Über die Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens zur Bestimmung von Wurzeln algebraischer Gleichungen. I.

Von BÉLA BARNA in Debrecen.

In einer Arbeit[1]) von Herrn A. RÉNYI über die Divergenz des auf die Lösung algebraischer Gleichungen angewandten Newtonschen Algorithmus sind zwei Probleme erwähnt. Das erste bezieht sich auf die Mächtigkeit der Punkte x_0, bei welchen die zugehörige Iterationsfolge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

— wo $f(x)$ ein beliebiges reelles Polynom mit reellen Nullstellen ist — nicht zu einem Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ führt. Die zweite Frage ist: Gibt es solche Polynome, bei denen die Menge der Divergenzpunkte ein Intervall enthält?

Ich habe auf die aufgeworfenen Fragen im Spezialfalle der Polynome vierten Grades mit vier verschiedenen Wurzeln in einer früheren Arbeit Antwort gegeben[2]). Jetzt möchte ich diese Ergebnisse auf Polynome beliebigen Grades verallgemeinern.

§ 1.

Wir setzen voraus, daß $f(x)$ ein reelles Polynom m-ten Grades mit m verschiedenen reellen Nullstellen ist, und $m \geqq 4$ gilt. Die Nullstellen werden der Größe nach mit

$$\overset{(0)}{\xi}, \overset{(1)}{\xi}, \overset{(2)}{\xi}, \ldots \overset{(m-1)}{\xi},$$

und die Abszissen der extremalen Werte des Polynoms mit

$$\overset{(0)}{\eta}, \overset{(1)}{\eta}, \overset{(2)}{\eta}, \ldots, \overset{(m-2)}{\eta}$$

bezeichnet. Der aus dem beliebigen $x = x_0$ ausgehende NEWTONsche Algo-

---

1) A. RÉNYI, A Newton-féle gyökközelítő eljárásról. (On Newton's method of approximation.) *Mat. Lapok* **1** (1950), 278—293.

2) B. BARNA, Über das Newtonsche Verfahren zur Annäherung von Wurzeln algebraischer Gleichungen. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **2** (1951), 50—63.

rithmus besteht in der Iteration der *Grundfunktion*

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Die dadurch erhaltene Folge

$$x_{n+1} = N(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist die *Iterationsfolge* von x_0. Wir verwenden noch die gebräuchlichen Bezeichnungen

$$N_0(x) = x, \quad N_1(x) = N(x), \ldots, N_{n+1}(x) = N(N_n(x)).$$

Existiert eine kleinste natürliche Zahl ν, daß für einen Punkt $x = \varkappa$:

$$N_\nu(\varkappa) = \varkappa,$$

so ist $\varkappa$ ein *Fixpunt ν-ter Ordnung*. Die Fixpunkte der Grundfunktion sind also Fixpunkte erster Ordnung. Wenn $\varkappa$ ein Fixpunkt ν-ter Ordnung ist, dann sind $\varkappa_0 = \varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\nu-1}$ ν verschiedene Fixpunkte ν-ter Ordnung und sie bestimmen einen ν-gliedrigen *Zyklus*. Die zu demselben Zyklus gehörigen Fixpunkte nennen wir *konjugierte Fixpunkte*. Der Iterationsfolge eines Fixpunktes enthält also nur endlich viele verschiedene Punkte.

Wir wollen jetzt den Begriff der *inversen Iteration* erklären. Bezeichne $N_{-1}(x)$ die (im allgemeinen mehrdeutige) inverse Funktion von $N(x)$. Dann sind die Punkte

