 0, a_1, a_2, a_3) = a_1 \\
&\delta(n_1+1, n_2, n_3, n_4, 0, a_1, a_2, a_3) = \delta(n_1, n_1, a_1, n_4, 1, a_1, a_1, a_3) \\
&\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, 1, a_1, a_2, a_3) = \delta(n_1, n_2, n_3, n_4, 0, a_2^2, a_2, a_3), \text{ falls } n_2 \cdot n_3 = 0 \\
&\delta(n_1, n_2+1, n_3+1, n_4, 1, a_1, a_2, a_3) = \delta(n_1, n_2+1, n_3, n_2, 2, a_1, a_2, n_3) \\
&\delta(n_1, 0, n_3, n_4, 2, a_1, a_2, a_3) = 0 \\
&\delta(n_1, n_2+1, n_3, 0, 2, a_1, a_2, a_3) = \delta(n_1, n_2, \\
&\qquad\qquad , \delta(n_1, n_2+1, n_3, 0, 1, a_1, a_3, a_3), 0, 1, a_1, a_2, a_3) \\
&\delta(n_1, n_2+1, n_3, n_4+1, 2, a_1, a_2, a_3) = \delta(n_1, n_2, \\
&, \delta(n_1, n_2+1, n_3, n_4+1, 1, a_1, \delta(n_1, n_2+1, n_3, n_4, 2, a_1, a_2, a_3), a_3), n_4+1, 1, a_1, a_2, a_3) \\
&\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, i+3, a_1, a_2, a_3) = 0
\end{aligned}
$$

angegeben werden; bei der Wahl der für die „fiktiven" Variablen eingesetzten Argumente habe ich dabei nur darauf geachtet, daß keine dieser Argumente vergrößert wird. Die Funktion φ entsteht z. B. durch die Substitution:

$$\varphi(n_1, a_1) = \delta(n_1, 0, 0, 0, 0, a_1, 0, 0).$$

Werden im allgemeinen Fall die der Glieder der Folge (B) zugeordneten zahlentheoretischen Funktionen in die gesagte richtige Reihenfolge geordnet, und so der Reihe nach mit

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$$

bezeichnet; werden ferner in dieser Reihenfolge diejenigen Rekursionsvariablen der entsprechenden B_i, welche in solchen B_i-Ausdrücken vorkommen, die gewiße Funktionsvariablen binden, der Reihe nach insgesamt mit $n_1, \ldots, n_k$, die übrigen Rekursionsvariablen und die Parameter der B_i der Reihe nach insgesamt mit $n_{k+1}, \ldots, n_{k+l}$ bzw. mit $a_1, \ldots, a_s$ bezeichnet, und

$$\delta(n_1, \ldots, n_k, i, n_{k+1}, \ldots, n_{k+l}, a_1, \ldots, a_s) = \beta_i(\ldots)$$

gesetzt, so kann δ durch eine Rekursion nach

$$n_1, \ldots, n_k, i, n_{k+1}, \ldots, n_{k+l}$$

also durch eine $k+l+1$-fache Rekursion definiert werden; und φ ergibt sich durch Substitution von Zahlen für gewiße Argumente von δ. *Daher ist φ eine mehrfach-rekursive Funktion der* I*-ten Stufe.*

§ 2. Welche mehrfache Rekursionen können auf primitive zurückgeführt werden?

1. Der in § 1 betrachtete Bereczkische Spezialfall hat zu einer solchen zweifachen Rekursion nach n und s geführt, in welcher ein späterer Wert der definierten Funktion von solchen ineinandergeschachtelten früheren Werten abhängt, wobei n kleiner ist, und außerdem noch von solchen nicht-eingeschachtelten Werten, wobei n dasselbe und s kleiner ist. Wie schon erwähnt wurde, lassen sich solche mehrfache Rekursionen auf gewöhnliche primitive Rekursionen nebst Substitutionen auflösen; ähnlich, wie ich das für die uneingeschachtelten mehrfachen Rekursionen früher bewiesen habe.[16])

Um den Gedankengang dieser Auflösung der Mehrfachheit einer Rekursion klarer hervortreten zu lassen, werde ich ihn zunächst am folgenden Spezialfall durchführen:

$$\varphi(m, n) = 0, \quad \text{falls} \quad m \cdot n = 0$$
$$\varphi(m+1, n+1) = \beta(m, n, \varphi(m, \gamma(m, n, \varphi(m, n+1))), \varphi(m+1, n)).$$

Falls $n \geqq 1$ ist, kann man $\varphi(m+1, n)$ aus der zweiten Gleichung entnehmen, indem $n-1$ statt n geschrieben wird: so erhält man

$$\varphi(m+1, n+1) = \beta(m, n, \varphi(m, \gamma(m, n, \varphi(m, n+1))), \\ , \beta(m, n-1, \varphi(m, \gamma(m, n-1, \varphi(m, n))), \varphi(m+1, n-1))).$$

Hier wird $\varphi(m+1, n+1)$ mit Hilfe der früheren Werte $\varphi(m, n+1)$, $\varphi(m, \gamma(m, n, \varphi(m, n+1)))$, $\varphi(m, n)$, $\varphi(m, \gamma(m, n-1, \varphi(m, n)))$ und $\varphi(m+1, n-1)$ angegeben. Ist $n \geqq 2$, so kann man mit $\varphi(m+1, n-1)$ ähnlich verfahren, usw., bis in $\varphi(m+1, n)$ das Argument n zu 0 abgebaut wird; dann kann man den Wert von $\varphi(m+1, 0)$ aus der ersten Definitionsgleichung entnehmen. Somit wäre aber $\varphi(m+1, n+1)$ mit Hilfe früherer Werte von variabler Anzahl ausgedrückt. Um das zu vermeiden, führe ich dieses Verfahren statt an φ an der „Wertverlaufsfunktion"

$$\varphi'(m, n) = \prod_{i=0}^{n} p_i^{\varphi(m, i)}$$

durch.

Die rekursive Definition von φ' kann wie folgt aufgestellt werden: Erstens ist für $m \cdot n = 0$

$$\varphi'(m, n) = \prod_{i=0}^{n} p_i^{\varphi(m, i)} = \prod_{i=0}^{n} p_i^{0} = 1,$$

ferner ist

$$\begin{aligned} \varphi'(m+1, n+1) &= \varphi'(m+1, n) \cdot p_{n+1}^{\varphi(m+1, n+1)} = \\ &= \varphi'(m+1, n) \cdot p_{n+1}^{\beta(m, n, \varphi(m, \gamma(m, n, \varphi(m, n+1))), \varphi(m+1, n))}. \end{aligned}$$

Es gilt aber

$$\varphi(m, n) = \exp_n(\varphi'(m, u))$$

für jedes $u \geqq n$, daher ist hier

$$\varphi(m, n+1) = \exp_{n+1}(\varphi'(m, u)),$$

$$\varphi(m, \gamma(m, n, \varphi(m, n+1))) = \exp_{\gamma(m, n, \exp_{n+1}(\varphi'(m, u)))}(\varphi'(m, v))$$

und

$$\varphi(m+1, n) = \exp_n(\varphi'(m+1, n)),$$

falls

$$u \geqq n+1$$

und

$$v \geqq \gamma(m, n, \exp_{n+1}(\psi'(m, u)))$$

gilt. Wird also

$$\bar{\beta}(m, n, b_1, b_2, b_3) = b_3 \cdot p_{n+1}^{\beta(m, n, \exp_{\gamma(m, n, \exp_{n+1}(b_1))}(b_2), \exp_n(b_3))}$$

und

$$\mu(m, n, b) = \gamma(m, n, \exp_{n+1}(b))$$

gesetzt, so lautet die Definition von φ':

$$\varphi'(m, n) = 1, \quad \text{falls} \quad m \cdot n = 0$$

$$\varphi'(m+1, n+1) = \bar{\beta}(m, n, \varphi'(m, u), \varphi'(m, v), \varphi'(m+1, n)),$$

falls u und v beliebig, bloß mit den Bedingungen

$$u \geqq n+1 \quad \text{und} \quad v \geqq \mu(m, n, \varphi'(m, u))$$

gewählt werden.

