Über das Dirichletsche Problem bezüglich der Kugel.

Von STEFAN FENYÖ in Budapest.

Es ist wohl bekannt, daß das DIRICHLETsche Problem mittels der Theorie der Integralgleichungen auf zweierlei Arten lösbar ist. Wird das gesuchte Potenzial als das Potenzial einer Doppelschicht gesucht, so gelangen wir zu einer linearen Integralgleichung zweiter Art. Wird aber die gesuchte Funktion als das Potenzial einer einfachen Belegung dargestellt, so erhalten wir eine singuläre FREDHOLMsche Integralgleichung erster Art. Im zweiten Falle ist die unbekannte Funktion die Oberflächendichte der Quellenstärke. Das Ziel unserer Arbeit ist zu untersuchen, welche Eigenschaften die an der Kugeloberfläche angegebebe Funktionen besitzen muß, damit das DIRICHLETsche Problem bezüglich der Kugel als Potenzial einer einfachen Belegung lösbar sei. Das entsprechende Problem in der Ebene bezüglich des Kreises wurde von E. EGERVÁRY in seiner Inauguraldissertation gelöst.[1])

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann natürlich vorausgesetzt werden, daß der Radius der Kugel die Einheit ist.

Ist die Oberflächendichte der Quellenstärke $\sigma(Q)$ einer einfachen Schicht, so ist bekanntlich das Potential dieser einfachen Belegung

$$V(P)=\frac{1}{2\pi}\int_{(\Gamma)}\frac{\sigma(Q)}{r_{PQ}}df_Q.$$

Mit Γ wird die Kugeloberfläche der Kugel K und mit r_{PQ} die Entfernung von P zu Q bezeichnet. Liegt P an der Kugeloberfläche, so sei

$$V(P)=F(P)$$

eine gegebene beliebige Funktion. Es ist nun die folgende Integralgleichung zu lösen

$$F(P)=\frac{1}{2\pi}\int_{(\Gamma)}\frac{\sigma(Q)}{r_{PQ}}df_Q. \tag{1}$$

In dieser Gleichung bedeutet der veränderliche Punk P einen Punkt der Oberfläche der Kugel K.

---

[1]) EGERVÁRY JENŐ: Az integrálegyenletek egy osztályáról. Mathematikai és Physikai Lapok. **23.** (1914), 304—310.

Die Gleichung (1) ist eine singuläre, und der Kern $1/r_{PQ}$ ist so beschaffen, daß sein Quadrat bezüglich der Kugeloberfläche nicht integrierbar ist; das heißt, daß die wohlbekannten Sätze der Theorie der Integralgleichungen ohne weiteres an die Gleichung (1) nich anwendbar sind. Trotz dessen kann man ein einfaches Kriterium zur Lösbarkeit von (1) aufstellen, und um dies zu zeigen, schicken wir einige Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Ist $\varphi(Q)$ eine beliebige, an der Kugeloberfläche definierte, im Riemannschem Sinne integrierbare und berchränkte Funktion, so ist*

$$\Phi(P)=\int_{(\Gamma)}\frac{\varphi(Q)}{r_{PQ}}df_Q$$

auch beschränkt.

Da $r_{PQ}\geqq 0$ und $|\varphi(Q)|\leqq M$, so ist

$$|\Phi(P)|\leqq M\int_{(\Gamma)}\frac{df_Q}{r_{PQ}}.$$

Da das Oberflächenintegral an der rechten Seite konvergent ist, ist die Behauptung richtig.

Hilfssatz 2. *Der zweite iterierte Kern von $1/r_{PQ}$ ist stetig, falls P und Q verschieden sind, d. h. die Funktion*

$$A_2(P,Q)=\int_{(\Gamma)}\frac{df_R}{r_{PR}\,r_{RQ}}$$

ist eine stetige, falls $P\neq Q$ ist.