$$x_{-n-1} = N_{-1}(x_{-n}) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

die *invers-iterierten* Punkte von $x = x_0$. Im folgenden verstehen wir unter Iteration schlechthin immer die Iteration mit positiven Indexen. Diese, wie auch die inverse Iteration ist im Fall des NEWTONschen Verfahrens sehr anschaulich (Figur 1). Bei der iteration schneidet die Tangente der Kurve $f(x)$ mit dem Berührungspunkt $[x, f(x)]$ die x-Achse in dem Punkt x_1. Bei der inversen Iteration ziehen wir aus dem Punkt x die Tangente an die Kurve; die Abszissen der Berührungspunkte sind die x_{-1}-Punkte. In unserem Fall ist die Funktion $N_{-1}(x)$ wenigstens $(m-2)$-deutig, stellenweise $(m-1)$-deutig[3]), für $x < \overset{(0)}{\xi}$ und $x > \overset{(m-1)}{\xi}$ hat sie aber m reelle Werte. Wir werden in den späteren Betrachtungen die invers-iterierten Punkte nur solcher x-Punkte benützen, für die $N_{-1}(x)$ genau $(m-2)$ Werte hat. Dann bezeichnen wir mit

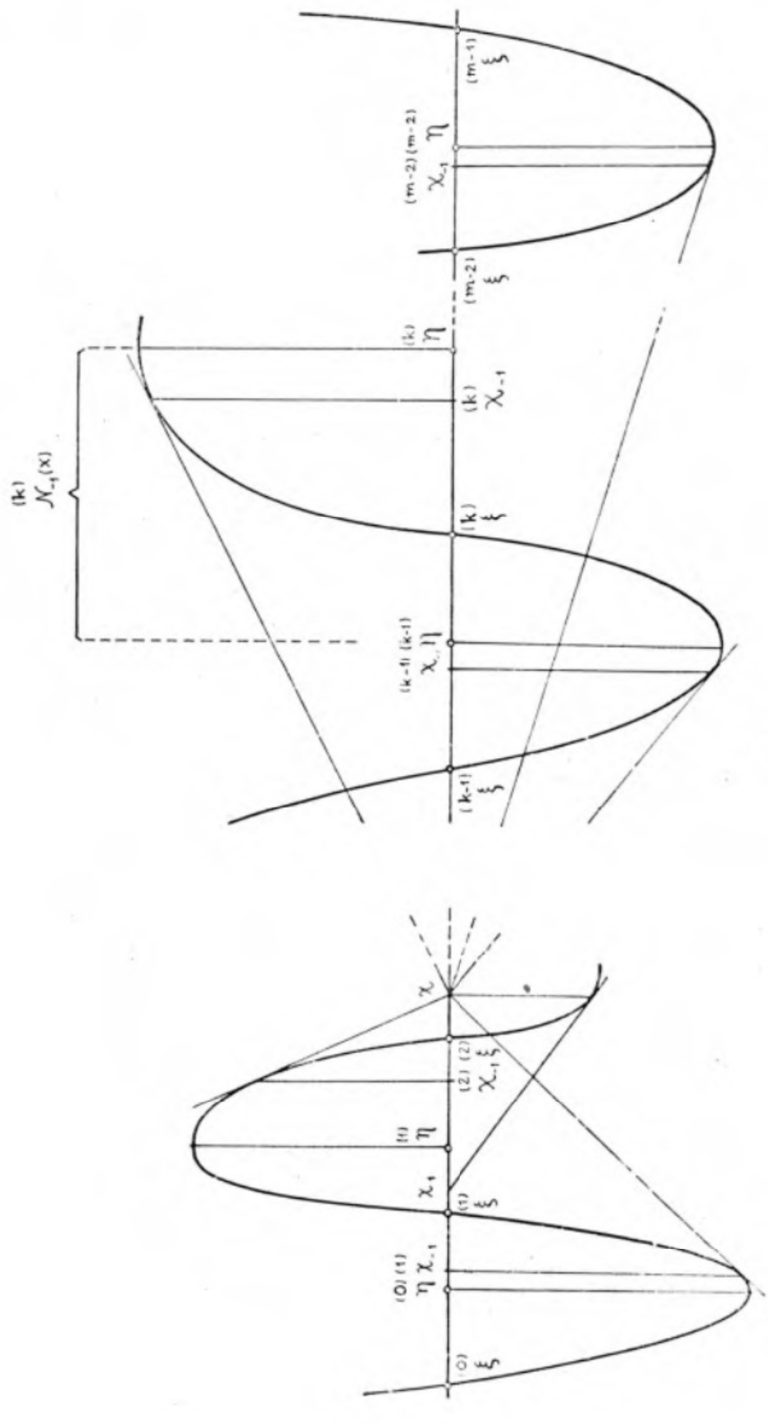
$$\overset{(k)}{x}_{-1} = \overset{(k)}{N}_{-1}(x)$$