Nun kann der schrittweise zu vollführende Abbau von n in $\varphi'(m+1, n)$ beginnen. Ist $n \geqq 1$, so ergibt die zweite Definitionsgleichung, falls darin n für $n+1$ gesetzt wird:

$$\varphi'(m+1, n) = \bar{\beta}(m, n-1, \varphi'(m, u), \varphi'(m, v), \varphi'(m+1, n-1)),$$

falls zu den bisherigen Bedingungen noch

$$v \geqq \mu(m, n-1, \varphi'(m, u))$$

hinzutritt. Für

$$u \geqq n+1$$

und

$$v \geqq \mu(m, n, \varphi'(m, u)) + \mu(m, n-1, \varphi'(m, u))$$

gilt also

$$\varphi'(m+1, n+1) = \bar{\beta}(m, n, \varphi'(m, u), \varphi'(m, v), \\ \bar{\beta}(m, n-1, \varphi'(m, u), \varphi'(m, v), \varphi'(m+1, n-1))),$$

und daher, falls

$$\beta_1(m, n, b_1, b_2, b_3) = \bar{\beta}(m, n, b_1, b_2, \bar{\beta}(m, n-1, b_1, b_2, b_3))$$

gesetzt wird,

$$\varphi'(m+1, n+1) = \beta_1(m, n, \varphi'(m, u), \varphi'(m, v), \varphi'(m+1, n-1)).$$

Ich behaupte, daß es allgemein für $t \leqq n$ eine Darstellung von $\varphi'(m+1, n+1)$ von der Form

$$\varphi'(m+1, n+1) = \beta_t(m, n, \varphi'(m, u), \varphi'(m, v), \varphi'(m+1, n-t))$$

für jedes

$$u \geqq n+1$$

und

$$v \geqq \sum_{i=0}^{t} \mu(m, n-i, \varphi'(m, u))$$

gibt, wobei

$$\beta_t(m, n, b_1, b_2, b_3)$$

eine primitiv-rekursive Funktion der Argumente t, m, n, b_1, b_2, b_3 ist (also auch der Index t wird zu den Argumenten gezählt).

Dies gilt bereits für $t = 1$; aber auch für $t = 0$, falls

$$\beta_0(m, n, b_1, b_2, b_3) = \bar{\beta}(m, n, b_1, b_2, b_3)$$

gesetzt wird. Angenommen, daß es für ein $t < n$ bereits gilt, und

$$v \geqq \sum_{i=0}^{t+1} \mu(m, n-i, \varphi'(m, u))$$

gilt, so gewinnt man aus der zweiten Definitionsgleichung für φ', wenn darin $n-t$ ($\geqq 1$) für $n+1$ gesetzt wird,

$$\varphi'(m+1, n-t) = \bar{\beta}(m, n-(t+1), \varphi'(m, u), \varphi'(m, v), \varphi'(m+1, n-(t+1))),$$

denn nach der Annahme für u und v ist

$$u \geqq n-t,$$
$$v \geqq \mu(m, n-(t+1), \varphi'(m, u)).$$

Dies eingesetzt erhält man

$$\varphi'(m+1, n+1) = \beta_t(m, n, \varphi'(m, u), \varphi'(m, v),$$
$$, \bar{\beta}(m, n-(t+1), \varphi'(m, u), \varphi'(m, v), \varphi'(m+1, n-(t+1))));$$

also, wenn

$$\beta_{t+1}(m, n, b_1, b_2, b_3) = \beta_t(m, n, b_1, b_2, \bar{\beta}(m, n-(t+1), b_1, b_2, b_3))$$

gesetzt wird, tatsächlich

$$\varphi'(m+1, n+1) = \beta_{t+1}(m, n, \varphi'(m, u), \varphi'(m, v), \varphi'(m+1, n-(t+1))).$$

Wird daher β_t durch die einfache Rekursion nach dem Index t

$$\beta_0(m, n, b_1, b_2, b_3) = \bar{\beta}(m, n, b_1, b_2, b_3)$$
$$\beta_{t+1}(m, n, b_1, b_2, b_3) = \beta_t(m, n, b_1, b_2, \bar{\beta}(m, n \dot{-} (t+1), b_1, b_2, b_3))$$

definiert, so gibt es tatsächlich für $t = 1, 2, \ldots, n$ eine Darstellung der genannten Art für $\varphi'(m+1, n+1)$.

Für $t = n$ lautet speziell diese Darstellung:

$$\varphi'(m+1, n+1) = \beta_n(m, n, \varphi'(m, u), \varphi'(m, v), \varphi'(m+1, 0)) =$$
$$= \beta_n(m, n, \varphi'(m, u), \varphi'(m, v), 1),$$

oder kürzer, wenn

$$\beta^*(m, n, b_1, b_2) = \beta_n(m, n, b_1, b_2, 1)$$

gesetzt wird,

$$\varphi'(m+1, n+1) = \beta^*(m, n, \varphi'(m, u), \varphi'(m, v))$$

für jedes

$$u \geqq n+1 \quad \text{und} \quad v \geqq \sum_{i=0}^{n} \mu(m, n-i, \varphi'(m, u)).$$

Wird hier beidemal eben das Gleichheitszeichen genommen, und der kürzeren Schreibweise halber

$$\sigma(m, n, b) = \sum_{i=0}^{n} \mu(m, n \dot{-} i, b)$$

gesetzt, so lautet die volle Definition von φ':

$$\varphi'(m, n) = 1, \quad \text{falls} \quad m \cdot n = 0$$
$$\varphi'(m+1, n+1) = \beta^*(m, n, \varphi'(m, n+1), \varphi'(m, \sigma(m, n, \varphi'(m, n+1)))).$$

Das ist aber eine einfache Rekursion nach m, da n hier keine Rekursionsvariable ist, bloß die Rolle eines Parameters hat. Sie kann auch leicht auf die gewohnte Form gebracht werden: wird

$$\nu(m, n, b_1, b_2) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad n = 0 \\ \beta^*(m, n \dot{-} 1, b_1, b_2) & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt, so ist

$$\varphi'(0, n) = 1$$

$$\varphi'(m+1, n) = \nu(m, n, \varphi'(m, n), \varphi'(m, \sigma(m, n \dot{-} 1, \varphi'(m, n)))).$$

Daher ist $\varphi'(m, n)$ eine primitiv-rekursive Funktion,[3]) und samt φ' auch φ, da nach der Definition der Wertverlaufsfunktion φ'

$$\varphi(m, n) = \exp_n(\varphi'(m, n))$$

ist.

2. Nun werde ich die allgemeine k-fache Rekursion untersuchen. Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, man kann sich auf mehrfache Rekursionen, mit „normiertem Anfangswert" beschränken, wobei die in der Rekursion nicht teilnehmenden Variablen — ohne an der Struktur der Rekursion zu ändern — zu einem einzigen Parameter zusammengezogen wurden,[5])[6]) also auf Rekursionen der Form:

$$\varphi(n_1, \ldots, n_k, a) = \alpha(n_1, \ldots, n_k, a), \text{ falls } n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = 0$$

$$\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1, a) = F(n_1, \ldots, n_k, a, \lambda x_1, \ldots, x_k [\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)],$$
$$, \lambda x_1, \ldots, x_{k-1} [\varphi(n_1+1, n_2, x_1, \ldots, x_{k-1})], \ldots, \lambda x_1 [\varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k, x_1)]),$$

wobei der „Substitutionsterm"

$$F(n_1, \ldots, n_k, a; \xi_k(x_1, \ldots, x_k), \xi_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}), \ldots, \xi_1(x_1))$$

durch eine endliche Kette von Substitutionen aus $n_1, \ldots, n_k, a, \xi_k(x_1, \ldots, x_k)$, $\xi_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}), \ldots, \xi_1(x_1)$ und aus gewißen früher definierten Funktionen aufgebaut wird. Ich behaupte, daß eine solche Rekursion auf primitive Rekursionen und Substitutionen aufgelöst werden kann, wenn in F ineinandergeschachtelt bloß Ausdrücke der Form $\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)$ auftreten. Betrachten wir nun diesen Fall.