Beweis. Es seien P_0 und Q_0 zwei verschiedene Punkte von K und es seien K_{P_0} und K_{Q_0} zwei Kugeln um P_0 bzw. Q_0 als Mittelpunkt mit dem Radius λ. Sei λ so klein, daß Q_0 ausserhalb von K_{P_0} falle. Der Teil von der Oberfläche von K der von K_{P_0} bzw. K_{Q_0} ausgeschnitten ist, sei Γ_{P_0} bzw Γ_{Q_0}. P sei ein beliebiger Punkt von Γ_{P_0} und Q ein Punkt von Γ_{Q_0} Dann ist

$$A_2(P,Q)=A_2^{(1)}(P,Q)+A_2^{(2)}(P,Q)+A_2^{(3)}(P,Q),$$

wobei

$$A_2^{(1)}=\int_{(\Gamma-\Gamma_{P_0}-\Gamma_{Q_0})}\frac{df_R}{r_{PR}r_{RQ}};\quad A_2^{(2)}=\int_{(\Gamma_{P_0})}\frac{df_R}{r_{PR}r_{RQ}};\quad A_2^{(3)}=\int_{(\Gamma_{Q_0})}\frac{df_R}{r_{PR}r_{PQ}}$$

ist.

Der Kern $1/r_{PR}$ ist an der Oberfläche $\Gamma-\Gamma_{P_0}-\Gamma_{Q_0}$ beschränkt und stetig bei beliebiger Wahl von λ, falls $P\in\Gamma_{P_0}+\Gamma_{Q_0}$ und $R\in\Gamma-\Gamma_{P_0}-\Gamma_{Q_0}$. Nun ist $A_2^{(1)}$ eben der zweite interierte Kern von $1/r_{PR}$ in diesem Bereich. Daraus folgern wir, daß $A_2^{(1)}(P,Q)$ auch beschränkt und stetig ist, wenn $P\in\Gamma_{P_0}$ und $Q\in\Gamma_{Q_0}$. Was $A_2^{(2)}$ anbelangt, so gilt offenbar

$$r_{RQ_0}\geqq r_{P_0Q_0}-2\lambda.$$

λ sei so gewählt, dass $\lambda < \frac{r_{P_0Q_0}}{3}$ sei, dann ist

$$r_{RQ_0} \geqq \frac{r_{P_0Q_0}}{3}.$$

Die Projektion von r_{P_0R} auf die Koordinatenebene XY sei r'_{P_0R} Dann ist

$$r_{P_0R} \geqq r'_{P_0R}.$$

Die Projektion von Γ_{P_0} auf XY sei Γ'_{P_0}, est is folgende Abschätzung gültig

$$A_2^{(2)}(P_0, Q_0) \leqq \int\limits_{(\Gamma_{P_0})} \frac{3 df_R}{r_{P_0R} r_{RQ_0}} \leqq \frac{3}{r_{P_0Q^0}} \int\limits_{(\Gamma_{P_0})} \frac{df_R}{r'_{P_0R}} = \frac{3}{r_{P_0Q_0}} \int\limits_{(\Gamma'_{P_0})} \frac{dx\,dy}{r'_{P_0R}\cos\psi}.$$

ψ ist der Winkel welchen die Achse Z mit der äußeren Normale von K im Punkte R einschließt. Das Integral an der rechten Seite bleibt offenbar unverändert bei einer solchen Drehung des Koordinatensystems, durch welche der Punkt P auf die Achse Z gelangt. Nach Einführung einer solchen Koordinatentransformation wird der Bereich Γ'_{P_0} ein Kreis, und das Integral an der rechten Seite muß bezüglich eines Kreises berechnet werden. Nach Einführung von Polarkoordinaten erhallten wir:

$$\text{(2)} \qquad A_2^{(2)}(P_0, Q_0) \leqq \frac{3}{r_{P_0Q_0}} \int\limits_0^{2\lambda} \int\limits_0^{\pi} \frac{r'_{RP_0}\, dr_{P_0R}\, d\varphi}{r'_{P_0R}\cos\psi} \leqq \frac{6\pi}{r_{P_0Q_0}\cos\psi_0}\lambda,$$