den (einzigen) Wert von $N_{-1}(x)$, der in dem Intervall $(\overset{(k-1)}{\eta}, \overset{(k)}{\eta})$ liegt.

Der Punkt x ist ein *Konvergenzpunkt*, wenn ihre Iterationsfolge konvergiert; im entgegengesetzten Fall nennen wir ihn *Divergenzpunkt*. Solche Punkte sind z. B. die Punkte $\overset{(k)}{\eta}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m-2)$; es ist nämlich $N(\overset{(k)}{\eta}) = \infty$.

[3]) Dies trifft in genügend kleinen einseitigen Umgebungen der Wurzeln zu, wenn diese keine Inflexionspunkte sind.

Die iterierten und invers-iterierten Punkte jedes Punktes x haben offensichtlich denselben Konvergenzcharakter. *Konvergenz-* und *Divergenzintervalle* sind Intervalle die nur Konvergenz-, bzw. Divergenzpunkte enthalten.



Figur 1

Es ist leicht einzusehen, daß jede genügend kleine Umgebung $I(\xi)=(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ der Wurzel ξ ein Konvergenzintervall ist. Es ist nämlich

$$N'(\xi)=\frac{f(\xi)\cdot f''(\xi)}{f'(\xi)^2}=0,$$

also, für gewisse, genügend kleine ε,

$$|N'(x)|<q<1, \quad x\in I(\xi)$$

gilt. Nach dem LAGRANGEschen Mittelwertsatz folgt also

$$|N(\xi)-N(x)|<q|\xi-x|;$$

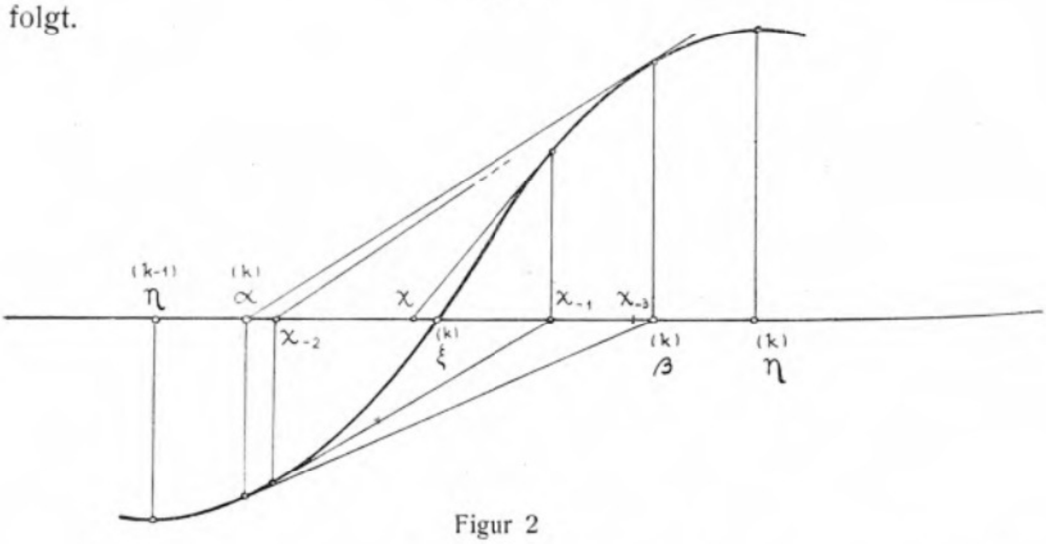
dies bedeutet aber, daß

$$|\xi-x_1|<q|\xi-x|$$

ist, woraus für $x\in I(\xi)$

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\xi$$

folgt.