Wird eine primitiv-rekursive Funktion von $n_1, \ldots, n_k, a$ „Term 0-ter Ordnung", und allgemein ein Ausdruck $\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)$, worin für $x_1, \ldots, x_k$ Terme von höchstens i-ter Ordnung, darunter auch wenigstens ein Term von genau i-ter Ordnung, eingesetzt werden, „Term $i+1$-ter Ordnung" genannt, gilt ferner auch jede primitiv-rekursive Funktion von $n_1, \ldots, n_k, a$ und von beliebig vielen solchen Termen von höchstens $i+1$-ter Ordnung, von denen wenigstens einer von genau $i+1$-ter Ordnung ist, als Term $i+1$-ter Ordnung: so sind die in F auftretenden ineinandergeschachtelten Ausdrücke alle Terme von gewißen Ordnungen. Ein jeder solche Term hat die Form

$$\mathfrak{g} = \gamma(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi(n_1, \mathfrak{g}'_1, \ldots, \mathfrak{g}'_k), \ldots, \varphi(n_1, \mathfrak{g}_1^{(r)}, \ldots, \mathfrak{g}_k^{(r)})),$$

wobei $\mathfrak{g}'_1, \ldots, \mathfrak{g}_k^{(r)}$ (die „Bausteine" des betrachteten Terms) Terme von niedrigerer Ordnung als $\mathfrak{g}$ sind. Die Bausteine dieser „unmittelbaren Bausteine" gelten ebenfalls als Bausteine von $\mathfrak{g}$.

Ordnen wir die Bausteine der äußersten Terme der Form $\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)$, also der Terme, die ohne weiter eingeschachtelt zu werden, in F auftreten, nach wachsender Ordnungszahl des sie unmittelbar enthaltenden Termes von der Form $\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)$ (diejenigen mit gleicher Ordnungszahl dieses Termes beliebig, aber so, daß die unmittelbaren Bausteine $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k$ eines Terms der Form $\varphi(n_1, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k)$ in dieser Reihenfolge nebeneinander stehen sollen). Die so entstandene Folge sei

$$\mathfrak{g}_{11}, \ldots, \mathfrak{g}_{1k}; \mathfrak{g}_{21}, \ldots, \mathfrak{g}_{2k}; \ldots; \mathfrak{g}_{l1}, \ldots, \mathfrak{g}_{lk}$$

(hier ist $\mathfrak{g}_{1j}$ für $j = 1, \ldots, k$ gewiß von 0-ter Ordnung, also

$$\mathfrak{g}_{1j} = \gamma_{1j}(n_1, \ldots, n_k, a),$$

wobei γ_{1j} primitiv-rekursiv ist). Die Bausteine eines beliebigen $\mathfrak{g}_{ij}$, darunter auch die unmittelbaren, stehen in dieser Folge vor $\mathfrak{g}_{ij}$, daher besitzt $\mathfrak{g}_{ij}$ die Form

$$\mathfrak{g}_{ij} = \gamma_{ij}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi(n_1, \mathfrak{g}_{i_1 1}, \ldots, \mathfrak{g}_{i_1 k}), \ldots, \varphi(n_1, \mathfrak{g}_{i_r 1}, \ldots, \mathfrak{g}_{i_r k})),$$

mit $i > i_1, \ldots, i_r \geqq 1$ und primitiv-rekursivem γ_{ij}. Da γ_{ij} auch als Funktion von beliebig vielen hinzugenommenen fiktiven Variablen betrachtet werden kann, können hier als erste Indizes sämtliche Zahlen unter i vorkommen. So läßt sich die Definition von φ folgendermaßen aufschreiben:

$$\begin{aligned} &\varphi(n_1, \ldots, n_k, a) = \alpha(n_1, \ldots, n_k, a) \quad \text{falls} \quad n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = 0 \\ \text{(D)} \quad &\varphi(n_1 + 1, \ldots, n_k + 1, a) = \beta(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1, \ldots, \varphi_l; \varphi_{11}, \ldots, \varphi_{1 l_1}; \\ &\qquad ; \varphi_{21}, \ldots, \varphi_{2 l_2}; \ldots; \varphi_{k-1, 1}, \ldots, \varphi_{k-1, l_{k-1}}), \end{aligned}$$

wo für $i = 1, 2, \ldots, l$

$$\varphi_i = \varphi(n_1, \gamma_{i1}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}), \ldots, \gamma_{ik}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1})),$$

ferner für $i = 1, 2, \ldots, k-1$ und $j = 1, 2, \ldots, l_i$

$$\varphi_{ij} = \varphi(n_1 + 1, \ldots, n_i + 1, n_{i+1}, \delta_{j1}(n_1, \ldots, n_k, a), \ldots, \delta_{j, k-i}(n_1, \ldots, n_k, a))$$

ist, mit primitiv-rekursiven $\alpha, \beta, \gamma_{ij}, \delta_{j\mu}$.

Ist hier $k = 1$, (wobei Ausdrücke φ_{ij} überhaupt nicht auftreten), so haben wir mit einer einfachen Rekursion zu tun, und diese läßt sich tatsächlich auf primitive Rekursion nebst Substitutionen auflösen.[3]) Nehmen wir jetzt an, daß bei einem bestimmten $k > 1$ für $k-1$ Rekursionsvariablen bereits dasselbe gilt.

3. Nun werde ich sukzessiv die Wertverlaufsfunktionen

$$\varphi^{(1)}(n_1, \ldots, n_k, a) = \prod_{i=0}^{n_2} p_i^{\varphi(n_1, i, n_3, \ldots, n_k, a)},$$

$$\varphi^{(2)}(n_1, \ldots, n_k, a) = \prod_{i=0}^{n_3} p_i^{\varphi^{(1)}(n_1, n_2, i, n_4, \ldots, n_k, a)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi(n_1, \ldots, n_k, a) = \varphi^{(k)}(n_1, \ldots, n_k, a) = \prod_{i=0}^{a} p_i^{\varphi^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, i)}$$

einführen. Ich behaupte, daß es zu jedem $s = 1, 2, \ldots, k-1$ primitiv-rekursive

Funktionen $\alpha^{(s)}, \beta^{(s)}$, ferner für $i=1,2,\ldots,l;\, j=1,2,\ldots,k$ primitiv-rekursive Funktionen $\gamma_{ij}^{(s)}$, endlich für $i=1,2,\ldots,l$ primitiv-rekursive Funktionen $\mu_i^{(s)}$ gibt, so daß

$$\varphi^{(s)}(n_1,\ldots,n_k,a)=\alpha^{(s)}(n_1,\ldots,n_k,a), \quad \text{falls} \quad n_1\cdot\ldots\cdot n_k=0$$

$$\varphi^{(s)}(n_1+1,\ldots,n_k+1,a)=\beta^{(s)}(n_1,\ldots,n_k,a,\varphi_1^{(s)},\ldots,\varphi_l^{(s)};\varphi_{10}^{(s)},\varphi_{11}^{(s)},\ldots,\varphi_{1l_1}^{(s)};\ldots;$$
$$;\varphi_{s0}^{(s)},\varphi_{s1}^{(s)},\ldots,\varphi_{sl_s}^{(s)};\varphi_{s+1,1}^{(s)},\ldots,\varphi_{s+1,l_{s+1}}^{(s)};\ldots;\varphi_{k-1,1}^{(s)},\ldots,\varphi_{k-1,l_{k-1}}^{(s)})$$

gilt, wobei

$$\varphi_1^{(s)}=\varphi^{(s)}(n_1,\overbrace{u_1^{(s)},\ldots,u_1^{(s)}}^{s\text{-mal}},\gamma_{1,s+1}^{(s)}(n_1,\ldots,n_k,a),\ldots,\gamma_{1k}^{(s)}(n_1,\ldots,n_k,a))$$

ist, und falls für ein i, wobei $2\leqq i\leqq l$ ist, $\varphi_1^{(s)},\ldots,\varphi_{i-1}^{(s)}$ bereits definiert sind, so ist

$$\varphi_i^{(s)}=\varphi^{(s)}(n_1,\overbrace{u_i^{(s)},\ldots,u_i^{(s)}}^{s\text{-mal}},\gamma_{i,s+1}^{(s)}(n_1,\ldots,n_k,a,\varphi_1^{(s)},\ldots,\varphi_{i-1}^{(s)}),\ldots,$$
$$,\gamma_{ik}^{(s)}(n_1,\ldots,n_k,a,\varphi_1^{(s)},\ldots,\varphi_{i-1}^{(s)})),$$

wo für $i=1,2,\ldots,l$ die $u_i^{(s)}$ beliebig, sogar auch die gleich bezeichneten von einander verschieden, bloß mit der Bedingung

$$u_i^{(s)}\geqq\mu_i^{(s)}(n_1,\ldots,n_k,a,\varphi_1^{(s)},\ldots,\varphi_{i-1}^{(s)})$$

gewählt werden können; ferner ist mit denselben Bedingungen für $i=1,2,\ldots,s$

$$\varphi_{i0}^{(s)}=\varphi^{(s)}(n_1+1,\ldots,n_i+1,n_{i+1},\overbrace{u_1^{(s)},\ldots,u_1^{(s)}}^{s\dot{-}i\text{-mal}},n_{s+2}+1,\ldots,n_k+1,a),$$

und für $i=1,2,\ldots,k-1;\, j=1,2,\ldots,l_i$

$$\varphi_{ij}^{(s)}=\varphi^{(s)}(n_1+1,\ldots,n_i+1,n_{i+1},\overbrace{u_1^{(s)},\ldots,u_1^{(s)}}^{s\dot{-}i\text{-mal}},\delta_{j,s\dot{-}i+1}(n_1,\ldots,n_k,a),\ldots,$$
$$,\delta_{j,k-i}(n_1,\ldots,n_k,a)).$$