mit $\psi_0 = \max\psi$. $\left(\text{Ist } \lambda \text{ genügend klein, so ist natürlich } \psi_0 \leqq \frac{\pi}{2}.\right)$ Es seien nun P und Q zwei Punkte von Γ in der Nähe von P_0 bzw Q_0. Es sei $0 < \nu < \min(r_{P_0P}, r_{Q_0Q})$. K_P und K_Q seien zwei Kugeln um P bzw. Q als Mittelpunkt mit dem Radius ν. Der Teil von Γ, der von K_P bzw. K_Q ausgeschnitten ist, sei Γ_P bzw Γ_Q. Dann ist

$$A_2^{(2)}(P, Q) = \int\limits_{(\Gamma_{P_0})} \frac{df_R}{r_{PR} r_{RQ}} = \int\limits_{(\Gamma_{P_0} - \Gamma_P)} \frac{df_R}{r_{PR} r_{RQ}} + \int\limits_{(\Gamma_P)} \frac{df_R}{r_{PR} r_{RQ}}.$$

Es gilt folgende Abschätzung im Bereiche $\Gamma_{P_0} - \Gamma_P$:

$$\frac{1}{r_{RP} r_{RQ}} \leqq \frac{1}{(r_{P_0Q_0} - 2\lambda)\nu},$$

und deshalb ist

$$\int\limits_{(\Gamma_{P_0} - \Gamma_P)} \frac{df_R}{r_{PR} r_{RQ}} \leqq \frac{1}{(r_{P_0Q_0} - 2\lambda)\nu} \int\limits_{(\Gamma_{P_0} - \Gamma_P)} df < \frac{1}{(r_{P_0Q_0} - 2\lambda)\nu} \int\limits_{(\Gamma_{P_0})} df <$$

$$< \frac{\pi}{(r_{P_0Q_0} - 2\lambda)\nu} \lambda^2.$$

Es sei $3\nu = \lambda$ und die Entfernungen r_{P_0P} und r_{Q_0Q} seien schon so klein, daß die Bereiche Γ_P bzw. Γ_Q in Γ_{P_0} bzw. Γ_{Q_0} enthalten seien. Dann ist folgende Relation gültig:

$$\int\limits_{(\Gamma_{P_0}-\Gamma_P)} \frac{df_R}{r_{PR} r_{RQ}} \leqq \frac{9\pi}{r_{P_0Q_0} - 6\nu}\,\nu.$$

Gemäß (2) haben wir die Ungleichung

$$\int\limits_{(\Gamma_P)} \frac{df_R}{r_{PR} r_{RQ}} \leqq \frac{6\pi}{r_{PQ}\cos\psi_0}\,\nu \leqq \frac{6\pi}{(r_{P_0Q_0} - 2\lambda)\cos\psi_0}\,\nu = \frac{6\pi}{(r_{P_0Q_0} - 6\nu)\cos\psi_0}\,\nu.$$

Durch Addition der soeben erhaltenen zwei Ungleichungen können wir behaupten, daß

$$A_2^{(2)}(P, Q) \leqq \frac{3\pi}{r_{P_0Q_0} - 6\nu}\left(3 + \frac{2}{\cos\psi_0}\right)\nu$$

ist. Dieselbe Abschätzung gilt für $A_2^{(3)}$; es ist also

$$A_2^{(3)}(P, Q) \leqq \frac{3\pi}{r_{P_0Q_0} - 6\nu}\left(3 + \frac{2}{\cos\psi_0}\right)\nu.$$

Wir sind nun berechtigt

$$A_2^{(2)}(P, Q) + A_2^{(3)}(P, Q) \leqq \frac{6\pi}{r_{P_0Q_0} - 6\nu}\left(3 + \frac{2}{\cos\psi_0}\right)\nu$$

zu behaupten. Es sei ε eine beliebige positive Zahl, und r_{PP_0}, r_{QQ_0} seien schon so klein, daß die folgende Ungleichungen richtig sind:

$$\frac{6\pi}{r_{P_0Q_0} - 6\nu}\left(3 + \frac{2}{\cos\psi_0}\right)\nu < \varepsilon; \quad \frac{36\pi}{r_{P_0Q_0}\cos\psi_0}\,\nu < \varepsilon$$
$$|A_2^{(1)}(P, Q) - A_2^{(1)}(P_0, Q_0)| < \varepsilon.$$