Figur 2

Unsere erste Aufgabe ist zu untersuchen, wieweit diese Konvergenzintervalle verlängert werden können. Es ist ohne weiteres klar, daß diese längste Konvergenzintervalle in der Umgebung der Wurzeln $\overset{(0)}{\xi}$ und $\overset{(m-1)}{\xi}$ die Intervalle $(-\infty, \overset{(0)}{\eta})$, bzw. $(\overset{(m-2)}{\eta}, +\infty)$ sind. Die Grenzpunkte der längsten, den Punkt $\overset{(k)}{\xi}$ einschließenden Konvergenzintervalles $(k\neq 0, m-1)$ können wir mit dem folgenden Verfahren bestimmen: Wählen wir einen beliebigen Punkt x in der Umgebung von $\overset{(k)}{\xi}$, für den $|N'(x)|<1$ ist, und der nicht auf derselben Seite von $\overset{(k)}{\xi}$ liegt, wie die Abszisse des in dem Intervall $(\overset{(k-1)}{\eta}, \overset{(k)}{\eta})$ liegenden Inflexionspunktes. (Figur 2). Bilden wir jetzt die inverse Iterationsfolge von x mit der eindeutigen Funktion $\overset{(k)}{N}_{-1}(x)$. Dann liegen

$$x_0=x, x_{-2}, x_{-4}, \ldots \text{ bzw. } x_{-1}, x_{-3}, x_{-5}, \ldots.$$

auf entgegengesetzten Seiten des Punktes $\overset{(k)}{\xi}$, und bilden je eine, von diesem Punkte sich monoton entfernende Punktfolge zwischen $\overset{(k-1)}{\eta}$ und $\overset{(k)}{\eta}$. Wir bezeichnen die Grenzwerte mit $\overset{(k)}{\alpha}$ und $\overset{(k)}{\beta}$, wo

$$\overset{(k)}{\alpha} < \overset{(k)}{\xi} < \overset{(k)}{\beta}$$

gilt. Man sieht, daß $\overset{(k)}{\alpha}$ und $\overset{(k)}{\beta}$ von der Wahl des Punktes x unabhängig sind, und daß jeder Punkt zwischen $\overset{(k)}{\alpha}$ und $\overset{(k)}{\beta}$ ein Konvergenzpunkt ist, dessen Iterationfolge nach $\overset{(k)}{\xi}$ strebt. Aus der Stetigkeit der Funktion $N(x)$ in diesem Intervall folgert man ferner durch die Gleichungen

$$\lim_{n\to\infty} x_{-2n} = \lim N(x_{-2n-1}) = N(\lim x_{-2n-1}),$$

daß $\overset{(k)}{\alpha}$ und $\overset{(k)}{\beta}$ konjugierte Fixpunkte zweiter Ordnung, also Divergenzpunkte sind.

Wir haben somit unsere erste Aufgabe gelöst. Die so entstehenden offenen Intervalle

$$\overset{(0)}{\varDelta\xi} \equiv (-\infty, \overset{(0)}{\eta}); \quad \overset{(k)}{\varDelta\xi} \equiv (\overset{(k)}{\alpha}, \overset{(k)}{\beta}),\ k = 1, 2, 3, \ldots, m-2; \quad \overset{(m-1)}{\varDelta\ \xi} \equiv (\overset{(m-2)}{\eta}, +\infty)$$

bezeichnen wir als die *unmittelbare Konvergenzintervalle.* Die Endpunkte dieser Intervalle sind Divergenzpunkte, sie sind also offene intervalle.

§ 2.