Dies gilt nämlich für $s=0$ (wobei Argumente $u_i^{(s)}$ und Ausdrücke $\varphi_{i0}^{(s)}$ überhaupt nicht auftreten), falls die oberen Indizes (0) überall weggelassen werden. Angenommen, daß die Behauptung für ein $s<k-1$ bereits gilt, werde ich sie nun für $s+1$ beweisen.

4. Da

$$\varphi^{(s+1)}(n_1,\ldots,n_k,a)=\prod_{i=0}^{n_{s+2}}p_i^{\varphi^{(s)}(n_1,\ldots,n_{s+1},i,n_{s+3},\ldots,n_k,a)}$$

ist, so ist für jedes $u\geqq n_{s+2}$

$$\varphi^{(s)}(n_1,\ldots,n_k,a)=\exp_{n_{s+2}}(\varphi^{(s+1)}(n_1,\ldots,n_{s+1},u,n_{s+3},\ldots,n_k,a)).$$

Daher ist

$$\varphi_1^{(s)}=\exp(\varphi^{(s+1)}(n_1,\overbrace{u_1^{(s)},\ldots,u_1^{(s)}}^{s\text{-mal}},u_1^{(s+1)},\gamma_{1,s+2}^{(s)}(n_1,\ldots,n_k,a),\ldots,\gamma_{1k}^{(s)}(n_1,\ldots,n_k,a))),$$
$$\gamma_{1,s+1}^{(s)}(n_1,\ldots,n_k,a)$$

falls

$$u_1^{(s+1)} \geqq \gamma_{1,s+1}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a)$$

ist. Freilich kann neben der alten Bedingung

$$u_1^{(s)} \geqq \mu_1^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a)$$

$u_1^{(s)}$ auch nicht-kleiner als $\gamma_{1,s+1}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a)$ gewählt werden; wenn dabei noch

$$\gamma_{1,s+2}^{(s)} = \gamma_{1,s+2}^{(s+1)}, \ldots, \gamma_{1k}^{(s)} = \gamma_{1k}^{(s+1)},$$

gesetzt wird, so ist

$$\varphi_1^{(s)} = \exp\,(\varphi_1^{(s+1)}), \atop \qquad\qquad \gamma_{1,s+1}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a)$$

wo

$$\varphi_1^{(s+1)} = \varphi^{(s+1)}(n_1, \overbrace{u_1^{(s+1)}, \ldots, u_1^{(s+1)}}^{s+1\text{-mal}}, \gamma_{1,s+2}^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a), \ldots, \gamma_{1k}^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a))$$

ist, falls

$$u_1^{(s+1)} \geqq \mu_1^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a) + \gamma_{1,s+1}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a)$$

gilt.

Nehmen wir an, daß für ein i, wobei $2 \leqq i \leqq l$ ist, für jedes $j < i$ bereits $\varphi_j^{(s+1)}$ definiert ist, und dabei

$$\varphi_j^{(s)} = \exp\,(\varphi_j^{(s+1)}) \atop \qquad\qquad \gamma_{1,s+1}^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s+1)}, \ldots, \varphi_{j-1}^{(s+1)})$$

für eine geeignete primitiv-rekursive Funktion $\gamma_{1,s+1}^{(s+1)}$ gilt (also $\varphi_j^{(s)}$ „in“ $\varphi_1^{(s+1)}, \ldots, \varphi_j^{(s+1)}$ primitiv-rekursiv ist), falls mit geeignetem primitiv-rekursivem $\mu_j^{(s+1)}$

$$u_j^{(s+1)} \geqq \mu_j^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s+1)}, \ldots, \varphi_{j-1}^{(s+1)})$$

gilt. Nun ist

$$\varphi_i^{(s)} = \exp\,(\varphi^{(s+1)}(n_1, u_i^{(s)}, \ldots, u_i^{(s)}, u_i^{(s+1)}, \gamma_{i,s+2}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s)}), \ldots, \atop \gamma_{i,s+1}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s)}) \qquad\qquad\qquad\qquad \atop \qquad\qquad\qquad , \gamma_{ik}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s)}))),$$

falls noch

$$u_i^{(s+1)} \geqq \gamma_{i,s+1}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s)})$$

gilt. Wird

$$\mu_i^{(s+1)} = \mu_i^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s)}) + \gamma_{i,s+1}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s)})$$

gewählt, so kann hier mit $u_i^{(s+1)} \geqq \mu_i^{(s+1)}$ statt $u_i^{(s)}$ auch $u_i^{(s+1)}$ geschrieben werden.

Samt $\varphi_1^{(s)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s)}$ sind auch $\gamma_{ij}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s)})$ für $j = s+1, \ldots, k$ und $\mu_i^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s)})$ „in“ $\varphi_1^{(s+1)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s+1)}$ primitiv-rekursive Funktionen, d. h. es gibt primitiv-rekursive Funktionen $\gamma_{ij}^{(s+1}$ und $\mu_i^{(s+1)}$, so daß

$$\gamma_{ij}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s)}) = \gamma_{ij}^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s+1)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s+1)})$$

gilt, und die untere Schranke für $u_i^{(s+1)}$ eben

$$\mu_i^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s+1)}, \ldots, \varphi_{j-1}^{(s+1)})$$

ist. Mit

$$\varphi_i^{(s+1)} = \varphi^{(s+1)}(n_1, \overbrace{u_i^{(s+1)}, \ldots, u_i^{(s+1)}}^{s+1\text{-mal}}, \gamma_{i,s+2}^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s+1)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s+1)}), \ldots,$$
$$, \gamma_{ik}^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s+1)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s+1)}))$$

gilt also auch

$$\varphi_i^{(s)} = \exp\,(\varphi_i^{(s+1)})_{\gamma_{i,s+1}^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s+1)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s+1)})}$$

für

$$u_i^{(s+1)} \geqq \mu_i^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s+1)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(s+1)}).$$

Dies gilt also für jedes $i \leqq l$. Wird der kürzeren Schreibweise halber für $i = 1, 2, \ldots, l$

$$\omega_i^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, b_1, \ldots, b_i) = \exp\,(b_i)_{\gamma_{i,s+1}^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a, b_1, \ldots, b_{i-1})}$$

gesetzt, so ist

$$\varphi_i^{(s)} = \omega_i^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s+1)}, \ldots, \varphi_i^{(s+1)}).$$

Ferner gilt für $i = 1, 2, \ldots, s$

$$\varphi_{i0}^{(s)} = \exp_{n_{s+2}+1}(\varphi^{(s+1)}(n_1+1, \ldots, n_i+1, n_{i+1}, \overbrace{u_1^{(s)}, \ldots, u_1^{(s)}}^{s \dot{-} i\text{-mal}}, u_1^{(s+1)},$$
$$, n_{s+3}+1, \ldots, n_k+1, a)),$$

falls zu den bisherigen Bedingungen noch

$$u_1^{(s+1)} \geqq n_{s+2}+1$$

hinzugenommen wird; und für $i = 1, 2, \ldots, k-1$; $j = 1, 2, \ldots, l_i$

$$\varphi_{ij}^{(s)} = \exp\,(\varphi^{(s+1)}(n_1+1, \ldots, n_i+1, n_{i+1}, \overbrace{u_1^{(s)}, \ldots, u_1^{(s)}}^{s \dot{-} i\text{-mal}}, u_1^{(s+1)}, \delta_{j,s\dot{-}i+2}(n_1, \ldots, n_k, a),$$
$$\ldots, \delta_{j,k-i}(n_1, \ldots, n_k, a)))_{\bar{\delta}_{j,s\dot{-}i+1}^{(i)}(n_1, \ldots, n_k, a)},$$

mit

$$\bar{\delta}_{j,s\dot{-}i+1}^{(i)}(n_1, \ldots, n_k, a) = \begin{cases} \delta_{j,s\dot{-}i+1}(n_1, \ldots, n_k, a), & \text{falls } i \leqq s \\ n_{s+2}, & \text{„} \quad i = s+1 \\ n_{s+2}+1, & \text{„} \quad s+1 < i \leqq k-1 \\ 0 \text{ sonst,} & \end{cases}$$

falls zu den bisherigen Bedingungen noch

$$u_1^{(s+1)} \geqq \delta_{j,s\dot{-}i+1}(n_1, \ldots, n_k, a)$$

gilt.