Dann ist aber

$$|A_2(P, Q) - A_2(P_0 Q_0)| < |A_2^{(1)}(P, Q) - A_2^{(1)}(P_0, Q_0)| + |A_2^{(2)}(P, Q) + A_2^{(3)}(P, Q)| + \\ + |A_2^{(2)}(P_0, Q_0) + A_2^{(3)}(P_0, Q_0)| < 3\varepsilon.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Hilfssatz 3. *Es gilt gleichmäßig auf der Kugeloberfläche Γ die Abschätzung*

$$A_2(P, Q) \leqq \alpha \log \frac{\beta}{r_{PQ}},$$

wobei α und β positive, von der Lage von P und Q unabhähige Konstanten sind.

Beweis. Es sei zuerst der Fall betrachtet, wenn P und Q genügend nahe zueinander liegen. K_Q sei wieder eine Kugel mit dem Mittelpunkt Q und Radius λ, der Schnitt von K_Q mit der Oberfläche von K sei mit Γ_Q bezeichnet. λ sei so gewählt, daß auch der Punkt P im Bereich Γ_Q liegt.

Es gilt

$$(3) \qquad A_2(P,Q) = \int\limits_{(\Gamma_R)} \frac{df_R}{r_{PR} r_{RQ}} + \int\limits_{(\Gamma-\Gamma_Q)} \frac{df_R}{r_{PR} r_{RQ}}.$$

Ohne Änderung dieser Integrale kann das Koordinatensystem so gewählt werden, das Q an der Z-Achse liegt. Dann ist die Projektion von Γ_Q ein, durch Γ'_Q bezeichneter Kreis. Die Projektion von r_{PR} bzw. r_{RQ} seien ferner durch r'_{PR} bzw. r'_{RQ} bezeichnet. Nun haben wir die Relation

$$\int\limits_{(\Gamma_Q)} \frac{df_R}{r_{PR} r_{RQ}} \leqq \int\limits_{(\Gamma_Q)} \frac{df_R}{r'_{PR} r'_{RQ}} = \iint\limits_{(\Gamma_Q')} \frac{dx\,dy}{r'_{PR} r'_{RQ} \cos\psi}.$$

Je näher P zu Q liegt, desto kleiner kann λ gewählt werden. Sei P schon so nahe zu Q, daß $\max\psi < \frac{\pi}{2}$ sei. Dann ist $\max\frac{1}{\cos\psi} < M$ eine endliche, von der Lage der Punkte P, Q und R unabhängige Konstante. Wir dürfen also schreiben

$$\int\limits_{(\Gamma_Q)} \frac{df}{r_{PR} r_{RQ}} \leqq M \iint\limits_{(\Gamma_Q')} \frac{dx\,dy}{r'_{PR} r'_{RQ}}.$$

Lassen wir nun P so nahe zu Q rücken, daß $r_{PQ} < \frac{\lambda}{2}$ sei. Der Kreisbereich Γ'_Q sei durch einen konzentrischen Kreis mit dem Radius $2r'_{PQ}$ in zwei Teile zerlegt. Der innere Kreisbereich sei durch Γ''_Q bezeichnet. Es gilt

$$\iint\limits_{(\Gamma_Q')} \frac{dx\,dy}{r'_{PR} r'_{RQ}} = \iint\limits_{(\Gamma_Q'')} \frac{dx\,dy}{r'_{PQ} r'_{RQ}} + \iint\limits_{(\Gamma_Q'-\Gamma_Q'')} \frac{dx\,dy}{r'_{PR} r'_{RQ}}.$$

Im ersten Integral an der rechten Seite bleibt der Integrand ungeändert bei jeder Veränderlichentransformation, welche die Proportion der Abstände ungeändert läßt. Der Integrationsbereich wird natürlich geändert, doch bleibt er immer ein Kreis mit dem Radius $2r'_{PQ}$. Daraus folgt, daß

$$\iint\limits_{(\Gamma_Q'')} \frac{dx\,dy}{r'_{PR} r'_{RQ}} = a_1$$

eine, von r_{PQ} unabhängige Konstante ist.

