Über additive Funktionale k-dimensionaler Eipolyeder.

Von H. HADWIGER in Bern.

§ 1. Additive Funktionale.

Wir betrachten konvexe Polyeder (Eipolyeder) $P, Q, \ldots$ des k-dim. euklidischen Raumes R_k. Diese sollen stets abgeschlossen sein. Mit $P+Q$ wollen wir ein Eipolyeder bezeichnen, das durch ein $(k-1)$-dim. Schnitteipolyeder PQ in die beiden Teileipolyeder P und Q zerlegt ist.

Eine über der Mannigfaltigkeit aller Eipolyeder P des Raumes R_k definierte Funktion $\varphi(P)$ heißt *additives Funktional*, wenn

$$\varphi(P)+\varphi(Q)=\varphi(P+Q)+\varphi(PQ) \tag{1}$$

bezüglich einer Zerlegung, wie sie oben beschrieben ist, gilt.

Wir sprechen dagegen von einem *einfach-additiven Funktional*, wenn sogar die Beziehung

$$\varphi(P)+\varphi(Q)=\varphi(P+Q) \tag{2}$$

besteht.

Wir wollen besonders hervorheben, daß keine Invarianzeigenschaft der Funktionale verlangt wird, so daß sich $\varphi(P)$ bei Bewegung von P im Raum i. a. ändert [1]).

Die einfach- additiven Funktionale lassen sich charakterisieren als diejenigen additiven Funktionale, welche für uneigentliche Eipolyeder, deren Dimension also kleiner als k ist, verschwinden.

Beispiele additiver Funktionale sind: 1. Das triviale konstante Funktional $\varphi(P)=1$ (EULERS Charakteristik). 2. Die Oberfläche von P. 3. Der räumliche Sichtwinkel unter welchem P von einem festen Pol aus erscheint. 4. Die Anzahl der Geraden, welche von P in einem Geradengitter getroffen werden. 5. Die Anzahl der von P bedeckten Gitterpunkte eines Punktgitters.

---

[1]) Funktionale mit Invarianzeigenschaften hat Verf. schon verschiedentlich untersucht. Vgl. insb. für den Fall $k=2$ den Aufsatz: Über beschränkte additive Funktionale konvexer Polygone, *Publ. Math.* (Debrecen) **1** (1949), 104—108.

Als Beispiele einfach-additiver Funktionale erwähnen wir: 1. Das Volumen von P. 2. Das polare Trägheitsmoment von P bezüglich eines festen Poles.

Diese Aufzählung ziemlich willkürlich ausgewählter Beispiele soll andeuten, daß die lineare Mannigfaltigkeit der additiven bzw. auch der einfach-additiven Eipolyederfunktionale außerordentlich reichhaltig ist.

Nach dem Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit wird es trotzdem möglich sein, diese Mannigfaltigkeiten vollständig zu charakterisieren, so daß das allgemeinste additive Eipolyederfunktional durch eine gewisse Anzahl von Funktionen mehrerer Veränderlichen dargestellt werden kann.

§ 2. Höhere relative Kantenkrümmungen.

Es sei $0 \leqq i \leqq k-1$ und es bezeichne P_i eine i-dim. Kante (i-dim. Randeipolyeder) des Eipolyeders P.

Man denke sich nun in einem „inneren" Punkt Z von P_i den auf dem i-dim. Trägerraum R_i von P_i orthogonal stehenden komplementären $(k-i)$-dim. Raum R_{k-i} errichtet. Die in Z nach außen gerichteten Normalen des Eipolyeders P bilden einen im R_{k-1} liegenden $(k-i)$-dim. Kegel. Dieser schneidet aus einer um Z gelegten $(k-i-1)$-dim. Einheitssphäre ein sphärisches Polyeder aus; es handelt sich um das Normalenbild im Kantenpunkt Z.

Es bezeichne jetzt $\Omega_i(P, P_i)$ das $(k-i-1)$-dim. sphärische Volumen des der Kante P_i wie oben zugeordneten Normalenbildes. Bedeutet noch Ω_i das gesamte Volumen der $(k-i-1)$-dim. Einheitssphäre, so definieren wir die i-te *relative Kantenkrümmung* der i-dim. Kante P_i von P durch den Ansatz

(3) $$\omega_i(P, P_i) = \frac{\Omega_i(P, P_i)}{\Omega_i}.$$

Besonders zu erwähnen sind die Sonderfälle $i = 0$ und $i = k-1$. Eine 0-dim. Kante P_0 ist ein Eckpunkt von P, und $\omega_0(P, P_0)$ kann entsprechend auch als *relative Eckenkrümmung* in P_0 bezeichnet werden. Offensichtlich gilt die Summenrelation

(4) $$\sum \omega_0(P, P_0) = 1,$$

wobei sich die Summation über sämtliche Eckpunkte von P zu erstrecken hat.