Wird also $\mu_1^{(s+1)}$ durch

$$\mu_1^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a) = \mu_1^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a) + \gamma_{1,s+1}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a) + n_{s+2} + 1 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{l_i} \delta_{j,s\dot{-}i+1}(n_1, \ldots, n_k, a)$$

definiert, so genügt $\mu_1^{(s+1)}$ den bisherigen Bedingungen, und auch hier kann überall $u_1^{(s+1)} \geqq \mu_1^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a)$ statt $u_1^{(s)}$ gesetzt werden.

Sei noch

$$\iota_{ij}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, b) = \exp(b)^{\overline{\delta}_{j, s \dot{-} i+1}^{(i)}(n_1, \ldots, n_k, a)}.$$

So ist für $i = 1, 2, \ldots, s$

$$\varphi_{i0}^{(s)} = \exp_{n_{s+2}+1}(\varphi_{i0}^{(s+1)}),$$

und für $i = 1, 2, \ldots, k-1$; $j = 1, 2, \ldots, l_i$

$$\varphi_{ij}^{(s)} = \iota_{ij}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_{ij}^{(s+1)}).$$

Da nun das Produkt

$$\varphi^{(s+1)}(n_1+1, \ldots, n_k+1, a) = \prod_{i=0}^{n_{s+2}+1} p_i^{\varphi^{(s)}(n_1+1, \ldots, n_{s+1}+1, i, n_{s+3}+1, \ldots, n_k+1, a)}$$

durch

$$\varphi^{(s+1)}(n_1+1, \ldots, n_k+1, a) = \varphi^{(s+1)}(n_1+1, \ldots, n_{s+1}+1, n_{s+2}, n_{s+3}+1, \ldots, n_k+1, a) \cdot \\ \cdot p_{n_{s+2}+1}^{\varphi^{(s)}(n_1+1, \ldots, n_k+1, a)}$$

aufgebaut werden kann, und für $n_{s+2} = 0$

$$\prod_{i=0}^{n_{s+2}} p_i^{\varphi^{(s)}(n_1, \ldots, n_{s+1}, i, n_{s+3}, \ldots, n_k, a)} = p_0^{\alpha^{(s)}(n_1, \ldots, n_{s+1}, 0, n_{s+3}, \ldots, n_k, a)}$$

ist, so ist nach den Vorherigen, wenn

$$\alpha^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a) = \prod_{i=0}^{n_{s+2}} p_i^{\alpha^{(s)}(n_1, \ldots, n_{s+1}, i, n_{s+3}, \ldots, n_k, a)}$$

und

$$\beta^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a, b_1, \ldots, b_l;\ b_{10}, b_{11}, \ldots, b_{1l_1};\ \ldots;\ b_{s+1,0}, b_{s+1,1}, \ldots, b_{s+1, l_{s+1}}; \\ ; b_{s+2,1}, \ldots, b_{s+2, l_{s+2}};\ \ldots;\ b_{k-1,1}, \ldots, b_{k-1, l_{k-1}}) = b_{s+1,0} \cdot p_{n_{s+2}+1}^{\overline{\beta}^{(s)}}$$

mit

$$\overline{\beta}^{(s)} = \beta^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, \omega_1^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, b_1), \ldots, \omega_l^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, b_1, \ldots, b_l); \\ ; \exp_{n_{s+2}+1}(b_{10}), \\ , \iota_{11}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, b_{11}), \ldots, \iota_{1l_1}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, b_{1l_1});\ \ldots;\ \exp_{n_{s+2}+1}(b_{s0}), \\ , \iota_{s1}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, b_{s1}), \ldots, \iota_{sl_s}^{(s)}(n_1 \ldots, n_k, a, b_{sl_s}); \\ ; \iota_{s+1,1}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, b_{s+1,1}), \ldots, \iota_{s+1, l_{s+1}}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, b_{s+1, l_{s+1}}); \\ ;\ \ldots;\ \iota_{k-1,1}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, b_{k-1,1}), \ldots, \iota_{k-1, l_{k-1}}^{(s)}(n_1, \ldots, n_k, a, b_{k-1, l_{k-1}}))$$

gesetzt wird, tatsächlich

$$\varphi^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a) = \alpha^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a), \text{ falls } n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = 0$$

$$\varphi^{(s+1)}(n_1+1, \ldots, n_k+1, a) = \beta^{(s+1)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(s+1)}, \ldots, \varphi_l^{(s+1)}; \varphi_{10}^{(s+1)}, \ldots, \\ , \varphi_{1l_1}^{(s+1)};\ \ldots;\ \varphi_{s+1,0}^{(s+1)}, \ldots, \varphi_{s+1, l_{s+1}}^{(s+1)}; \varphi_{s+2,1}^{(s+1)}, \ldots, \varphi_{s+2, l_{s+2}}^{(s+1)};\ \ldots;\ \varphi_{k-1,1}^{(s+1)}, \ldots, \varphi_{k-1, l_{k-1}}^{(s+1)}).$$

So überträgt sich diese Definitionsart von s auch auf $s+1$; daher kann $\varphi^{(s)}$ für $s=1, 2, \ldots, k-1$ tatsächlich derart definiert werden.

Für $s=k-1$ ergibt sich speziell

$$\varphi^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, a) = \alpha^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, a), \text{ falls } n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = 0$$

$$\varphi^{(k-1)}(n_1+1, \ldots, n_k+1, a) = \beta^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(k-1)}, \ldots, \varphi_l^{(k-1)}; \varphi_{10}^{(k-1)}, \ldots, \varphi_{1l_1}^{(k-1)}; \ldots; \\ ; \varphi_{k-1,0}^{(k-1)}, \ldots, \varphi_{k-1,l_{k-1}}^{(k-1)}),$$

wobei

$$\varphi_1^{(k-1)} = \varphi^{(k-1)}(n_1, u_1^{(k-1)}, \ldots, u_1^{(k-1)}, \gamma_{1k}^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, a))$$

ist, und falls für ein i, wobei $2 \leqq i \leqq l$ ist, $\varphi_1^{(k-1)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(k-1)}$ bereits definiert sind, so ist

$$\varphi_i^{(k-1)} = \varphi^{(k-1)}(n_1, u_i^{(k-1)}, \ldots, u_i^{(k-1)}, \gamma_{ik}^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(k-1)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(k-1)}));$$

ferner ist für $i=1, 2, \ldots, k-1$

$$\varphi_{i0}^{(k-1)} = \varphi^{(k-1)}(n_1+1, \ldots, n_i+1, n_{i+1}, u_1^{(k-1)}, \ldots, u_1^{(k-1)}, a)$$

und für $i=1, 2, \ldots, k-1$; $j=1, 2, \ldots, l_i$

$$\varphi_{ij}^{(k-1)} = \varphi^{(k-1)}(n_1+1, \ldots, n_i+1, n_{i+1}, u_1^{(k-1)}, \ldots, u_1^{(k-1)}, \delta_{j,k-i}(n_1, \ldots, n_k, a)),$$

wo für $i=1, 2, \ldots, l$ jedes $u_i^{(k-1)}$ beliebig, bloß mit der Bedingung

$$u_i^{(k-1)} \geqq \mu_i^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, a, \varphi_1^{(k-1)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(k-1)})$$

gewählt werden kann, und sämtliche auftretende Funktionen $\alpha^{(k-1)}$, $\beta^{(k-1)}$, $\gamma_{ik}^{(k-1)}$, $\delta_{j,k-i}$, $\mu_i^{(k-1)}$ primitiv-rekursiv sind.