Bei der Berechnung des zweiten Integrals sei beachtet, daß die Projection R' von R in den Kreisbereich $\Gamma'_Q - \Gamma''_Q$ fällt. Dann gelten die Ungleichungen

$$r'_{RQ} > 2r'_{PQ},$$

$$r'_{PR} \geqq r'_{RQ} - r'_{PQ} > 2r'_{PQ} - r'_{PQ} = r'_{PQ} > \frac{r'_{PQ}}{2},$$

und

$$\iint\limits_{(\Gamma_Q'-\Gamma_Q'')} \frac{dx\,dy}{r'_{PR}\,r'_{RQ}} \leqq 2 \iint\limits_{(\Gamma_Q'-\Gamma_Q'')} \frac{dx\,dy}{r'^2_{RQ}} = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\lambda} \frac{dr'_{rQ}\,d\varphi}{r'_{RQ}} = 4\pi \log \frac{\lambda}{2r'_{PQ}}.$$

Was das zweite Integral an der rechten Seite von (3) anbelangt, bemerken wir, daß im Bereiche $\Gamma - \Gamma_Q$ $r_{PR} > 0$ und $r_{RQ} > 0$ ist, d. h. der Integrand ist eine beschränkte und stetige Funktion, wenn der Punkt P in der Kugel K_Q ist. Deshalb sind wir berechtigt zu schreiben:

$$\int\limits_{(\Gamma-\Gamma_Q)} \frac{df_R}{r_{PR}\,r_{RQ}} < \alpha_2.$$

Die Konstante α_2 ist eine positive und unabhängig von der Lage von P und Q $(P \in K_Q)$. Die bisherigen Erbebnisse können wir in die folgende Ungleichung zusammensassen:

$$A_2(P, Q) < \alpha_1 + \alpha_2 + 4\pi \log \frac{\lambda}{2r'_{PQ}} = \xi + \eta \log \frac{c}{r'_{PQ}}.$$

Es sei noch beachtet, daß

$$r'_{PQ} = r_{PQ} \cos \psi \geqq r_{PQ} \cos \psi^*.$$

Hier ist $\psi^* = \max \psi$. Also wird die vorige Ungleichung in die Form

$$A_2(P, Q) \leqq \xi + \eta \log \frac{D}{r_{PQ}}$$

geschrieben. Dieses Ergebnis ist gültig, falls $r_{PQ} < \frac{\lambda}{2}$. Da aber $A_2(P, Q)$ beschränkt und setig ist, wenn $r_{PQ} > \frac{\lambda}{2}$ ist, können die Konstanten α und β so gewählt werden, das

$$A_2(P, Q) < \alpha \log \frac{\beta}{r_{PQ}}$$

gleichmäßig an der Kugeloberfläche Γ gilt.

Hilfssatz 4. *Sind $U(P, Q)$ und $V(P, Q)$ zwei an der Kugeloberfläche Γ definierte Funktionen so beschaffen, daß sie bloß von der Größe des Winkels POQ abhängen (O ist der Mittelpunkt von K), dann ist die Funktion*

$$W(P, Q) = \int\limits_{(\Gamma)} U(P, R)\, V(R, Q)\, df_R$$

auch so beschaffen, daß sie bloß vom Winkel POQ abhängt.