Um noch die weitere Divergenzpunkte zu erhalten, müssen wir die *periodische inverse Iterationsfolge* erklären. Dazu nehmen wir eine beliebige ν-gliedrige Variation der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, m-2$ (mit oder ohne Wiederholungen), die sich nicht aus übereinstimmenden Zahlenfolgen zusammensetzen läßt. (Z. B. die Variation 3, 2, 2, 3, 2, 2. trifft nicht zu.) Eine solche Variation

$$V_\nu : k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_\nu \quad (1 \leqq k_i \leqq m-2)$$

wird *Grundperiodie* genannt. Es sei ferner x ein beliebige, nicht in einem unmittelbaren Konvergenzintervall liegende Punkt, und bezeichne $\overset{(k_i)}{N_{-1}}(x)$ den eindeutigen Zweig der $(m-2)$-wertigen Funktion $N_{-1}(x)$, deren Wert in dem Intervall $(\overset{(k_i-1)}{\eta}, \overset{(k_i)}{\eta})$ liegt. Wenden wir nun ausgehend aus dem Punkt x bei dem i-ten inversen Iterationsschritt $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ die Funktion $\overset{(k_i)}{N_{-1}}(x)$ an, und wiederholen wir nach der ν-ten inversen Iteration dieses Verfahren periodisch. Die so entstehende Folge (x_{-n}) wird dann als eine (*mit V_ν gebildete*) *periodische inverse Iterationsfolge* bezeichnet.

Jetzt gehen wir von den Punkten $\overset{(0)}{\eta}$ und $\overset{(m-2)}{\eta}$ aus, und bilden wir die periodischen inversen Iterationsfolgen mit den Grundperioden $m-2, 1$, bzw. $1, m-2$. Für die Glieder der so erhaltenen Folgen gilt dann die folgende Anordnung (Figur 3):

$$\overset{(0)}{\eta} < \overset{(m-2)}{\eta}_{-1} < \overset{(0)}{\eta}_{-2} < \overset{(m-2)}{\eta}_{-3} < \cdots < \overset{(1)}{N}_{-1}(\overset{(m-1)}{\xi}) < \overset{(1)}{\alpha},$$

$$\overset{(m-2)}{\eta} > \overset{(0)}{\eta}_{-1} > \overset{(m-2)}{\eta}_{-2} > \overset{(0)}{\eta}_{-3} > \cdots > \overset{(m-1)}{N}_{-1}(\overset{(0)}{\xi}) > \overset{(m-2)}{\beta},$$

woraus die Existenz der Grenzwerte

$$\lim \overset{(0)}{\eta}_{-2n} = \lim \overset{(m-2)}{\eta}_{-2n+1} = \lambda$$

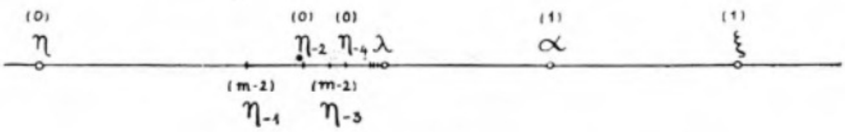
$$\lim \overset{(m-2)}{\eta}_{-2n} = \lim \overset{(0)}{\eta}_{-2n+1} = \mu$$

mit $\lambda_1 = \mu, \mu_1 = \lambda$ folgt. Die offenen Intervalle

$$(\overset{(0)}{\eta}, \overset{(m-2)}{\eta}_{-1}), (\overset{(m-2)}{\eta}_{-1}, \overset{(0)}{\eta}_{-2}), \dots$$

$$(\overset{(m-2)}{\eta}, \overset{(0)}{\eta}_{-1}), (\overset{(0)}{\eta}_{-1}, \overset{(m-2)}{\eta}_{-2}), \dots$$

sind Konvergenzintervalle; man kommt nämlich aus jedem dieser Intervalle durch Iteration in das unmittelbare Konvergenzintervall von $\overset{(m-1)}{\xi}$, bzw. $\overset{(0)}{\xi}$. Alle Divergenzpunkte in den Intervallen $(\overset{(0)}{\eta}, \lambda)$ und $(\mu, \overset{(m-2)}{\eta})$ — nämlich die Punkte $\overset{(0)}{\eta}_{-n}$ und $\overset{(m-2)}{\eta}_{-n}$ — sind also gewisse invers-iterierte Punkte von $\overset{(0)}{\eta}$ und $\overset{(m-2)}{\eta}$, die gemeinsamen Endpunkte von Konvergenzintervallen, d. h. *isolierte Divergenzpunkte* sind. Man kann deshalb diese beiden Intervalle als *punktierte Konvergenzintervalle* ansehen.