5. Der Übergang auf die Definition von

$$\varphi^{(k)}(n_1, \ldots, n_k, a) = \prod_{r=0}^{a} p_r^{\varphi^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, r)}$$

kann nicht ganz wie bisher geschehen, da a keine Rekursionsvariable ist.

Jedenfalls ist auch hier für $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = 0$

$$\varphi^{(k)}(n_1, \ldots, n_k, a) = \prod_{r=0}^{a} p_i^{\alpha^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, r)};$$

wenn also

$$\prod_{r=0}^{a} p_i^{\alpha^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, r)} = \overline{\alpha}(n_1, \ldots, n_k, a)$$

gesetzt wird,

$$\varphi^{(k)}(n_1, \ldots, n_k, a) = \overline{\alpha}(n_1, \ldots, n_k, a), \text{ falls } n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = 0.$$

Ferner ist auch hier für jedes $u \geqq a$

$$\varphi^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, a) = \exp_a(\varphi^{(k)}(n_1, \ldots, n_k, u)),$$

und so können in

$$\varphi^{(k)}(n_1+1, \ldots, n_k+1, a) = \prod_{r=0}^{a} p_r^{\varphi^{(k-1)}(n_1+1, \ldots, n_k+1, r)} =$$

$$= \prod_{r=0}^{a} p_r^{\beta^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, r, \overline{\varphi}_1^{(k-1)}, \ldots, \overline{\varphi}_l^{(k-1)}; \overline{\varphi}_{10}^{(k-1)}, \ldots, \overline{\varphi}_{1l_1}^{(k-1)}; \ldots; \overline{\varphi}_{k-1,0}^{(k-1)}, \ldots, \overline{\varphi}_{k-1,l_{k-1}}^{(k-1)})}$$

die Ausdrücke $\overline{\varphi}^{(k-1)}$, die sich von den entsprechenden Ausdrücken $\varphi^{(k-1)}$ darin unterscheiden, daß in ihnen für a überall r gesetzt werden muß, mit Hilfe von $\varphi^{(k)}$ aufgeschrieben werden.

So ist

$$\overline{\varphi}_1^{(k-1)} = \exp\,(\varphi^{(k)}(n_1, u_1^{(k-1)}, \ldots, u_1^{(k-1)}, u_1^{(k)})), \atop \gamma_{1k}^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, r)$$

falls

$$u_1^{(k)} \geqq \gamma_{1k}^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, r)\,(=\gamma_{1k}^{(k)}(n_1, \ldots, n_k, r))$$

gilt. Freilich kann neben der alten Bedingung

$$u_1^{(k-1)} \geqq \mu_1^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, r)$$

$u_1^{(k-1)}$ auch nicht-kleiner als $\gamma_{1k}^{(k)}(n_1, \ldots, n_k, r)$ gewählt, und daher auch statt $u_1^{(k-1)}$ überall $u_1^{(k)}$ geschrieben werden; so ist

$$\overline{\varphi}_1^{(k-1)} = \exp\,(\varphi_1^{(k)}) \atop \gamma_{1k}^{(k)}(n_1, \ldots, n_k, r)$$

mit

$$\varphi_1^{(k)} = \varphi^{(k)}(n_1, u_1^{(k)}, \ldots, u_1^{(k)}).$$

Man schließt daraus induktiv, genau so, wie in Nr. 3, daß es auch für $i = 2, \ldots, l$ primitiv-rekursive Funktionen $\gamma_{ik}^{(k)}$ und $\mu_i^{(k)}$ gibt, so daß

$$\overline{\varphi}_i^{(k-1)} = \exp\,(\varphi_i^{(k)}) \atop \gamma_{ik}^{(k)}(n_1, \ldots, n_k, r, \varphi_1^{(k)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(k)})$$

mit

$$\varphi_i^{(k)} = \varphi^{(k)}(n_1, u_i^{(k)}, \ldots, u_i^{(k)})$$

für

$$u_i^{(k)} \geqq \mu_i^{(k)}(n_1, \ldots, n_k, r, \varphi_1^{(k)}, \ldots, \varphi_{i-1}^{(k)})$$

gilt. Der einfacheren Schreibweise halber setze ich wieder

$$\omega_i(n_1, \ldots, n_k, r, b_1, \ldots, b_i) = \exp\,(b_i), \atop \gamma_{ik}^{(k)}(n_1, \ldots, n_k, r, b_1, \ldots, b_{i-1})$$

dann ist

$$\overline{\varphi}_i^{(k-1)} = \omega_i(n_1, \ldots, n_k, r, \varphi_1^{(k)}, \ldots, \varphi_i^{(k)}).$$

Ferner gilt für $i = 1, 2, \ldots, k-1$

$$\overline{\varphi}_{i0}^{(k-1)} = \exp_r(\varphi^{(k)}(n_1+1, \ldots, n_i+1, n_{i+1}, u_1^{(k-1)}, \ldots, u_1^{(k-1)}, u_1^{(k)})),$$

falls zu den bisherigen Bedingungen noch

$$u_1^{(k)} \geqq r$$

hinzugenommen wird; und für $i = 1, 2, \ldots, k-1$; $j = 1, 2, \ldots, l_i$

$$\overline{\varphi}_{ij}^{(k-1)} = \exp\,(\varphi^{(k)}(n_1+1, \ldots, n_i+1, n_{i+1}, u_1^{(k-1)}, \ldots, u_1^{(k-1)}, u_1^{(k)})), \atop \delta_{j,\,k-i}(n_1, \ldots, n_k, r)$$

falls noch

$$u_1^{(k)} \geqq \delta_{j,\,k-i}(n_1, \ldots, n_k, r)$$

gilt. Wird also $\mu_1^{(k)}$ durch

$$\mu_1^{(k)}(n_1, \ldots, n_k, r) = \mu_1^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, r) + \gamma_{1k}^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, r) + r + \\ + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{l_i} \delta_{j,\,k-i}(n_1, \ldots, n_k, r)$$

definiert, so genügt $\mu_1^{(k)}$ den bisherigen Bedingungen, und auch hier kann überall $u_1^{(k)} \geqq \mu_1^{(k)}(n_1, \ldots, n_k, r)$ statt $u_1^{(k-1)}$ gesetzt werden.

Sei noch

$$\iota_{ij}(n_1, \ldots, n_k, r, b) = \exp(b)_{\delta_{j,\,k-i}(n_1, \ldots, n_k, r)} .$$

So ist mit der für $u_1^{(k)}$ gestellten Bedingung für $i = 1, 2, \ldots, k-1$

$$\overline{\varphi}_{i0}^{(k-1)} = \exp_r(\varphi_{i0}^{(k)})$$

und für $i = 1, 2, \ldots, k-1$; $j = 1, 2, \ldots, l_i$

$$\overline{\varphi}_{ij}^{(k-1)} = \iota_{ij}(n_1, \ldots, n_k, r, \varphi_{i0}^{(k)}),$$

wobei

$$\varphi_{i0}^{(k)} = \varphi^{(k)}(n_1 + 1, \ldots, n_i + 1, n_{i+1}, u_1^{(k)}, \ldots, u_1^{(k)})$$

ist. Wird daher für $i = 1, 2, \ldots, l$

$$\mu_i(n_1, \ldots, n_k, a, b_1, \ldots, b_{i-1}) = \sum_{r=0}^{a} \mu_i^{(k)}(n_1, \ldots, n_k, r, b_1, \ldots, b_{i-1})$$

und

$$\overline{\beta}(n_1, \ldots, n_k, a, b_1, \ldots, b_l;\ b_{10}, \ldots, b_{k-1,0}) = \prod_{r=0}^{a} p_r^{\overline{\beta}^{(k-1)}}$$

gesetzt, mit

$$\overline{\beta}^{(k-1)} = \beta^{(k-1)}(n_1, \ldots, n_k, r, \omega_1(n_1, \ldots, n_k, r, b_1), \ldots, \omega_l(n_1, \ldots, n_k, r, b_1, \ldots, b_l); \\ ; \exp_r(b_{10}), \iota_{11}(n_1, \ldots, n_k, r, b_{10}), \ldots, \iota_{1l_1}(n_1, \ldots, n_k, r, b_{10}); \ldots; \exp_r(b_{k-1,0}), \\ , \iota_{k-1,1}(n_1, \ldots, n_k, r, b_{k-1,0}), \ldots, \iota_{k-1,\,l_{k-1}}(n_1, \ldots, n_k, r, b_{k-1,0})),$$