Beweis. Es bedeutet gewiß keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir voraussetzen, daß O zugleich der Mittelpunkt des Koordinaatensystems ist, und der Punkt P an der Z-Achse liegt. Werden die räumlichen Polarkoordinaten der Punkte R, Q mit (ϑ', φ') bzw. (ϑ'', φ'') bezeichnet, so bedeutet die Forderung über die Beschaffenheit von U und V, das U bloß von

$\cos\vartheta'$ und V bloß von

$$\cos\gamma = \cos\vartheta'\cos\vartheta'' + \sin\vartheta'\sin\vartheta''\cos(\varphi'-\varphi'')$$

abhängt. Dadurch wird das betrachtete Integral die Folgende Form annehmen:

$$W = \int\limits_{\varphi'=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta'=0}^{\pi} U(\cos\vartheta')V(\cos\vartheta'\cos\vartheta'' + \\ + \sin\vartheta'\sin\vartheta''\cos(\varphi'-\varphi''))\sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi'.$$

Da aber die Funktion V eine periodische Funktion von φ' ist, und sie nach φ' auf eine volle Periode integriert wird, ist das Integral von φ'' unabhängig. W hängt nur von ϑ'' ab, und eben diese Aussage enthält unsere Behauptung.

Hilfssatz 5. *Seien $U(P, Q)$ und $V(P, Q)$ zwei an der Kugeloberfläche definierte symmetrische (d. h. $U(P, Q) = U(Q, P)$) Funktionen so beschaffen, daß sie bloß vom Abstand der Punkte P und Q abhängen; setzen wir ferner $POQ\sphericalangle = \gamma$, $U(P, Q) = U(\cos\gamma)$, $V(P, Q) = V(\cos\gamma)$,*

$$\int\limits_{-1}^{+1} U(\xi)P_n(\xi)d\xi = \alpha_n \quad \text{und} \quad \int\limits_{-1}^{+1} V(\xi)P_n(\xi)d\xi = \beta_n,$$

$$W(P, Q) = W(\cos\gamma) = \int\limits_{(\Gamma)} U(P, R)V(R, Q)df_R.$$

Dann gilt

$$\int\limits_{-1}^{+1} W(\xi)P_n(\xi)d\xi = \alpha_n\beta_n,$$

wobei $P_n(\xi)$ das Legendresche Polynom n-ten Grades bedeutet.

Beweis. Einfachheitshalber sei

$$P_n(\cos POQ\sphericalangle) = P_n(PQ).$$

Es seien die orthogonalen und normierten Kugeloberflächenfunktionen n-ten Grades

$$S_{n,k}(P). \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n+1;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die normierten Eigenfunktionen von $V(P, Q)$ sind $S_{n,k}$. Anderseits ist[2])

$$P_n(PQ) = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} S_{n,k}(P)S_{n,k}(Q).$$

Wir haben also

$$\int\limits_{(\Gamma)} P_n(TP)V(P, Q)df_P = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} S_{n,k}(T)\int\limits_{(\Gamma)} S_{n,k}(P)V(P, Q)df_P =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n}\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} S_{n,k}(T)S_{n,k}(Q) = \frac{1}{\lambda_n}P_n(TQ);$$

[2]) St. Fenyö: Über eine Klasse von Integralgleichungen. *Publ. Math.* (Debrecen) **2**, (1952), 248—251.

insbesonderes, falls $T \equiv Q$ ist,

$$\int\limits_{(\Gamma)} P_n(QP)\,V(PQ)\,df_P = \frac{1}{\lambda_n} P_n(QQ) = \frac{1}{\lambda_n} P_n(1) = \frac{1}{\lambda_n}.$$

Andererseits ist

$$\int\limits_{(\Gamma)} P_n(QP)\,V(P,Q)\,df_P = 2\pi \int\limits_{-1}^{+1} V(\xi) P_n(\xi)\,d\xi = 2\pi\beta_n \quad (\cos QOP\sphericalangle = \xi)$$

und

$$2\pi\beta_n = \frac{1}{\lambda_n}.$$

Folglich gilt

$$\int\limits_{-1}^{+1} W(\xi) P_n(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{(\Gamma)} \int\limits_{(\Gamma)} U(P,R)\,V(R,Q) P_n(PQ)\,df_R\,df_Q =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\Gamma} U(P,R) df_R \int\limits_{(\Gamma)} V(R,Q) P_n(PQ)\,df_Q =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 \lambda_n} \int\limits_{(\Gamma)} U(P,R) P_n(RP) df_R = \frac{\alpha_n}{\lambda_n} = \alpha_n \beta_n.$$

Nun kehren wir zu unserem Problem zurück.