Eine $(k-1)$-dim. Kante P_{k-1} von P ist eine Seitenfläche (Seite) von P. Sinngemäß kann $\omega_{k-1}(P, P_{k-1})$ als *relative Seitenkrümmung* bezeichnet werden. Man beachte hier, daß das Normalenbild einer Seite die 0-dim. Halbsphäre vom 0-dim. Volumen 1 ist; dagegen ist $\Omega_{k-1} = 2$. Für die relative Seitenkrümmung ergibt sich so der stets sich gleich bleibende Wert

(5) $$\omega_{k-1}(P, P_{k-1}) = \frac{1}{2}.$$

§ 3. Basisfunktionale.

Es sei $1 \leqq i \leqq k$ und es bezeichne $\Phi_i(P)$ ein Funktional, das für alle i-dim. Eipolyeder des Raumes R_k so definiert ist, daß innerhalb eines i-dim. Teilraumes R_i des R_k ein einfach-additives Funktional gegeben ist.

Es gelte demnach

$$\Phi_i(P) + \Phi_i(Q) = \Phi_i(P+Q), \tag{6}$$

vorausgesetzt, daß die beiden Eipolyeder P und Q in ein und demselben R_i liegen, und sich dort zu dem Eipolyeder $P+Q$ zusammenfügen.

Die Skala der so für $i = 1, 2, \ldots, k$ erklärten einfach-additiven Funktionale ergänzen wir noch durch ein Funktional $\Phi_0(P)$, das für alle Punkte des Raumes R_k definiert ist, wobei aber eine zusätzliche Bedingung (6) wegfällt. (Im 0-dim. Raum wird der Begriff des additiven Funktionals gegenstandslos!)

Es sei nunmehr P wieder ein beliebiges Eipolyeder des R_k. Wir setzen jetzt

$$\chi_i(P) = \sum{}' \omega_i(P, P_i)\, \Phi_i(P_i) \qquad [i = 0, 1, \ldots, k-1], \tag{7}$$

wobei sich die Summation über alle i-dim. Kanten P_i von P zu erstrecken hat; diese Vorschrift soll hier und im folgenden durch den beim Summenzeichen angebrachten Beistrich in Erinnerung gerufen werden. Wir ergänzen noch durch

$$\chi_k(P) = \Phi_k(P). \tag{8}$$

Mit (7) und (8) haben wir nun $k+1$ Eipolyederfunktionale eingeführt, die, wie man leicht nachprüft, alle additiv sind. Das mit (8) angesetzte Funktional ist sogar einfach-additiv.

Eipolyederfunktionale, die sich auf die durch Ansatz (7) und (8) gegebene Weise mit Hilfe der höheren relativen Kantenkrümmungen und vorgegebener einfach-additiver Funktionale $\Phi_i(P)$ der i-dim. Unterräume R_i von R_k darstellen lassen, wollen wir *Basisfunktionale* nennen.

Diese Bezeichnungsweise rechtfertigt sich mit dem Hauptresultat des nächsten Abschnitts, wonach jedes additive Eipolyederfunktional durch Superposition geeigneter Basisfunktionale erzeugt werden kann.

§ 4. Darstellung durch Basisfunktionale.

Es sei $\varphi(P)$ ein beliebiges additives Eipolyederfunktional. Wir zeigen: Es gibt Basisfunktionale $\chi_i(P)$ $[i = 0, 1, \ldots, k]$, die sich nach den Ansätzen (7) und (8) bilden lassen, so daß die Darstellung

$$\varphi(P) = \sum_0^k \chi_i(P) \tag{9}$$

gilt.

