Bemerkung zu einem Satz von O. Ore.

Von J. SZÉP in Szeged.

O. ORE hat folgenden Satz bewiesen: *Hat eine endliche Gruppe G eine eigentliche Untergruppe H, welche mit sämtlichen Untergruppen von G vertauschbar ist, so ist G nichteinfach*[1]. Im Beweis ist nur die folgende Bedingung benutzt: H ist mit ihren sämtlichen Konjugierten vertauschbar.

Dieser Satz ist offenbar eine neue Charakterisierung der endlichen nichteinfachen Gruppen.

Ich werde hier zeigen, daß die Nichteinfachheit auch unter anderen ähnlichen Bedingungen gesichert ist. Es gilt nämlich der folgende

Satz. *Die endliche Gruppe G ist dann und nur dann nichteinfach, wenn sie eine eigentliche Untergruppe H mit den folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. *H ist vertauschbar mit sämtlichen Konjugierten (in G) einer Gruppe K, wobei K eine p-Sylowgruppe von H bedeutet.*

2. *H ist vertauschbar mit einer anderen (eigentlichen) Untergruppe L von G und mit ihren Konjugierten in G, wobei die Ordnung von L durch p nicht teilbar ist.*

Beweis. Offenbar genügt es zu zeigen, daß die im Satz angegebenen Bedingungen für die Nichteinfachheit von G hinreichend sind.

Den Beweis führen wir in zwei Schritten.

a) Ist K eine p-Sylowgruppe auch von G, so sieht man die Richtigkeit unserer Behauptung folgendermaßen ein. Da die sämtlichen p-Sylowgruppen von G eine normale Untergruppe von G erzeugen, genügt es zu zeigen, daß die p-Sylowgruppen von G mit denen von H übereinstimmen. Hätte G nun eine p-Sylowgruppe P, die nicht in H enthalten ist, so ist nach der Annahme $HP=PH(\neq H)$ eine Untergruppe von G, deren Ordnung die Primzahl p zur höheren Potenz enthält, als die von P. Damit ist unsere Behauptung in diesem Falle richtig.

[1] O. ORE, Contributions to the theory of groups of finite order. *Duke Math. J.* 5 (1939), 431—460. (Theorem 16.)

b) Ist K keine p-Sylowgruppe von G, dann bezeichne $L, L', L'', \ldots$ ein volles System von Untergruppen in G, die mit L konjugiert sind. Wegen der Annahme sind $HL, HL', HL'', \ldots$ lauter Untergruppen von G, und K ist eine gemeinsame Sylowgruppe der Gruppen $HL, HL', \ldots$. Folglich enthalten diese Gruppen [nach *a*)] sämtlich eine gemeinsame normale Untergruppe M, wobei M die mit K und ihren Konjugierten erzeugte Untergruppe in H bezeichnet. Wäre nun G einfach, so würde G durch die Gruppen $L, L', L'', \ldots$, also noch mehr durch die Gruppen $HL, HL', \ldots$ erzeugt, was ein Widerspruch ist, da M offenbar eine normale Untergruppe von G wäre. Damit ist der Satz bewiesen.

(Eingegangen am 11. Oktober, 1952.)