Der Kern unserer Integralgleichung (2) ist $1/r_{PQ}$, und hängt bloß vom Winkel $POQ = \gamma$ ab. Gemäß Hilfssatz 4 ist $A_2(P, Q)$ auch nur von γ abhängig, oder, was dasselbe ist, da A_2 in P und Q symmetrisch ist, es ist bloß die Funktion von $\cos\gamma$. Die im Hilfssatz 3 bewiesene Ungleichung besagt aber, daß

$$A_2(P, Q) = A_2(\cos\gamma) = A_2(\xi)$$

eine samt ihrem Quadrat integrierbare Funktion ist. Daraus folgt, daß das Eigenfunktionsystem vom Kern $A_2(P, Q)$ aus den orthogonalisierten und normierten Kugelflächenfunktionen $S_{n,1}, S_{n,2}, \ldots, S_{n,2n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ besteht.[2]) Die Funktionen $S_{n,k}$ sind an der Kugeloberfläche beschänkt. Nun folgt nach Hilfssatz 1, daß

$$\sigma(P) = \int\limits_{(\Gamma)} \frac{S_{n,k}(Q)}{r_{PQ}}\,df_Q$$

beschränkt ist. Multiplizieren wir diese letzte Gleichung mit $1/r_{TP}$, und integrieren wir, dann erhalten wir:

$$\int\limits_{(\Gamma)} \frac{\sigma(P)}{r_{TP}}\,df_P = \int\limits_{(\Gamma)} \int\limits_{(\Gamma)} \frac{S_{n,k}(Q)}{r_{TP}\,r_{PQ}}\,df_P\,df_Q = \frac{1}{\mu_n} S_{n,k}(T).$$

wobei μ_n den zur Eigenfunktion $S_{n,k}$ gehörigen Eigenwert von $A_2(T, Q)$

bedeutet. Die Gleichung

$$S_{n,k}(T) = \mu_n \int \frac{\sigma(P)}{r_{TP}} df_P$$

sei wieder mit $1/r_{RT}$ multipliziert und integriert; dann erhalten wir

$$\sigma(R) = \int\limits_{(\Gamma)} \frac{S_{n,k}(T)}{r_{RT}} df_T = \mu_n \int\limits_{(\Gamma)} \int\limits_{(\Gamma)} \frac{\sigma(P)}{r_{RT}\, r_{TP}} df_T\, df_P = \mu_n \int\limits_{(\Gamma)} A_2(R, P)\sigma(P)\, df_P.$$

Das besagt, daß zu μ_n außer den Funktionen $S_{n,k}$ auch die Funktion σ als Eigenfunktion gehört. Dieses is aber nur möglich, wenn

$$\sigma(P) = \sum_{i=1}^{2n+1} a_i S_{n,i}(P)$$

ist. Das bedeutet eben, daß die Eigenfunktionen von $A(P, Q)$ Linearkombinationen von $S_{n,k}$ sind. Da aber die $S_{n,k}$ ein orthogonales und normiertes System bilden, können als Eigenfunktionen von $1/r_{PQ}$ die Funktionen $S_{n,k}$ betrachtet werden.

Die Eigenwerte von $A_2(P. Q)$ sind[3])

$$\mu_n = \frac{2n+1}{4\pi \int\limits_{-1}^{+1} A_2(\xi) P_n(\xi)\, d\xi}.$$

Daher folgt, daß die, nach den Funktionen P_n gebildeten Fourierkoeffizienten von $A_2(P, Q) = A_2(\xi)$ gebildet werden müssen.