Die grundsätzliche Bedeutung dieser Entwicklungsmöglichkeit besteht darin, additive Funktionale auf einfach-additive Funktionale zurückzuführen

Wir beweisen jetzt die Richtigkeit von (9). Zunächst konstruieren wir die Funktionalskala $\Phi_i(P)$ rekursiv in der folgenden Weise: Wir setzen

$$\Phi_0(P) = \varphi(P), \tag{10a}$$

und weiter für $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\Phi_i(P) = \Phi_{i-1}(P) - \sum{}' \omega_{i-1}(P, P_{i-1})\, \Phi_{i-1}(P_{i-1}). \tag{10b}$$

Offenbar gestattet das Funktional $\Phi_i(P)$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ noch die explizitere Entwicklung

$$\Phi_i(P) = \varphi(P) - \sum{}' \omega_0(P, P_0)\, \Phi_0(P_0) - \cdots - \sum{}' \omega_{i-1}(P, P_{i-1})\, \Phi_{i-1}(P_{i-1}). \tag{11}$$

Nun zeigen wir, daß die sich mit (10a) und (10b) aus $\varphi(P)$ rekursiv ergebenden Funktionale $\Phi_i(P)$ additiv sind; ferner daß sich die Funktionale $\Phi_i(P)$ in allen i-dim. Unterräumen R_i von R_k auf einfach-additive Funktionale reduzieren, falls $1 \leqq i \leqq k$ ist. Die erzeugten Funktionale haben also die Eigenschaften, welche für die zum Aufbau der Basisfunktionale dienende Skala vorausgesetzt wurden. Diese Behauptung weist man induktiv nach. Für $i = 0$ ist sie trivial; eine einfache Additivität steht hier nicht zur Diskussion. Es sei nun $1 \leqq j \leqq k$ und die Behauptungen seien bereits für alle $i = 0, 1, \ldots, j-1$ sichergestellt. Wir betrachten den Fall $i = j$. Nach (10b) ist $\Phi_j(P)$ als Differenz zweier Funktionale dargestellt, wovon das erste nach der induktiven Annahme bereits additiv ist. Das zweite ist von der Form (7) und deshalb auch additiv, da ja die induktive Annahme die in dieser Darstellung von $\Phi_{j-1}(P)$ geforderten Eigenschaften verbügt. Zusammengefaßt ergibt sich zunächst, daß $\Phi_j(P)$ jedenfalls additiv ist. Um zu zeigen, daß dieses Funktional im R_j sogar einfach-additiv ausfällt, genügt es festzustellen, daß es für $(j-1)$-dim. Eipolyeder verschwindet. Denken wir uns in der Tat in der Darstellung (10b) ein $(j-1)$-dim. Eipolyeder P eingesetzt. Es sind dann alle $(j-1)$-dim. Kanten von P mit P selbst identisch, und die Faktoren $\Phi_{j-1}(P_{j-1})$ sind somit alle gleich. Andererseits gilt aber für diesen Fall $\Sigma' \omega_{j-1}(P, P_{j-1}) = 1$, so daß $\Phi_j(P) = 0$ resultiert. Die Behauptung ist also im vollen Umfang auch für $i = j$ und damit für alle $i = 0, 1, \ldots, k$ richtig.

Setzen wir jetzt für $i = 0, 1, \ldots, k-1$

$$\chi_i(P) = \sum \omega_i(P, P_i)\, \Phi_i(P_i) \tag{12}$$

und ergänzend noch

$$\chi_k(P) = \Phi_k(P), \tag{13}$$

so haben wir $k+1$ Basisfunktionale eingeführt.

Setzen wir in (11) für i den höchsten Wert k ein, so ergibt die Auflösung nach $\varphi(P)$ unmittelbar die Darstellung (9), womit der Beweis abgeschlossen ist.

§ 5. Bausteinfunktionale.

Im voranstehenden Abschnitt haben wir nachgewiesen, daß sich das allgemeinste additive Funktional auf einfach-additive Funktionale zurückführen läßt.

Eine vollständige Charakterisierung der additiven Funktionale kann somit auf diejenige der einfach-additiven Funktionale reduziert werden.

Im vorliegenden Abschnitt treten wir kurz auf die Frage ein, wie sich das allgemeinste einfach-additive Funktional darstellen läßt.