Figur 3

Wir werden unter dem *iterierten Intervall* eines beliebigen Intervalls dasjenige zwischen den iterierten Punkten der Endpunkte verstehen. In ähnlichem Sinne sprechen wir über das inverse Iterieren von Intervallen, wobei natürlich die invers-iterierten Punkte der beiden Endpunkte nach demselben Zweig der Funktion $N_{-1}(x)$ gebildet werden.

Nun bilden wir die ersten invers-iterierten Intervalle des Intervalls $(-\infty, \lambda)$ der Reihe nach durch die Funktionszweige

$$\overset{(1)}{N}_{-1}(x), \overset{(2)}{N}_{-1}(x), \dots, \overset{(m-3)}{N}_{-1}(x),$$

so erhalten wir die Intervalle

$$(\overset{(k)}{\lambda}_{-1}, \overset{(k)}{\eta}) \quad (k = 1, 2, \ldots, m-3).$$

Analogerweise bekommen wir aus dem Intervall $(\mu, +\infty)$ durch die Funktionen

$$\overset{(2)}{N}_{-1}(x), \overset{(3)}{N}_{-1}(x), \ldots, \overset{(m-2)}{N}_{-1}(x)$$

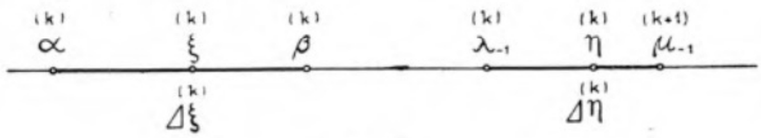
die invers-iterierten Intervalle

$$(\overset{(k-1)}{\eta}, \overset{(k)}{\mu}_{-1}) \quad (k = 2, 3, \ldots, m-2),$$

sodaß die Intervalle (Figur 4)

$$\overset{(k)}{\Delta\eta} \equiv (\overset{(k)}{\lambda}_{-1}, \overset{(k+1)}{\mu}_{-1}) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, m-3)$$

nur abzählbar unendlich viele isolierte, in den beiden Endpunkten sich häufende Divergenzpunkte enthalten.



Figur 4

§ 3.

Es sollen noch die *Ergänzungsintervalle*

$$(\lambda, \overset{(1)}{\alpha}); (\overset{(k)}{\mu}_{-1}, \overset{(k)}{\alpha}), \; k = 2, 3, \ldots, m-2; \quad (\overset{(k)}{\beta}, \overset{(k)}{\lambda}_{-1}), \; k = 1, 2, 3, \ldots, m-3; \quad (\overset{(m-2)}{\beta}, \mu)$$

bezüglich der Kovergenzpunkte untersucht werden. Zum Aufsuchen dieser Punkte besitzen wir eine verläßliche Methode. Es gibt nämlich für jedes Konvergenzintervall Δx einen Iterationsindex q so, daß $(\Delta x)_q$ mit einem der unmittelbaren Konvergenzintervalle identisch ist. Umgekehrt, wir erhalten durch inverse Iteration der unmittelbaren Konvergenzintervalle auch alle übrigen Konvergenzintervalle. Bilden wir also die ersten invers-iterierten Intervalle von $\overset{(k)}{\Delta\xi}$ $(k \neq 0, m-1)$ durch die Anwendung der Funktionen $\overset{(i)}{N}_{-1}(x)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, m-2)$, so bekommen wir $(m-3)$ neue Konvergenzintervalle, denn

$$\overset{(k)}{N}_{-1}(\overset{(k)}{\Delta\xi}) \equiv \overset{(k)}{\Delta\xi}$$

ist. Durch die allen weiteren möglichen inversen Iterationsschritte dieser Intervalle bekommen wir immer verschiedene neue Konvergenzintervalle; die alle so erhaltene Konvergenzintervalle $(\overset{(k)}{\Delta\xi})_{-n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ liegen in den Ergänzungsintervallen, und enthalten hier alle Konvergenzpunkte, deren Iterationsfolge zu der Wurzel $\overset{(k)}{\xi}$ führt. Mit dem Herausnehmen dieser Intervalle für $n = 0, 1, 2, \ldots$ aus dem Intervall (λ, μ), nimmt man also alle, zu diesem