so lautet die Definition von $\varphi^{(k)} = \psi$:

$$\psi(n_1, \ldots, n_k, a) = \overline{\alpha}(n_1, \ldots, n_k, a), \text{ falls } n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = 0$$

$$\psi(n_1 + 1, \ldots, n_k + 1, a) = \overline{\beta}(n_1, \ldots, n_k, a, \psi(n_1, u_1, \ldots, u_1), \ldots, \psi(n_1, u_l, \ldots, u_l) \\ ; \psi(n_1 + 1, n_2, u_1, \ldots, u_1), \psi(n_1 + 1, n_2 + 1, n_3, u_1, \ldots, u_1), \ldots, \\ , \psi(n_1 + 1, \ldots, n_{k-1} + 1, n_k, u_1)),$$

wobei für $i = 1, 2, \ldots, l$

$$u_i \geqq \mu_i(n_1, \ldots, n_k, a, \psi(n_1, u_1, \ldots, u_1), \ldots, \psi(n_1, u_{i-1}, \ldots, u_{i-1}))$$

gilt.

6. Nun werde ich in der Definition von ψ, in $\psi(n_1 + 1, \ldots, n_{k-1} + 1, n_k, u_1)$ das Argument n_k schrittweise zu 0 abbauen.

Nehmen wir an, daß für ein t (wobei $t+1 \leqq n_k$ ist) bereits primitiv-rekursive Funktionen $\beta_t, \tau_t, \sigma_{1t}, \ldots, \sigma_{lt}$ vorhanden sind, so daß

$$\begin{gathered}\psi(n_1+1, \ldots, n_k+1, a) = \beta_t(n_1, \ldots, n_k, a, \psi(n_1, u_1, \ldots, u_1), \ldots, \psi(n_1, u_l, \ldots, u_l);\\ ; \psi(n_1+1, n_2, u_1, \ldots, u_1), \ldots, \psi(n_1+1, \ldots, n_{k-2}+1, n_{k-1}, u_1, u_1),\\ , \psi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k - t, \tau_t(n_1, \ldots, n_k, a)))\end{gathered}$$

ist, falls für $i = 1, 2, \ldots, l$

$$u_i \geqq \sigma_{it}(n_1, \ldots, n_k, a, \psi(n_1, u_1, \ldots, u_1), \ldots, \psi(n_1, u_{i-1}, \ldots, u_{i-1}))$$

besteht. Dies gilt nämlich nach der eben aufgeschriebenen Definition von ψ für $s=0$, falls

$$\begin{gathered}\alpha_0(n_1, \ldots, n_k, a) = \bar{\alpha}(n_1, \ldots, n_k, a),\\ \beta_0(n_1, \ldots, n_k, a, b_1, \ldots, b_l;\ c_1, \ldots, c_{k-1}) = \bar{\beta}(n_1, \ldots, n_k, a, b_1, \ldots, b_l; c_1, \ldots, c_{k-1}),\\ \tau_0(n_1, \ldots, n_k, a) = \mu_1(n_1, \ldots, n_k, a)\end{gathered}$$

und für $i = 1, 2, \ldots, l$

$$\sigma_{i0}(n_1, \ldots, n_k, a, b_1, \ldots, b_{i-1}) = \mu_i(n_1, \ldots, n_k, a, b_1, \ldots, b_{i-1})$$

gesetzt wird. Dann werde ich zeigen, daß mit geeignetem β_{t+1}, τ_{t+1}, $\sigma_{1,\,t+1}, \ldots, \sigma_{l,\,t+1}$ hier t auch durch $t+1$ ersetzt werden kann.

Es gilt nämlich nach der zweiten Definitionsgleichung von ψ, falls darin $n_k - t$ für n_k+1, und in $\psi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k, u_1)$ für u_1 der zugelassene Wert $\mu_1(n_1, \ldots, n_k, a)$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned}&\psi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k - t, \tau_t(n_1, \ldots, n_k, a)) = \bar{\beta}(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k-(t+1),\\ &, \tau(n_1, \ldots, n_k, a), \psi(n_1, u_1, \ldots, u_1), \ldots, \psi(n_1, u_l, \ldots, u_l);\\ &; \psi(n_1+1, n_2, u_1, \ldots, u_1), \ldots, \psi(n_1+1, \ldots, n_{k-2}+1, n_{k-1}, u_1, u_1),\\ &, \psi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k-(t+1), \mu_1(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k-(t+1), \tau_t(n_1, \ldots, n_k, a)))),\end{aligned}$$

falls für $i = 1, 2, \ldots, l$

$$\begin{gathered}u_i \geqq \mu_i(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k-(t+1), \tau_t(n_1, \ldots, n_k, a),\\ , \psi(n_1, u_1, \ldots, u_1), \ldots, \psi(n_1, u_{i-1}, \ldots, u_{i-1}))\end{gathered}$$

ist. Wird daher

$$\begin{aligned}&\beta_{t+1}(n_1, \ldots, n_k, a, b_1, \ldots, b_l; c_1, \ldots, c_{k-1}) = \beta_t(n_1, \ldots, n_k, a, b_1, \ldots, b_l; c_1, \ldots, c_{k-2},\\ &\qquad , \bar{\beta}(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k-(t+1), \tau_t(n_1, \ldots, n_k, a), b_1, \ldots, b_l; c_1, \ldots, c_{k-1}))\end{aligned}$$

und

$$\tau_{t+1}(n_1, \ldots, n_k, a) = \mu_1(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k-(t+1), \tau_t(n_1, \ldots, n_k, a)),$$

ferner für $i = 1, 2, \ldots, l$

$$\begin{gathered}\sigma_{i,\,t+1}(n_1, \ldots, n_k, a, b_1, \ldots, b_{i-1}) = \sigma_{it}(n_1, \ldots, n_k, a, b_1, \ldots, b_{i-1}) +\\ + \mu_i(n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k-(t+1), \tau_t(n_1, \ldots, n_k, a), b_1, \ldots, b_{i-1})\end{gathered}$$

gesetzt, so gilt, falls für $i = 1, 2, \ldots, l$

$$u_i \geqq \sigma_{i,\,t+1}(n_1, \ldots, n_k, a, \psi(n_1, u_1, \ldots, u_1), \ldots, \psi(n_1, u_{i-1}, \ldots, u_{i-1}))$$

ist, tatsächlich auch

$$\psi(n_1+1,\ldots,n_k+1,a)=\beta_{t+1}(n_1,\ldots,n_k,a,\psi(n_1,u_1,\ldots,u_1),\ldots,\psi(n_1,u_l,\ldots,u_l);$$
$$;\psi(n_1+1,n_2,u_1,\ldots,u_1),\ldots,\psi(n_1+1,\ldots,n_{k-2}+1,n_{k-1},u_1,u_1),$$
$$,\psi(n_1+1,\ldots,n_{k-1}+1,n_k-(t+1),\tau_{t+1}(n_1,\ldots,n_k,a))),$$

solange $t+1\leqq n_k$ ist.

Die angegebenen Definitionsgleichungen für τ_0 und τ_{t+1}, dann für β_0 und β_{t+1}, endlich bei $i=1,2,\ldots,l$ für σ_{i0} und $\sigma_{i,t+1}$ bedeuten erst für τ_t, dann für β_t, σ_{it} einfache Rekursionen nach t, definieren also diese als primitiv-rekursive Funktionen, wobei der Index t zu den Argumenten dieser Funktionen zählt (es ist eben t die Rekursionsvariable).