Zunächst etwas über Bausteine für k-dim. Polyeder: Es sei $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k\}$ ein k-Bein orthogonaler Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_j$ und $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ ein k-Tupel positiver Grössen $a_1 \geqq 0$. Durch den Ansatz

$$\mathfrak{E} = \sum_1^k \lambda_\nu a_\nu \mathfrak{a}_\nu \qquad [1 \geqq \lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_k \geqq 0] \tag{14}$$

sind die in einem festen Ursprung 0 des R_k angreifenden Ortsvektoren eines k-dim. Orthogonalsimplex $T = T(\mathfrak{S}, S)$ gegeben. Die sich bei unabhängig veränderlichem $\mathfrak{S}$ und S ergebende Schar aller T, die nach Konstruktion im Ursprung 0 je eine Ecke haben, bildet nun einen Baukasten für die eigentlichen Polyeder des R_k. Wie auch an anderer Stelle bereits näher ausgeführt wurde [2]), gestattet jedes Polyeder P eine Darstellung der Form

$$P = \sum \varepsilon_n T_n \qquad [\varepsilon_n = \pm 1]. \tag{15}$$

Hierbei bedeuten die Operationen „addieren“ und „subtrahieren“ stets „hinzufügen“ und „wegnehmen“ im Sinne der Elementargeometrie, und die Operationen sind alle in diesem Sinne realisierbar, wenn die in der Darstellungsformel vorgesehene Reihenfolge von links nach rechts eingehalten wird. Im Hinblick auf diese Darstellungsmöglichkeit aller Polyeder heissen die T Bausteine.

Ist jetzt P ein Eipolyeder und $\varphi(P)$ ein einfach-additives Eipolyederfunktional und gibt endlich die Darstellung (15) eine Zerlegung von P in Bausteine an, so läßt sich zeigen, daß dann

$$\varphi(P) = \sum \varepsilon_n \varphi(T_n) \tag{16}$$

sein muß. (Man beachte, daß auch die Bausteine selbst Eipolyeder sind.) Hierdurch wird erhellt, daß ein Funktional $\varphi(P)$ bereits vollständig gegeben ist, wenn die Funktionalwerte $\varphi(T)$ bezüglich der Bausteine, also die *Bausteinfunktionale* bekannt sind.

Weiter kann bewiesen werden, daß, wenn man umgekehrt von willkürlich vorgeschriebenen Bausteinfunktionalen ausgeht, sich dann ein Eipolyeder-

---

[2]) Vgl. meinen Aufsatz: Zur Inhaltstheorie der Polyeder, *Collectanea Math.* 3, (1950), 137—158, insb. § 3.

funktional $\varphi(P)$ gewinnen läßt, das die Erweiterung des vorgegebenen Funktionals über den Bausteinen ist. Um dies zu verifizieren, muß gezeigt werden, daß die in (16) rechtsstehende algebraische Summe der Bausteinfunktionale, die man sich willkürlich vorgegeben denken soll, bezüglich aller Darstellungen (15) desselben Eipolyeders P stets den gleichen Wert aufweisen muß.

Mit diesen nur skizzenhaft gehaltenen Ausführungen ist immerhin angedeutet, wie die in diesem Abschnitt aufgeworfene Frage ihre Lösung finden kann.

Das allgemeinste einfach-additive Funktional ist durch eine willkürliche Funktion über den Bausteinen darstellbar. Das Bausteinfunktional selbst ist eine Funktion der Form $\varphi(T) = f(\mathfrak{S}, S)$, also eine Funktion eines k-Beins $\mathfrak{S}$ orthogonaler Einheitsvektoren und eines k-Tupels S positiver Größen. Nach dieser Sachlage ist das Bausteinfunktional im wesentlichen eine Funktion von $n = k(k+1)/2$ Veränderlichen.

§ 6. Bewegungsinvariante Funktionale und Minkowskis Quermaßintegrale.

Ein Eipolyederfunktional $\varphi(P)$ heißt *bewegungsinvariant,* wenn für zwei kongruente Eipolyeder P und Q die Gleichheit

$$\varphi(P) = \varphi(Q) \qquad [P \simeq Q] \tag{17}$$

gilt. Nach den Ausführungen von § 4 wird ohne weiteres klar, daß sich ein bewegungsinvariantes additives Funktional $\varphi(P)$ im Sinne der Darstellungsformel (9) in Basisfunktionale $\chi_i(P)$ zerlegen läßt, die ebenfalls bewegungsinvariant sind.

In der Tat sieht man direkt ein, daß sich die Invarianz von $\varphi(P)$ auf die nach (10a) und (10b) gewonnenen Hilfsfunktionale $\Phi_i(P)$ überträgt, da die höheren Kantenkrümmungen natürlich bewegungsinvariant sind. Das nämliche ergibt sich für die nach Ansatz (7) aufgebauten Basisfunktionale $\chi_i(P)$.