Wurzeln führenden Konvergenzpunkte heraus. Ebenso verfahren wir mit den punktierten Konvergenzintervallen $\overset{(k)}{\Delta \eta_i}$, $k=1,2,\ldots,m-3$. Alle Intervalle $(\overset{(k)}{\Delta \eta_i})_{-n}$ sind punktierte Konvergenzintervalle. Nimmt man diese weg, so fallen dadurch die zu den Wurzeln $\overset{(0)}{\xi}$ und $\overset{(m-1)}{\xi}$ führenden Konvergenzpunkte aus den Ergänzungsintervallen heraus. Die in dem ganzen Intervall (λ, μ) noch zurückbleibenden Divergenzpunkte bilden also einen Teil der Menge aller Divergenzpunkte.

Wir wollen jetzt diese Menge genauer untersuchen.

Es ist zuerst zu bemerken, daß die Intervalle $(\overset{(k)}{\Delta \xi})_{-n}$ $(k=1,2,\ldots,m-2;$ $n=0,1,2,\ldots)$ und $(\overset{(h)}{\Delta \eta_i})_{-p}$ $(h=1,2,\ldots,m-3; p=0,1,2,\ldots)$ keinen gemeinsamen inneren Punkt haben. Es folgt nämlich aus der entgegengesetzten Annahme, daß wenigstens zwei von diesen Intervallen gemeinsame Konvergenzpunkte enthalten. Die aus einem solchen Punkt ausgehende Iterationsfolge sollte dann entweder zwei verschiedene Grenzwerte haben, und dies ist unmöglich, oder fallen die beiden Intervalle ganz zusammen. Es folgt ferner die Unmöglichkeit des Zusammenfallens zweier weggenommenen Intervalle daraus, daß sie keine gemeinsame Endpunkte haben können. Um diese Behauptung zu beweisen verfahren wir so: Es sei α und β ein beliebiges konjugiertes Fixpunktpaar zweiter Ordnung, und bilden wir die ersten invers-iterierten Punkte von α, *ausgenommen den Punkt* β. Es wird also $\alpha_1 \neq \beta$. Die so gewonnenen Punkte sind voneinander verschieden, denn sie zu verschiedenen Intervallen $(\overset{(k)}{\eta_i}, \overset{(k+1)}{\eta_i})$ $(k=0,1,\ldots,m-3)$ gehören; sie sind aber auch von α verschieden, weil sonst α ein Fixpunt erster Ordnung wäre. Nehmen wir an, daß alle so gebildete α_{-n} für $n=0,1,2,\ldots,p$ voneinender verschiedene Punkte sind. So gilt dies auch für die Punkte α_{-n} mit $n=0,1,2,\ldots,p+1$. Aus der Identität

$$\alpha_{-p-1} = (\alpha_{-p-1})'$$

folgt nämlich $\alpha_{-p} = (\alpha_{-p})'$, im Gegensatz mit der Annahme; und wenn

$$\alpha_{-p-1} = \alpha_{-p+n} \quad (0 \leqq n \leqq p)$$

wäre, so ergäbe sich hieraus durch p-maliges Iterieren

$$\alpha_{-1} = \alpha_n = \begin{cases} \alpha \text{ für gerades } n, \\ \beta \text{ für ungerades } n. \end{cases}$$

Alle beide Fälle sind unmöglich. Die Behauptung folgt durch vollständige Induktion.