7. Für $t=n_k$ ergibt sich

$$\psi(n_1+1,\ldots,n_k+1,a)=\beta_{n_k}(n_1,\ldots,n_k,a,\psi(n_1,u_1,\ldots,u_1),\ldots,\psi(n_1,u_l,\ldots,u_l);$$
$$;\psi(n_1+1,n_2,u_1,\ldots,u_1),\ldots,\psi(n_1+1,\ldots,n_{k-2}+1,n_{k-1},u_1,u_1),$$
$$,\psi(n_1+1,\ldots,n_{k-1}+1,0,\tau_{n_k}(n_1,\ldots,n_k,a)))=$$
$$=\beta_{n_k}(n_1,\ldots,n_k,a,\psi(n_1,u_1,\ldots,u_1),\ldots,\psi(n_1,u_l,\ldots,u_l);\psi(n_1+1,n_2,u_1,\ldots,u_1),\ldots,$$
$$,\psi(n_1+1,\ldots,n_{k-2}+1,n_{k-1},u_1,u_1),\overline{\alpha}(n_1+1,\ldots,n_{k-1}+1,0,\tau_{n_k}(n_1,\ldots,n_k,a)));$$

wird also

$$\beta^*(n_1,\ldots,n_k,a,b_1,\ldots,b_l,c_1,\ldots,c_{k-2})=$$
$$=\beta_{n_k}(n_1,\ldots,n_k,a,b_1,\ldots,b_l,c_1,\ldots,c_{k-2},\overline{\alpha}(n_1+1,\ldots,n_{k-1}+1,0,\tau_{n_k}(n_1,\ldots,n_k,a))),$$

ferner für $i=1,2,\ldots,l$

$$\sigma_i^*(n_1,\ldots,n_k,a,b_1,\ldots,b_{i-1})=\sigma_{in_k}(n_1,\ldots,n_k,a,b_1,\ldots,b_{i-1})$$

gesetzt, so sind β^*, σ_i^* primitiv-rekursive Funktionen, und es gilt

$$\psi(n_1+1,\ldots,n_k+1,a)=\beta^*(n_1,\ldots,n_k,a,\psi(n_1,u_1,\ldots,u_1),\ldots,\psi(n_1,u_l,\ldots,u_l);$$
$$;\psi(n_1+1,n_2,u_1,\ldots,u_1),\ldots,\psi(n_1+1,\ldots,n_{k-2}+1,n_{k-1},u_1,u_1)),$$

falls für $i=1,2,\ldots,l$

$$u_i\geqq\sigma_i^*(n_1,\ldots,n_k,a,\psi(n_1,u_1,\ldots,u_1),\ldots,\psi(n_1,u_{i-1},\ldots,u_{i-1}))$$

ist. Wird hier überall eben das Gleichheitszeichen angewandt, und die Definitionsgleichung für $n_1\cdot\ldots\cdot n_k=0$ noch einmal aufgeschrieben, so erhält man für ψ die Definition:

$$\psi(n_1,\ldots,n_k,a)=\overline{\alpha}(n_1,\ldots,n_k,a),\text{ falls } n_1\cdot\ldots\cdot n_k=0$$
$$\psi(n_1+1,\ldots,n_k+1,a)=\beta^*(n_1,\ldots,n_k,a,\psi(n_1,u_1,\ldots,u_1),\ldots,\psi(n_1,u_l,\ldots,u_l);$$
$$;\psi(n_1+1,n_2,u_1,\ldots,u_1),\ldots,\psi(n_1+1,\ldots,n_{k-2}+1,n_{k-1},u_1,u_1)),$$

wobei für $i=1,2,\ldots,l$

$$u_i=\sigma_i^*(n_1,\ldots,n_k,a,\psi(n_1,u_1,\ldots,u_1),\ldots,\psi(n_1,u_{i-1},\ldots,u_{i-1}))$$

ist.

Hier ist n_k keine Rekursionsvariable mehr; es hat bloß die Rolle eines Parameters, und läßt sich — wie bereits erwähnt wurde — mit a zu einem einzigen Parameter zusammenziehen. Wird das ausgeführt, so entsteht ψ durch Substitution aus einer primitiv-rekursiven Funktion, und aus einer k—1-rekursiven Funktion, welche durch eine k—1-fache Rekursion der Form (D) definiert wird. Nach der Induktionsannahme läßt sich aber eine k—1-fache Rekursion der Form (D) auf primitive Rekursionen und Substitutionen auflösen. Daher ist ψ primitiv-rekursiv.

Nach der Definition der Wertverlaufsfunktionen $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(k-1)}, \varphi^{(k)} = \psi$ gilt aber

$$\varphi(n_1, \ldots, n_k, a) = \exp_{n_2}(\exp_{n_3}(\ldots \exp_a(\psi(n_1, \ldots, n_k, a)) \ldots)),$$

und so ist samt ψ auch $\varphi(n_1, \ldots, n_k, a)$ eine primitiv-rekursive Funktion, wie behauptet wurde.

8. So hat es sich tatsächlich erwiesen, daß *falls in einer k-fachen Rekursion*

$$\varphi(n_1, \ldots, n_k, a) = \alpha(n_1, \ldots, n_k, a), \textit{ falls } n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = 0$$
$$\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1, a) = F(n_1, \ldots, n_k, a, \lambda x_1, \ldots, x_k[\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)], \ldots, \lambda x_1[\varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k, x_1)])$$

im „Substitutionsterm" F bloß Ausdrücke der Form $\varphi(n_1, x_1, \ldots, x_k)$ ineinandergeschachtelt vorkommen, φ eine primitiv-rekursive Funktion ist. Kommt eine einzige Einschachtelung z. B. zweier Ausdrücke der Form $\varphi(n_1+1, n_2, x_1, \ldots, x_{k-1})$ in F vor, so kann die betrachtete Rekursion aus der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen bereits hinausführen.

Die Definition der Ackermann—Péterschen nicht-primitiv-rekursiven Funktion

$$\psi(0, n) = n+1$$
$$\psi(m+1, 0) = \psi(m, 1)$$
$$\psi(m+1, n+1) = \psi(m, \psi(m+1, n))$$

ist nämlich zwar keine solche Rekursion, da hier die verschiedenartigen Ausdrücke $\psi(m, x)$ und $\psi(m+1, n)$ ineinandergeschachtelt auftreten; sie kann aber auf eine Rekursion der genannten Art zurückgeführt werden. Wird nämlich diese Definition — wie bereits in der Einleitung geschehen ist — als eine einfache Rekursion

$$\psi(0, n) = n+1$$
$$\psi(m+1, n) = \overbrace{\psi(m, \psi(m, \ldots, \psi}^{n+1\text{-mal}}(m, 1) \ldots))$$

mit variabler Anzahl von Einschachtelungen aufgefaßt, so kann auch darauf die Methode des § 1 angewandt werden. Sei

$$\tau(m, s) = \overbrace{\psi(m, \psi(m, \ldots, \psi}^{s\text{-mal}}(m, 1) \ldots)),$$

so ist

$$\tau(m,0)=1$$
$$\tau(m,s+1)=\psi(m,\tau(m,s)),$$

und $\psi(m,n)$ kann durch

$$\psi(0,n)=n+1$$
$$\psi(m+1,n)=\tau(m,n+1)$$

definiert werden. Um die simultanen Definitionen von ψ und τ zusammenzufassen, sei

$$\delta(m,2s,n)=\psi(m,n),$$
$$\delta(m,2s+1,n)=\tau(m,s).$$

Dann lautet die Definition von δ:

$$\delta(0,2s,n)=n+1$$
$$\delta(m+1,2s,n)=\delta(m,2n+3,n)$$
$$\delta(m,1,n)=1$$
$$\delta(m,2s+3,n)=\delta(m,2s+2,\delta(m,2s+1,n)).$$

Da $\delta(m,2s+3,n)$ nicht nur mit Hilfe von $\delta(m,2s+2,x)$, sondern auch mit Verwendung von $\delta(m,2s+1,n)$ ausgedrückt ist, ist das noch eine Wertverlaufsrekursion. Diese kann aber leicht auf eine gewöhnliche zweifache Rekursion zurückgeführt werden[8]); und auch nach Normierung der Anfangswerte[5]) gelangt man zur 2-rekursiven Definition einer Funktion δ^*, wobei in der Definition von $\delta^*(m+1,s+1,n)$ bloß eine einzige Einschachtelung zweier Ausdrücke $\delta^*(m+1,s,x)$ vorkommt. Diese Rekursion muß aber aus der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen hinausführen, da δ durch Substitutionen aus δ^* und aus primitiv-rekursiven Funktionen, und ψ z. B. durch die Substitution

$$\psi(m,n)=\delta(m,0,n)$$

entsteht; es wäre ja daher samt δ^* auch die ACKERMANN—PÉTERsche Funktion ψ primitiv-rekursiv.

(Eingegangen am 11. September 1952.)