Es ist bekannt, daß

$$\int\limits_{-1}^{+1} A(\xi) P_n(\xi)\, d\xi = \frac{2}{2n+1}$$

ist.[4]) Nun ist nach Hilfssatz 5

$$\int\limits_{-1}^{+1} A_2(\xi) P_n(\xi)\, d\xi = \frac{4}{(2n+1)^2}.$$

Daraus folgt, daß die Eigenwerte von A_2 die Zahlen

$$\mu_n = \frac{(2n+1)^3}{16\pi}$$

sind.

Was die Integralgleichung (1) anbelangt, sei diese mit $1/r_{TP}$ multipliziert und integriert, dann besteht die folgende Gleichung

$$(1') \qquad \Phi(T) = \int\limits_{(\Gamma)} \frac{F(P)}{r_{TP}} df_P = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(\Gamma)} A_2(T, Q)\sigma(Q)\, df_Q.$$

---

[3]) St. Fenyő: l. cit. p. 249.

[4]) Das folgt unmittelbar aus der Herstellung der Polynome P_n mittels der Generatorfunktion.

Ist $F(P)$ eine beschränkte bekannte Funktion, so ist auch $\Phi(T)$ eine solche. Da aber der Kern A_2 samt ihrem Quadrat integrierbar ist, kann die Theorie der linearen Integralgleichungen angewandt werden. Die Gleichung (1′) ist eine lineare Gleichung erster Art, und das Eigenfunktionsystem von Kern A_2 ist vollständig. Nun ist nach dem klassischen PICARDschen Satz Die Gleichung (1′) lösbar, falls die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^6\sum_{k=1}^{2n+1}a_{n,k}^2$$

konvergent ist. Die $a_{n,k}$ bedeuten die Fourierkoeffizienten von $\Phi(T)$ nach den Eigenfunktionen von A_2. Es ist aber

$$a_{n,k}=\int_{(\Gamma)}\Phi(T)\,S_{n,k}(T)\,df_T=\int_{(\Gamma)}\int_{(\Gamma)}\frac{F(P)}{r_{TP}}S_{n,k}(T)\,df_T\,df_P=$$
$$=\frac{4\sqrt{\pi}}{(2n+1)^{3/2}}\int_{(\Gamma)}F(P)\,S_{n,k}(P)\,df_P=\frac{4\sqrt{\pi}}{(2n+1)^{3/2}}\,b_{n,k}.$$

$b_{n,k}$ ist der Fourierkoeffizient im vorigen Sinne von $F(P)$. Hier ist die wohlbekannte Tatsache benutzt, daß, wenn die Eigenwerte von A_2 die Zahlen μ_n sind dann. $\sqrt{\mu_n}$ die Eigenwerte von A sind. Wir können also behaupten, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^3\sum_{k=1}^{2n+1}b_{n,k}^2$$

konvergieren muss. Damit haben wir bewiesen den folgenden

Satz. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Dirichletsche Problem bezüglich der Kugel als das Potential einer einfachen Belegung lösbar sei, besteht darin, daß die Fourierkoeffizienten $b_{n,k}$ der an der Kugeloberfläche gegebene Funktion bezüglich des Systems der orthogonalen und normierten Kugeloberflächenfunktionen $S_{n,k}(\vartheta,\varphi)$ $(k=1,2,\dots,2n+1;$ $n=0,1,2,\dots)$ so beschaffen seien, daß die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^3\sum_{k=1}^{2n+1}b_{n,k}^2$$

konvergiert. Die Lösung ist durch folgende unendliche Reihe bestimmt:

$$\sigma(P)\sim\frac{1}{16\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{3/2}\sum_{k=1}^{2n+1}b_{n,k}\,S_{n,k}(P).$$

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß das analoge Problem bezüglich der n-dimensionalen Kugel ganz in derselben Weise gelöst werden kann. Dann treten statt den LEGENDREschen Polynomen die GEGENBAUERsche Funktionen, und statt den Kugeloberflächenfunktionen die n-dimensionalen Kugeloberflächenfunktionen ein.

(Eingegangen am 15. September 1952.)