Die vorige Menge und die aus dem Punkt β analog gebildete Punktmenge sind fremde Mengen. Wenn nämlich für ein Elementenpaar

$$\alpha_{-n} = \beta_{-p} \quad (n \geqq p)$$

wäre, so würden wir durch Iteration:

$$\alpha_{-1}=\beta_{n-p-1}=\begin{cases}\beta_{-1}, & \text{für } n-p=0;\\ \alpha, & \text{für ungerades } (n-p);\\ \beta, & \text{für gerades } (n-p)>0\end{cases}$$

bekommen. Hier sind die beiden ersten Fälle unmöglich, den dritten Fall haben wir ausgeschlossen.

Noch einfacher ist der Beweis dafür, daß die Menge der invers-iterierten Punkte von nicht konjugierten Fixpunkten zweiter Ordnung auch fremde Mengen sind.

Wir können jetzt diese Teilergebnisse zusammenfassen: Die Intervalle

$$(\overset{(k)}{\Delta\xi})_{-n}\quad (k=1,2,\ldots,m-2)\ \text{ und }\ (\overset{(k)}{\Delta\eta})_{-n}\ (k=1,2,\ldots,m-3)$$
$$(n=0,1,2,\ldots,\text{in inf.})$$

sind offene Intervalle, die getrennt liegen und paarweise ohne gemeinsame Endpunkte sind. Wenn also diese Intervalle aus dem abgeschlossenen Intervall $[\lambda,\mu]$ herausgenommen werden, so ist die Restmenge perfekt. Damit ist gezeigt, daß, die Menge der nicht-isolierten Divergenzpunkte, und damit *die ganze Menge der Divergenzpunkte nicht abzählbar unendlich ist.*

§ 4.

Wir sind jetzt im Stande die Divergenzpunkte auf Grund ihren Iterationsfolgen klassifizeren zu können.

I. Isolierte Divergenzpunkte sind die Punkte $\overset{(k)}{\eta}$ $(k=0,1,2,\ldots,m-2)$ und alle invers-iterierten Punkte derselben. Die Iterationsfolge jedes solchen Punktes führt nach endlich vielen Iterationsschritten zu dem Punkt ∞. Diese Divergenzpunkte werden *Divergenzpunkte erster Art* genannt.

II. Die Fixpunkte zweiter Ordnung mit ihren invers-iterierten Punkten sind Divergenzpunkte, die beschränkte und nur aus endlich vielen verschiedenen Punkten bestehende Iterationsfolge besitzen. Es gibt aber auch andere solche Punkte. Wir können nämlich sehr einfach beweisen, daß es Fixpunkte jeder Ordnung gibt. Wir erhalten Fixpunkte ν-ter Ordnung, wenn wir z. B. die invers-iterierten Intervalle von $(\overset{(0)}{\eta},\overset{(1)}{\alpha})$ mit der Grundperiode

$$V_\nu:\quad k_1,k_2,\ldots,k_{\nu-1},1$$

bilden. Wir gewinnen dadurch in $(\overset{(0)}{\eta},\overset{(1)}{\alpha})$ eine Intervallschachtelung, deren innerer Punkt sich als Fixpunkt ν-ter Ordnung herausgibt.

Die höheren Fixpunkte und alle ihre invers-iterierten Punkte sind Divergenzpunkte mit laut endlich viele verschiedene Elemente erhaltenden, beschränkten Iterationsfolgen. Diese sind die Divergenzpunkte *zweiter Art.*

III. Die Menge der Divergenzpunkte erster und zweiter Art ist abzählbar, und so folgt aus dem Ergebnis des vorigen § die Existenz solcher Divergenzpunkte, die nicht zu dieser Menge gehören. Die Iterationsfolge jeder dieser Punkte ist beschränkt und enthält unendlich viele verschiedene Punkte. Diese Divergenzpunkte *dritter Art* bilden eine überabzählbare Punktmenge.

Mit der Frage der Divergenzintervalle werden wir uns im II. Teil dieser Arbeit beschäftigen.

(Eingegangen am 21. März, 1953.)