Um also alle additiven bewegungsinvarianten Funktionale zu charakterisieren, genügt es wieder, nur die einfach-additiven und bewegungsinvarianten Funktionale zu kennen.

Die Elementargeometrie kennt nur ein Funktional der letztgenannten Art, nämlich das Volumen.

Verwendet man in (7) für $\Phi_i(P_i)$ das i-dim. Volumen $V_i(P_i)$ so erhält man ein wichtiges und klassisches Eipolyederfunktional; es ergibt sich nämlich bis auf einen konstanten Faktor das MINKOWSKIsche Quermaßintegral $W_{k-i}(P)$, d. h. es gilt

$$\chi_i(P) = c_{ik}\, W_{k-i}(P); \quad c_{ik} = (k-i)\binom{k}{i} / \Omega_{k-i-1}. \tag{18}$$

Es gibt aber, wie man mit Anwendung des Auswahlaxioms der Mengenlehre nachweisen kann, noch andere einfach-additive und bewegungsinvariante Funktionale, die vom Volumen wesentlich verschieden sind.[3]) Die lineare Mannigfaltigkeit der allgemeinsten bewegungsinvarianten additiven Funktionale ist also wesentlich umfassender als die $(k+1)$-dim. lineare Mannigfaltigkeit derjenigen Funktionale, die durch die $k+1$ Quermaßintegrale von MINKOWSKI darstellbar sind.

Es entsteht hier die Frage, durch welche zusätzlichen Eigenschaften sich diese spezielleren Funktionale kennzeichnen und von den allgemeineren absondern lassen. Mit dieser Problemstellung leiten wir über zum letzten Abschnitt.

§ 7. Beschränkte Funktionale und eine unbeantwortete Frage.

Ein Eipolyederfunktional $\varphi(P)$ heißt *beschränkt*, wenn es zu jedem Würfel T eine Konstante $C = C(T)$ so gibt, daß für jedes in T enthaltene Eipolyeder P die Einschränkung

$$(19) \qquad |\varphi(P)| \leqq C \qquad [P \subset T]$$

gilt. Betrachten wir insbesondere die lineare Mannigfaltigkeit der Funktionale der Form

$$(20) \qquad \varphi(P) = \sum_{0}^{k} a_\nu W_\nu(P),$$

wo die a_ν feste Koeffizienten und die $W_\nu(P)$ die Quermaßintegrale von MINKOWSKI sind, so ist jedes Funktional dieser Art additiv, bewegungsinvariant und beschränkt.

Im Anschluß an die Problemstellung am Ende des vorstehenden Abschnitts kann man fragen, ob die eben genannte lineare Mannigfaltigkeit durch diese drei Eigenschaften gekennzeichnet ist.

Auf Grund der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit ist klar, daß sich diese Frage genau dann positiv beantworten läßt, wenn man zeigen kann, daß das Volumen im wesentlichen das einzige einfach-additive, bewegungsinvariante und beschränkte Funktional ist. Es sollte folgendes nachgewiesen werden: Ist $\varphi(P)$ ein Eipolyederfunktional mit den drei oben genannten

[3]) Im Falle $k = 3$ hat B. JESSEN bereits vor einigen Jahren die Existenz derartiger Funktionale nachgewiesen. Vgl. seine Arbeit: En Bemaerkning om Polyedres Volumen, *Mat. Tidsskr. B.* (1941), 59—65. Unabhängig habe ich die Existenz linearer Funktionale dieser Art hergeleitet. Es handelt sich um die Abhandlung: Zerlegungsgleichheit und additive Polyederfunktionale, *Comm. Math. Helv.* **24**, (1950), 204—218.

Eigenschaften, so gibt es eine Konstante a, so daß

$$\varphi(P) = a\,V(P) \tag{21}$$

gilt. Innerhalb der Theorie der additiven Polyederfunktionale würde diesem Hilfssatz eine zentrale Bedeutung zukommen. Verf. hat seit Jahren versucht, diese Lücke auszufüllen, doch ist ihm die Entscheidung, ob diese Charakterisierung des Volumens richtig oder falsch ist, bisher nicht gelungen.[4])

(Eingegangen am 31. Januar, 1953.)

[4]) Im Falle $k = 2$ ist der Hilfssatz trivialerweise richtig.